ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА—ПАЛЕЯ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

В. Э. Кацнельсон *

Известная теорема Винера — Палея (см, например, [1], стр. 498 — 503) допускает следующую формулировку. Для того, чтобы целая функция конечной степени имела индикаторной диаграммой отрезок мнимой оси и могла быть представлена в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \psi(\lambda)\, e^{\lambda z} d\lambda, \tag{1}$$

где Γ — граница сопряженной диаграммы, а $\psi(\lambda) \in L_2(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Для целых функций конечной степени, индикаторной диаграммой которых является многоугольник, аналогичная теорема была доказана Б. Я. Левиным. При этом оказалось, что для представления такой функции в виде (1), где $\psi(\lambda) \in L_2(\Gamma)$, достаточным условием является принадлежность к $L_2(0, \infty)$ функций

$$f_j(x) = f(xe^{i\theta_j}) \cdot e^{-h(\theta_j)\, x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где лучи $\arg z = \theta_j$ параллельны нормалям к сторонам индикаторной диаграммы, а $h(\theta)$ — индикатор роста.

Мы покажем далее, что это условие является также необходимым и для представления функции $f(z)$ в виде (1) в случае, когда индикаторная диаграмма — многоугольник.

Естественна попытка обобщить теорему Б. Я. Левина на целые функции с произвольной индикаторной диаграммой.

М. К. Лихт [2] показал, что дальнейшее обобщение в этом направлении теоремы Винера — Палея на целые функции конечной степени требует существенного пересмотра условия (2). Это замечание вытекает из следующей его теоремы [2].

Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени, у которой индикаторная диаграмма есть круг. Для того, чтобы $f(z)$ допускала представление в виде (1), где $\psi(\lambda) \in L_2(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-2h(\theta)\, x}\, |f(xe^{i\theta})|^2\, dx < \infty. \tag{3}$$

В этой статье мы занимаемся построением некоторых аналогов теоремы Винера—Палея для целых функций с произвольными индикаторными диаграммами. В п. 1 мы усиливаем теорему М. К. Лихта и получаем для

* Автор выражает глубокую благодарность Б. Я. Левину за предложенную тему, внимание и помощь в работе.

целых функций конечной степени с круговой индикаторной диаграммы равенство Парсеваля, заменяя вес $\sqrt{r}$ в этой теореме другим весом.

В п. 2 мы находим необходимое условие для того, чтобы ассоциированная с данной целой функцией функция $\psi(\lambda)$ принадлежала E_2 во внешности сопряженной диаграммы.

Наконец, в п. 3, вводя интеграл со специальным весом по внешности сопряженной диаграммы, мы вводим скалярные произведения в пространстве целых функций конечной степени с данной индикаторной диаграммой и пространстве ассоциированных функций так, что преобразование Лапласа становится изометрическим оператором.

1. Мы докажем сейчас теорему, являющуюся некоторым усилением теоремы М. К. Лихта.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени, индикаторная диаграмма которой есть круг, и пусть граница сопряженной диаграммы Γ — окружность $|\lambda| = R \neq 0$. Для того, чтобы $f(z)$ представлялась в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \omega(\lambda) \cdot e^{\lambda z} d\lambda, \tag{4}$$

где $\omega(Re^{i\theta}) \in L_2(0,2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2Rr}\rho(Rr)\, dr d\theta < \infty, \tag{5}$$

где

$$\rho(r) = 2r\int_0^{\infty} \frac{e^{-2tr}}{\sqrt{2t+t^2}}\, dt. \tag{6}$$

Если $\psi(\lambda)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $f(z)$, то для принадлежности $\psi(\lambda)$ классу E_2 во внешности Γ необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл (5) причем, если $\psi(\lambda) \in L_2(\Gamma)$, то имеет место равенство (4) при $\omega(\lambda) = \psi(\lambda)$ и

$$\int_{\Gamma} |\psi(\lambda)|^2 |d\lambda| = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2Rr}\rho(Rr)\, dr d\theta. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть целая функция конечной степени

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \tag{8}$$

Тогда для функции $\psi(\lambda)$, ассоциированной по Борелю с функцией $f(z)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\lambda)|^2 |d\lambda(\theta)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{R^{2n+1}}. \tag{9}$$

Используя легко проверяемое равенство

$$\frac{1}{(n!)^2} \cdot \int_0^{\infty} r^{2n}\rho(r) e^{-2r} dr = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

имеем для $f(z)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \rho(Rr)\, dr \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2Rr}\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{R^{2n+1}}. \tag{11}$$

