# О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Г. Р. Белицкий*

В настоящей статье рассматриваются обобщения на случай функций нескольких переменных теоремы Карлемана [1] о суммируемости ряда Тейлора функции, принадлежащей квазианалитическому классу.

Следуя [2], будем называть некоторый класс функций квазианалитическим (I), если в нем нет отличной от тождественного нуля функции, обращающейся в некоторой точке в нуль вместе со всеми производными.

Пусть $E$ — единичный квадрат в плоскости $R_2$. Пусть, далее, $\{m_{p,q}\}_0^\infty$ — некоторая двойная последовательность неотрицательных чисел. Обозначим через $C(m_{p,q})$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в $E$, для которых

$$\max_{(x,y)\in E}\left|\frac{\partial^{p+q}f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}\right| \leqslant Mr^p s^q m_{p,q},$$

где числа $M$, $r$ и $s$ — свои для каждой функции класса. Условия квазианалитичности (I) класса $C(m_{p,q})$ даны в [2].

Пусть теперь $f(x, y) \in C(m_{p,q})$, где $C(m_{p,q})$ — класс, квазианалитический (I). Имеет место

**Теорема 1.** *Существуют функции* $\mu_{n,p}(x)$, $\nu_{n,q}(y)$ *и числа* $\omega_{n,p,q}$, *зависящие только от класса* $C(m_{p,q})$, *такие, что*

$$f(x, y) = \lim_n \sum_{p,q=0}^{n} \{y^p \int_0^1 \mu_{n,p}(u)\,\varphi_p(ux)\,du +$$

$$+ x^q \int_0^1 \nu_{n,q}(u)\,\psi_q(uy)\,du + \omega_{n,p,q}x^q y^p C_{q,p}\},$$

*где* $c_{q,p} = f_{q,p}(0, 0)$, $\varphi_p(x) = f_{0,p}(x, 0)$, $\psi_q(y) = f_{q,0}(0, y)$.

Доказательство. Положим

$$F(x, y) = \int_0^x\int_0^y f(\xi, \eta)\,d\xi d\eta.$$

Очевидно, $F(x, y) \in C(m_{p-1,q-1})$, где $m_{s,-1} = m_{s,0}$, $m_{-1,t} = m_{0,t}$ и, кроме того,

$$F_{p,0}(0, y) = \int_0^y \psi_{p-1}(\eta)\,d\eta,\quad F_{0,q}(x, 0) = \int_0^x \varphi_{q-1}(\xi)\,d\xi,$$

$$F_{0,0}(0, y) = F_{0,0}(x, 0) = 0.$$

Заметим, что класс $C(m_{p-1,\,q-1})$ квазианалитический (I). Рассмотрим, следуя Карлеману, функционал

$$I_n(f)=\sum_{p,\,q=0}^{n}\gamma_{p,\,q}\int_0^1\int_0^1[f_{p,\,q}(x,\ y)]^2\,dxdy\quad(\gamma_{p,\,q}>0)$$

на множестве $K_n$ функций $f$, имеющих в $E$ производные всех порядков до $n$ включительно и таких, что

$$f_{p,0}(0,\ y)=F_{p,0}(0,\ y),\quad f_{0,\,q}(x,\ 0)=F_{0,\,q}(x,\ 0)\quad(p,\ q=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

Далее, воспользовавшись квазианалитичностью класса $C(m_{p,\,q})$ подберем числа $m^*_{p,\,q}$ таким образом, чтобы

$$\sum_{p,\,q=0}^{\infty}\frac{r^p\rho^q m^2_{p-1,\,q-1}}{m^{*2}_{p-1,\,q-1}}<\infty\qquad(m^*_{s,\,-1}=m^*_{s,\,0},\qquad m^*_{-1,\,t}=m^*_{0,\,t})$$

для любых $r$ и $\rho$ и чтобы класс $C(m^*_{p,\,q})$ был квазианалитическим (I), причем $m^*_{p,\,q}\geqslant m^*_{p-1,\,q-1}$. Положим теперь

$$\gamma_{p,\,q}=\frac{1}{m^*_{p-1,\,q-1}}.$$

Пусть теперь функция $f^{(n)}(x,\ y,)\in K_n$ такова, что

$$I_n(f^{(n)})=\min_{f\in K_k}I_n(f).$$

Так как $F\in K_n$ при любом $n$, то

$$I_n(f^{(n)})\leqslant I_n(F),$$

откуда следует

$$\sum_{p,\,q=0}^{n}\frac{1}{m^{*2}_{p-1,\,q-1}}\int_0^1\int_0^1[f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ y)]^2\,dx\,dy\leqslant\sum_0^{\infty}\frac{Mr^p\rho^q m^2_{p-1,\,q-1}}{m^{*2}_{p-1,\,q-1}}=c<\infty.$$