В равенствах (9) и (11) сходимость в одной части равенства влечет сходимость в другой. Получаем, что для принадлежности $\psi(\lambda) \in E_2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2Rr}\rho(Rr)\,dr d\theta < \infty, \tag{12}$$

при этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2Rr}\rho(Rr)\,dr d\theta = \int_\Gamma |\psi(\lambda)|^2 \cdot |d\lambda| \tag{13}$$

Заметим, что вообще, если целая функция конечной степени допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \omega(\lambda)\cdot e^{\lambda z} d\lambda, \quad \omega(\lambda) \in L_2(\Gamma),$$

то, как это следует из равенства Парсеваля,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n,$$

где

$$\omega(Re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{a_{n-1}}{R^n} e^{-in\theta}.$$

Отсюда и из (13) получается неравенство

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2Rr}\rho(Rr)\,dr d\theta \leqslant \int_\Gamma |\omega(\lambda)|^2 \cdot |d\lambda|.$$

Знак равенства достигается только при $a_n = 0$ $(n < 0)$, т. е. при $\omega(\lambda) = \psi(\lambda)$.

Теорема доказана.

Заметим, что $\rho(r) \sim \sqrt{r}$, когда $r \to \infty$, и поэтому условия (3) и (5) эквивалентны. Отметим также, что доказательство нашей теоремы 1 несущественно отличается от доказательства теоремы М. К. Лихта. Мы только использовали равенство (10) вместо используемого М. К. Лихтом равенства

$$\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty \sqrt{r}\, r^{2n} e^{-2r} dr = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{3/2}} \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{1}{16m^2}\right).$$

2. Естественно теперь поставить вопрос об условиях, которым должна удовлетворять целая функция экспоненциального типа для того, чтобы ассоциированная с нею по Борелю функция принадлежала E_2 в области, внешней для сопряженной диаграммы. Нам удалось найти необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $f(z)$ с произвольной индикаторной диаграммой для того, чтобы $\psi(\lambda) \in E_2(\Gamma)$, что вместе с теоремой Б. Я. Левина ([1], стр. 502—504) позволяет дать необходимое и достаточное условие в том случае, когда индикаторная диаграмма многоугольник.

Для дальнейшего нам понадобится один факт о конформном отображении внешности замкнутой выпуклой кривой Г на единичный круг, представляющий, по нашему мнению, и независимый интерес. Пусть Г — произвольная выпуклая кривая в плоскости комплексного переменного ζ. Не теряя общности, можем считать, что начало координат лежит внутри Г. Условимся считать направление на Г положительным, если при движении по Г точки в этом направлении ее радиус-вектор вращается против часовой стрелки, и условимся считать направление на любой прямой, не проходящей через начало координат, положительным, если при движении по прямой точки в этом направлении ее радиус-вектор вращается против часовой стрелки. Будем считать, что точка ζ_1 лежит правее точки ζ_0, если при движении точки ζ от ζ_0 к ζ_1 по меньшей из дуг $\zeta_0\zeta_1$ она движется в положительном направлении. Хорошо известно, что для всех точек ζ кривой Г существует прямая, являющаяся предельным положением секущих, проходящих через точки ζ и ζ_0, когда ζ стремится к ζ_0, оставаясь справа от ζ_0. Эту прямую мы назовем правой касательной. Аналогично определяется и левая касательная. Хорошо известно также, что для всех точек кривой Г, кроме, быть может, счетного множества, правая и левая касательные совпадают.

Лемма 1. *Пусть* Г *— произвольная выпуклая кривая в плоскости комплексного переменного* ζ, $\overset{\circ}{\Gamma}$ *— внешность* Г, $\varphi(\zeta)$ *— функция, конформно отображающая внешность* Г *на внутренность единичного круга* $|w| \leqslant 1$, $\varphi(\infty) = 0$, $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \zeta\varphi(\zeta) > 0$, *а* $\chi(w)$ *— функция, дающая обратное отображение. Пусть* $\theta^+(\zeta)$ *и* $\theta^-(\zeta)$ *— углы, образованные положительными направлениями правой и левой касательных в точке* ζ *к кривой* Г; $\theta(\zeta)$ *— их общее значение, если* ζ *— неугловая точка кривой* Г. *Тогда у любой точки* ζ_0 *кривой* Г *для любого наперед заданного* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* V_{ζ_0}, *что для всех* $\zeta \in V_{\zeta_0} \cap \overset{\circ}{\Gamma}$, *выполняется неравенство*

$$\left|\arg\varphi'(\zeta) - \arg\varphi(\zeta_0) - \frac{\tau_1(\zeta)}{\pi}\theta^-(\zeta_0) - \frac{\tau_2(\zeta)}{\pi}\theta^+(\zeta_0)\right| < \varepsilon, \tag{14}$$

где $\tau_1(\zeta)$ *и* $\tau_2(\zeta)$ *— углы, образованные отрезком* $\zeta\zeta_0$ *с положительным направлением правой и с отрицательным направлением левой касательных к* Г *в точке* ζ_0 *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\zeta = h(s)$ — какая-либо непрерывная параметризация кривой Г $(0 \leqslant s \leqslant 1,\ h(0) = h(1),\ \zeta = h(0)$ — неугловая точка кривой Г). Пусть $\theta_\sigma(h(s))$ — функция скачков монотонно возрастающей функции $\theta(h(s))$, выбранная так, что $\theta_\sigma(h(0)) = 0$. Определим на Г функцию $\omega(\zeta)$

$$\omega(h(s)) = -\theta_\sigma(h(s)) + s\theta_\sigma(h(1)).$$

Функция $\omega(h(s))$ периодична на $[0, 1]$, ограниченной вариации, и ее скачок в точке s равен $\theta^+(h(s)) - \theta^-(h(s))$. Поэтому функция $\omega(\zeta)$ однозначно определена на Г, ограниченной вариации на Г, имеет разрывы только в угловых точках Г.

С помощью конформного отображения внешности Г на единичный круг можно построить функцию $u(\zeta)$, гармоническую, ограниченную во внешности Г и имеющую при стремлении ζ к любой точке ζ_0 непрерывности функции $\omega(\zeta)$ (а, значит, к любой неугловой точке ζ_0 кривой Г) предел

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} u(\zeta) = \omega(\zeta_0). \tag{15}$$

Изучим поведение функции $u(\zeta)$, когда ζ стремится к угловой точке ζ_0 кривой Г. Рассмотрим на Г функцию $\omega_{\zeta_0}(\zeta)$:

$$\omega_{\zeta_0}(\zeta)=\begin{cases}\omega(h(s_0-0)), & s_0-\frac{1}{2}\leqslant s<s_0 \pmod 1\\ \omega(h(s_0+0)) & s_0\leqslant s<s_0+\frac{1}{2} \pmod 1\end{cases}$$

построим по ней функцию u_{ζ_0} u_{ζ_0}, гармоническую и ограниченную вне Γ и имеющую на Γ предельные значения в тех точках ζ, где $u_{\zeta_0}(\zeta)$ непрерывна. Так как функция $\omega(\zeta)-\omega_{\zeta_0}(\zeta)$ непрерывна при $\zeta=\zeta_0$ и равна нулю, то

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}[u(\zeta)-u_{\zeta_0}(\zeta)]=0,$$

и вопрос о поведении функции $u(\zeta)$, когда $\zeta\to\zeta_0$, свелся к вопросу о поведении функции $u_{\zeta_0}(\zeta)$, когда $\zeta\to\zeta_0$.

Рассмотрим кривые Γ_δ^+ и Γ_δ^-, полученные из кривой Γ следующим образом: пусть точки ζ_1 и ζ_2 лежат справа и слева от точки ζ_0 и так близки к точке ζ_0, что углы, образованные хордами $\zeta_1\zeta_0$ и $\zeta_2\zeta_0$ соответственно с правой и левой касательными к Γ в точке ζ_0 меньше δ и что точка $h\left(s_0+\frac{1}{2}\right)$ лежит вне дуги $\zeta_1\zeta_0\zeta_2$. Пусть ζ_1' (ζ_2') — основание перпендикуляра, опущенного из точки ζ_1 (ζ_2) на правую (левую) касательную. Кривая Γ_δ^- (Γ_δ^+) образована отрезком $\zeta_0\zeta_1$ ($\zeta_0\zeta_2$) хорды, той из дуг $\zeta_1\zeta_2$, которая не содержит точки ζ_0, отрезком перпендикуляра $\zeta_2\zeta_2'$ ($\zeta_1\zeta_1'$) и отрезком левой касательной $\zeta_2'\zeta_0$ (отрезком правой касательной $\zeta_1'\zeta_0$). Определим на Γ_δ^- функцию $\omega_\delta^-(\zeta)$

$$\omega_\delta^-(\zeta)=\begin{cases}\omega_{\zeta_0}(\zeta), & \zeta\in\zeta_1\zeta_2\\ \omega(h(s_0-0)), & \zeta\in\zeta_2\zeta_2'\cup\zeta_2'\zeta_0\\ \omega(h(s_0+0)), & \zeta\in\zeta_0\zeta_1\end{cases}$$

и построим функцию $u_\delta^-(\zeta)$, гармоническую и ограниченную вне Γ_δ^- и имеющую на Γ_δ^- предельные значения, равные $\omega_\delta^-(\zeta)$ во всех точках непрерывности функции $\omega_\delta^-(\zeta)$. Аналогично определим на Γ_δ^+ функцию $\omega_\delta^+(\zeta)$ и по ней построим функцию $u_\delta^+(\zeta)$. Пусть b — луч, исходящий из точки ζ_0 и не пересекающийся с внутренностями кривых Γ_δ^+ и Γ_δ^-.

В силу принципа Карлемана расширения области (см. [6], стр. 70)

$$u_\delta^-(\zeta)\leqslant u_{\zeta_0}(\zeta)\leqslant u_\delta^+(\zeta)\qquad(\zeta\in b)$$

Но равномерно по всем лучам b, исходящим из точки ζ_0,

$$\lim_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in b}}u_\delta^-(\zeta)=\frac{\tau_1(b)}{\pi}\,\omega(h(s_0-0))+\frac{\tau_{2,\delta}(b)}{\pi}\,\omega(h(s_0+0)),$$

$$\lim_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in b}}u_\delta^+(\zeta)=\frac{\tau_{1,\delta}(b)}{\pi}\,\omega(h(s_0-0))+\frac{\tau_2(b)}{\pi}\,\omega(h(s_0+0)),$$

где $\tau_1(b)$ и $\tau_2(b)$ — те же, что и в формулировке леммы, $\tau_{1,\delta}(b)$ — угол между b и хордой $\zeta_1\zeta_0$, $\tau_{2,\delta}(b)$ — угол между b и хордой $\zeta_2\zeta_0$. Напомним, что согласно выбору точек ζ_1 и ζ_2, выполняются неравенства $|\tau_{1,\delta}(b)-\tau_1(b)|<\delta$, $|\tau_{2,\delta}(b)-\tau_2(b)|<\delta$, поэтому, когда ζ принадлежит некоторой окрестности V'_{ζ_0} точки ζ_0,

$$-\varepsilon+\frac{\tau_1(\zeta)-\delta}{\pi}\,\omega(h(s_0-0))+\frac{\tau_2(\zeta)}{\pi}\,\omega(h(s_0+0))\leqslant u(\zeta)\leqslant\frac{\tau_1(\zeta)}{\pi}\,\omega(h(s_0+0))+$$
$$+\frac{\tau_2(\zeta)+\delta}{\pi}\,\omega(h(s_0+0))+\varepsilon.$$

Так как δ произвольно, то для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует окрестность V''_{ζ_0} точки ζ_0 такая, что

$$\left| u_{\zeta_0}(\zeta) - \frac{\tau_1(\zeta)}{\pi}\omega(h(s_0-0)) - \frac{\tau_2(\zeta)}{\pi}\omega(h(s_0+0)) \right| < \varepsilon \tag{16}$$

для всех $\zeta \in V''_{\zeta_0} \cap \overset{\circ}{\Gamma}$.

Из (15) и (16) следует, что существует окрестность V_{ζ_0} такая, что для всех $\zeta \in V_{\zeta_0} \cap \overset{\circ}{\Gamma}$

$$\left| u(\zeta) - \frac{\tau_1(\zeta)}{\pi}\omega(h(s_0-0)) - \frac{\tau_2(\zeta)}{\pi}\omega(h(s_0+0)) \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

Заметим теперь, что функция $\arg \varphi'(\zeta) + 2\arg\zeta$ гармоническая и однозначная во внешности Γ. Кроме того, известно (см. [3, стр. 252—253]), что функция $|\arg\varphi'(\zeta)|$ ограничена во внешности Γ. Известно также ([3], стр. 181), что при конформном отображении друг на друга односвязных областей, ограниченных спрямляемыми кривыми, углы с вершинами в граничных точках сохраняются, за исключением, быть может, множества вершин меры нуль. Используя этот факт и воспользовавшись геометрическим смыслом производной отображающей функции, получим, что почти всюду на Γ имеет место равенство

$$\arg\varphi'(\zeta) = \arg\varphi(\zeta) - \theta(\zeta) - \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Функция

$$\Phi(\zeta) = \arg\varphi'(\zeta) + u(\zeta) + 2\arg\zeta \tag{19}$$

гармоническая, однозначная и ограниченная во внешности Γ, и ее предельные значения почти всюду на Γ совпадают с функцией

$$\Omega(\zeta) = \arg\varphi(\zeta) + 2\arg\zeta - [\theta(\zeta) - u(\zeta)] - \frac{\pi}{2}.$$

Так как ограниченная гармоническая функция $\Phi(\chi(w))$ восстанавливается в единичном круге $|w| < 1$ интегралом Пуассона по своим граничным значениям, а при отображении $\varphi(\zeta)$ множество меры нуль на Γ переходит в множество меры нуль на $|w| = 1$, то функция $\Phi(\chi(w))$ является интегралом Пуассона от непрерывной функции $\Omega(\chi(w))$, значит $\Phi(\chi(w))$ непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$, и поэтому функция $\Phi(\zeta)$ непрерывна в замыкании внешности Γ. Из непрерывности функции $\Phi(\zeta)$, (17), (18) и (19) и вытекает утверждение леммы 1.

Мы используем лемму 1 для доказательства следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть Γ — произвольная выпуклая кривая, b — произвольная опорная прямая к ней, $\psi(\zeta)$ — функция, принадлежащая классу E_2 во внешности Γ. Тогда существует константа C_Γ, не зависящая от прямой b, а зависящая только от кривой Γ, такая, что*

$$\int_b |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \leqslant C_\Gamma \cdot \int_\Gamma |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta|. \tag{20}$$

Доказательство*. Пусть $\varphi(\zeta)$ и $\chi(w)$ те же, что и в лемме 1. Очевидно,

$$\int_\Gamma |\psi(\zeta)|^2 |d\zeta| = \int_{|w|=1} |\psi(\chi(w))|^2 \cdot |\chi'(w)| \cdot |dw| =$$

* Отметим, что для случая, когда Γ многоугольник, неравенство типа (20), но с константой, зависящей от b, было получено В. Д. Головиным в его неопубликованной дипломной работе.

$$= \int_{|w|=1} |\psi(\chi(w)) \cdot [\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}|^2 \cdot |dw| \tag{21}$$

$$\int_b |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| = \int_{b'} |\psi(\chi(w))|^2 \cdot |\chi'(w)| \cdot |dw| =$$

$$= \int_{b'} |\psi(\chi(w)) \cdot [\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}|^2 \cdot |dw| \,^* \tag{22}$$

Так как $\psi(\zeta) \in E_2(\Gamma)$, то функция $\psi(\chi(w))[\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}$ принадлежит классу H_2 в круге $|w| < 1$, а (21) и (22) показывают, что для получения оценки достаточно уметь оценивать интеграл от квадрата модуля произвольной функции из H_2 по кривой через интеграл от квадрата модуля по окружности.

Первые оценки такого рода были получены в работах [7] и [8]; необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять кривая b', чтобы существовала константа A такая, что для любой функции $F(w)$, принадлежащей классу H_2 в круге $|w| < 1$, имело место неравенство

$$\int_{b'} |F(w)|^2 \cdot |dw| \leqslant A \cdot \int_{|w|=1} |F(w)|^2 \cdot |dw|,$$

было дано Карлесоном в работе [4]. Карлесон доказал там гораздо более общую теорему:

для того, чтобы существовала константа A, такая, что любая функция $F(w)$ класса H_2 в круге $|w| < 1$ удовлетворяет неравенству:

$$\int_{|w| \leqslant 1} |F(w)|^2 d\mu(w) \leqslant A \cdot \int_{|w|=1} |F(w)|^2 \cdot |dw|,$$

где $\mu(w)$ — мера, заданная на борелевских множествах внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа C, такая, что мера μ удовлетворяет условию

$$\mu(S_{l,\theta}) \leqslant C \cdot l \tag{23}$$

для всех множеств $S_{l,\theta}$ вида

$$S_{l,\theta} = \{z : 1 - |z| \leqslant l, \quad |\theta - \arg z| < 2\pi l\}.$$

При этом оказывается, что существует такая абсолютная (не зависящая от μ) константа B, что можно выбрать $A < C \cdot B$, где C та же, что и в (23).

Выберем теперь некоторое $\varepsilon < \frac{\pi}{16}$, и для каждой точки ζ кривой Γ берем окрестность V_ζ, фигурировавшую в лемме 1. Совокупность всех окрестностей V_ζ, где ζ пробегает все точки Γ, покрывает Γ, и по лемме Гейне — Бореля существует конечное покрытие кривой Γ окрестностями V_{ζ_k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $O = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\zeta_k}$. Опишем теперь вокруг Γ выпуклый многоугольник Γ' с конечным числом сторон, $\Gamma' \subset O$, причем в Γ' включим некоторые отрезки правых и левых касательных к Γ в точках, соответствующих скачкам функции $\theta(\zeta)$, большим, чем $\frac{\pi}{16}$, и стороны Γ' выберем такими маленькими, что колебание функции $\frac{\tau_1(\zeta)}{\pi}\theta^-(\zeta_k) + \frac{\tau_2(\zeta)}{\pi}\theta^+(\zeta_k)$ будет меньше $\frac{\pi}{8}$ в той части окрестности V_{ζ_k}, которая расположена между Γ и Γ', и что часть любой опорной прямой к Γ, лежащая между Γ и Γ', попадает целиком в некоторую V_{ζ_k}.

* Здесь b' — образ прямой b.

Пусть теперь b — произвольная опорная прямая к Г. На части прямой b, попавшей между Г и Г′, в силу построения кривой Г′, колебание функции $\varphi'(\zeta)$ не будет превосходить $\frac{\varepsilon}{4}$ и, следовательно, колеба угла касательной к образу b_1' при отображении $\varphi(\zeta)$ отрезка b_1 опор прямой b тоже не будет превосходить $\frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому, если определить в ге меру μ_b, положив ее на каждом открытом множестве равной той части b_1, которая попала в это множество, то мера μ_b будет удо ять неравенству (23) с некоторой константой C, не зависящей от b. сформулированной выше теоремы Карлесона следует, что

$$\int_{b'} |\psi(\chi(w))[\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}|^2 \cdot |dw| = \int_{|w|\leqslant 1} |\psi(\chi(w))[\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}|^2 d\mu(w) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot \int_{|w|=1} |\psi(\chi(w)[\chi'(w)]^{\frac{1}{2}}|^2 \cdot |dw|$$

и

$$\int_{b_1} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \leqslant C_1 \cdot \int_{\Gamma} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta|,$$

где C_1 — некоторая константа, не зависящая от b. Из леммы 1 след что при отображении $w = \varphi(\zeta)$ многоугольник переходит в кусочно-глад кривую в круге $|w| \leqslant 1$; если по этой кривой определить меру, как вы то эта мера будет удовлетворять условию (23), и, как и выше, заклю

$$\int_{\Gamma'} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \leqslant C_2 \cdot \int_{\Gamma} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta|.$$

Если теперь рассматривать функцию $\psi(\zeta)$ как функцию, принадлежа классу E_2 во внешности Г′, то, рассуждая, как и выше, получим

$$\int_{\gamma} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \leqslant C_3 \cdot \int_{\Gamma'} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta|,$$

где γ — любой луч, лежащий вне Г′. Однако в (26) константу C_3 мо выбрать уже не зависящей от луча γ, так как из элементарных сво конформного отображения внешности многоугольника на единичный к легко следует, что соответствующая γ мера $\mu_\gamma(w)$ удовлетворяет усло (23) с константой не зависящей от γ. Лемма 2 теперь следует из ((25) и (26).

Лемма 2 будет использована нами при доказательстве следую теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $\psi(\zeta)$, ассоциированная по релю с целой функцией $f(z)$ конечной степени с индикатором $h(\theta)$, при лежала классу E_2 во внешности границы Г сопряженной диаграм необходимо, чтобы существовала константа C_Γ, зависящая только от такая, что*

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r}\, dr \leqslant C_\Gamma \cdot \int_{\Gamma} |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

Доказательство. По теореме Полиа (см., например, [1], стр. 1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi(\zeta)\, e^{\zeta z}\, d\zeta,$$

где C — любой контур, охватывающий границу Г сопряженной диаграм

Пусть $z = re^{i\theta}$. Обозначим через b_θ опорную прямую к Γ, направление внешней нормали к которой образует с положительным направлением оси абсцисс угол $-\theta$. Выберем контур C, состоящий из полуокружности C_R радиуса R лежащей в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta e^{i\theta} > 0$, с центром в одной из точек опоры прямой b_θ, части γ_λ образа окружности $|w| = \lambda$, лежащей в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta e^{i\theta} > 0$ и части прямой b_θ, заключающейся между γ_λ и C_R. Так как $\psi(\infty) = 0$, то по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta = 0. \tag{28}$$

Кроме того, так как при $\lambda \to 1$ дуга Γ_λ стремится к дуге $\gamma_1 = \Gamma \cap b_\theta$, то (см. [3])

$$\lim_{\lambda\to 1} \int_{\gamma_\lambda} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta = \int_{\gamma_1} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta. \tag{29}$$

Вследствие (28) и (29)

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_\theta} \psi(\zeta) \cdot \exp(\zeta \, \mathrm{Re}^{i\theta}) \, d\zeta.$$

Так как $h(-\theta)$ — опорная функция Γ, то

$$f(re^{i\theta}) e^{-h(\theta) r} = \frac{e^{i\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(e^{i\theta} h(\theta) + ie^{i\theta} y) e^{iry} dy \quad (r > 0). \tag{30}$$

Так как функция $\psi(\zeta)$ голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta e^{i\theta} > 0$ и класса H_2 в ней, то интеграл в правой части (30) обращается в нуль при $r < 0$. В силу равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta) r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(e^{i\theta} h(\theta) + ie^{i\theta} y)|^2 \cdot |dy|.$$

Применяя лемму 2, получим, что существует константа C_Γ, такая, что

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta) r} dr \leqslant C_\Gamma \cdot \int_\Gamma |\psi(\zeta)|^2 \cdot |d\zeta| \tag{31}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, в частности, что условие принадлежности $L_2(0, \infty)$ функций $f_j(x)$ (см. (2)) является также и необходимым для представления целой функции конечной степени в виде (1).

Как уже отмечалось, из теоремы 1 следует, что если индикаторная диаграмма функции $f(z)$ не многоугольник, то из ограниченности интегралов

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2h(\theta) r} dr$$

не вытекает, вообще говоря, принадлежность функций $\psi(\zeta)$ классу E_2 во внешности Γ, т. е. необходимое для принадлежности $\psi(\zeta)$ к E_2 условие (31) теоремы 2 не является достаточным. Представляется интересным нахождение необходимых и достаточных условий на функцию $f(z)$, при выполнении которых функция $\psi(\zeta)$ принадлежит E_2. Автору такие условия не известны.

3. В теореме 2 было показано, что оператор (27), действующи
гильбертова пространства функций, равных нулю на бесконечности и п
надлежащих классу E_2 во внешности Г, со скалярным произведение

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\Gamma} \psi_1(\zeta)\,\overline{\psi_2(\zeta)}\,|d\zeta|$$

в банахово пространство целых функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{\theta} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r}\,dr,$$

является ограниченным оператором.

Вводя другие пространства функций, мы можем сделать операт
задаваемый (27), унитарным. Квадрат нормы функции $\psi(\zeta)$ будет выч
ляться интегралом по площади с некоторым весом. Введем этот вес. Пу
ζ — точка во внешности кривой Г, а $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$ — точки опоры опорн
прямых к Г, проведенных через ζ. Функция

$$\rho_{\Gamma}(\zeta) = \frac{1}{|\zeta - a_1(\zeta)| + |\zeta - a_2(\zeta)|} \qquad (3$$

определена для всех ζ, кроме точек, лежащих на опорных прямых, им
ющих опорный отрезок на Г. Таких прямых не более, чем счетное мн
жество. Введем гильбертово пространство H_{Γ} — функций, голоморфн
вне Г, исчезающих на бесконечности, с интегрируемым квадратом по пл
щади с весом $\rho_{\Gamma}(\zeta)$. Скалярное произведение в H_{Γ} задается формул

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathring{\Gamma}} \psi_1(\zeta)\,\overline{\psi_2(\zeta)}\,d\sigma(\zeta),$$

где $\mathring{\Gamma}$ — внешность Г, а $d\sigma(\zeta)$ — элемент эвклидовой площади.

Кроме того, введем гильбертово пространство $H_{h(\theta)}$ целых функци
конечной степени, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r}\,dr\,d\theta < \infty,$$

где $h(\theta)$ — тригонометрически выпуклая функция. Скалярное произведени
в $H_{h(\theta)}$ задается формулой

$$(f, g) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\overline{g(re^{i\theta})} \cdot e^{-2h(\theta)r}\,dr\,d\theta.$$

Если целая функция конечной степени входит в пространство $H_{h(\theta)}$, то е
индикатор $h_f(\theta)$ удовлетворяет условию $h_f(\theta) \leqslant h(\theta)$. В самом деле, пре
положим, что это не так. Тогда существуют такие θ_1, θ_2 и $\varepsilon > 0$, чт
$h_f(\theta) > h(\theta) + \varepsilon$.

Из теоремы В. Бернштейна ([1], стр. 99) вытекает, что на некотором
множестве значений r положительной относительной меры будет выпол-
няться неравенство

$$|f(re^{i\theta})| > \exp\left(h_f(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} r\right) > \exp\left(h(\theta) + \frac{\varepsilon}{2} r\right),$$

поэтому

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r}\,dr = \infty \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$$

и

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2h(\theta)r}\, dr\, d\theta = \infty.$$

Будем рассматривать оператор (27) как действующий из пространства H_Γ в пространство $H_{h(\theta)}$, где $h(-\theta)$ — опорная функция кривой Γ. Имеет место

Теорема 3. *Оператор (27), действующий в пространстве H_Γ в пространство $H_{h(\theta)}$, где $h(-\theta)$ — опорная функция кривой Γ, изометрично отображает все пространство H_Γ на все пространство $H_{h(\theta)}$, т. е. имеет место равенство*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2h(\theta)r}\, dr\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathring{\Gamma}} |\psi(\zeta)|^2 \rho_\Gamma(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть целая функция $f(z)$ конечной степени принадлежит $H_{h(\theta)}$. Тогда, как было показано выше, ассоциированная с нею по Борелю функция $\psi(\zeta)$ задана вне Γ, и есть смысл говорить об интеграле в правой части (33).

Как уже было отмечено выше, имеет место равенство

$$\frac{e^{i\theta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(e^{i\theta}h(\theta) + ite^{i\theta})\, e^{itr}dt = \begin{cases} f(re^{i\theta}) \cdot e^{-h(\theta)r}, & (r > 0) \\ 0, & (r < 0) \end{cases}$$

и согласно равенству Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 \cdot e^{-2h(\theta)r}\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(e^{i\theta}h(\theta) + ie^{i\theta}y|^2\, dy.$$

Интегрируя это равенство по θ от 0 до 2π, получаем

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(e^{i\theta}h(\theta) + ie^{i\theta}y|^2\, d\theta dy. \tag{34}$$

Остается лишь перейти в правой части (34) к интегралу по внешности Γ. Якобиан преобразования от переменных (t, θ) к переменным (x, y) легко вычисляется в случае, когда Γ — многоугольник Γ_n. Он равен

$$\rho_{\Gamma_n}(\zeta) = \frac{1}{|\zeta - a_1^{(n)}(\zeta)| + |\zeta - a_2^{(n)}(\zeta)|},$$

где $a_i^{(n)}(\zeta)$ те же, что и в (32). $\rho_{\Gamma_n}(\zeta)$ — кусочно-непрерывная функция. Аппроксимируем теперь произвольный контур Γ многоугольниками Γ_n. Согласно классической формуле замены переменных под знаком двойного интеграла

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \chi_K(e^{i\theta}h_n(\theta) + ite^{i\theta})\, dtd\theta = \iint_K \rho_{\Gamma_n}(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \tag{35}$$

где K — произвольный квадрат во внешности Γ, а χ_K — его характеристическая функция. Так как $\Gamma_n \to \Gamma$, то $h_n(\theta) \to h(\theta)$, равномерно относительно θ. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \chi_K(e^{i\theta}h_n(\theta) + ite^{i\theta})\, dtd\theta = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \chi_K(e^{i\theta}h(\theta) + ite^{i\theta})\, dtd\theta. \tag{36}$$

Так как $\rho_{\Gamma_n}(\zeta) \to \rho_\Gamma(\zeta)$ почти всюду, и $\rho_{\Gamma_n}(\zeta)$ ограничены на K одной и той же константой, то

$$\lim_{n\to\infty} \iint_K \rho_{\Gamma_n}(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \iint_K \rho_n(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \qquad (37)$$

Из (35), (36) и (37) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \chi_K(e^{i\theta}h(\theta) + ite^{i\theta})\, dtd\theta = \iint_K \rho_\Gamma(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \qquad (38)$$

Из (38) следует, что для любого измеримого множества E, лежащего во внешности Γ, выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \chi_E(e^{i\theta}h(\theta) + ite^{i\theta})\, dtd\theta = \iint_E \rho_\Gamma(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \qquad (39)$$

Из стандартных теорем теории интеграла Лебега (см., напр., [5], стр. 240) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} |\psi(e^{i\theta}h(\theta) + ite^{i\theta})|^2\, dtd\theta = \int_{\mathring{\Gamma}} |\psi(\zeta)|^2 \rho_\Gamma(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \qquad (40)$$

Равенство (40) совместно с (34) и дает теорему 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
2. М. К. Лихт. Замечание к теореме Палея и Винера о целых функциях конечной степени. «Усп. матем. наук», XIX, вып. 1 (115), 1964.
3. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. Гостехиздат, М., 1950.
4. L. Carleson. Interpolation by bounded analytic function and the Corona problem. Ann. of Math., Vol. 76, № 3 (1962), стр. 547—559.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. V. Физматгиз, М., 1959.
6. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, М. — Л., 1941.
7. Gabriel R. M. An inequality concerning the integrals of positive subharmonic functions along certain curves. J. Lond. Math. Soc., 5, 1930.
8. F. Carlson. Quelques inequalites consernant les fonctions analytiques. Arkiv Math., Astron, Fysik, 11, 1943.