Из этого неравенства получаем

$$\int_0^1\int_0^1[f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ y)]^2\,dx\,dy\leqslant cm^{*2}_{p-1,\,q-1}.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением

$$f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ y)=\int_0^x\int_0^y f^{(n)}_{p+1,\,q+1}(x,\ y)\,dx\,dy+f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ 0)+f^{(n)}_{p,\,q}(0,\ y)-f^{(n)}_{p,\,q}(0,\ 0)$$

и неравенством Коши-Буняковского, нетрудно получить

$$|f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ y)|\leqslant 4cm^*_{p,\,q}\qquad(p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Эти неравенства означают компактность множества функций $\{f^{(n)}_{p,\,q}\}$ при любых фиксированных $p,\ q$. Нетрудно видеть, что, так как $F(x,\ y)\in C(m^*_{p-1,\,q-1})$, то, в силу квазианалитичности класса $C(m^*_{p-1,\,q-1})$ и определения функции $f^{(n)}(x,\ y)$

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}_{p,\,q}(x,\ y)=F_{p,\,q}(x,\ y)$$

при любых $p$, $q$, причем сходимость равномерная в $E$. В частности,

$$\lim_{n\to\infty} f_{1,1}^{(n)}(x, y) = f(x, y)$$

Перейдем к отысканию функции $f^{(n)}(x, y)$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\delta I_n(f) \equiv \sum_{p,q=0}^{n} \gamma_{p,q} \int_0^1\int_0^1 f_{p,q}(x, y)\,\delta f_{p,q}(x, y)\,dx dy = 0.$$

Заменим в этом уравнении производные порядка $(p, q)$ на производную порядка $(n, n)$ по формулам:

$$f_{p,q}(x, y) = \int_0^x\int_0^y \frac{(x-s)^{n-p-1}(y-t)^{n-q-1}}{(n-p-1)!\,(n-q-1)!} f_{n,n}(s, t)\,ds\,dt +$$

$$+ \sum_{\substack{\mu=p\\ \nu=q}}^{n-1} \left\{\frac{x^{\mu-p}}{(\mu-p)!} F_{\mu,p}(0, y) + \frac{y^{\nu-q}}{(\nu-q)!} F_{q,\nu}(x, 0) - \frac{x^{\mu-p}y^{\nu-q}}{(\mu-p)!\,(\nu-q)!} F_{\mu,\nu}(0, 0)\right\}$$

при $p, q \leqslant n-1$,

$$f_{p,n}(x, y) = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} f_{n,n}(s, y)\,ds + \sum_{\mu=p}^{n-1} F_{\mu,n}(0, y)\frac{x^{\mu-p}}{(\mu-p)!}$$

при $p \leqslant n-1$ и, наконец

$$f_{n,q}(x, y) = \int_0^y \frac{(y-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} f_{n,n}(x, t)\,dt + \sum_{\nu=q}^{n-1} F_{n\nu}(x, 0)\frac{y^{\nu-q}}{(\nu-q)!}$$

при $q \leqslant n-1$.

После соответствующих преобразований придем к уравнению:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 K(x, y, s, t) f_{n,n}(s, t)\,ds\,dt + \int_0^1 K_1(x, s) f_{n,n}(s, y)\,ds +\\ + \int_0^1 K_2(y, t) f_{n,n}(x, t)\,dt + \gamma_{n,n} f_{n,n}(x, y) = \theta(x, y).\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $K$, $K_1$ и $K_2$ — непрерывные кусочно-аналитические функции, зависящие только от класса $C(m_{p,q})$ и не зависящие от выбора $\gamma_{n,n}$. Функция $\theta(x, y)$, стоящая в правой части, представляет собой линейную комбинацию функций $F_{p,q}(x, 0)$, $F_{p,q}(0, y)$ с функциональными коэффициентами, зависящими только от класса $C(m_{p,q})$.

Пусть теперь $\varepsilon_n$ такое, что $\gamma_{n,n} > \varepsilon_n \geqslant 0$ и что число $-\frac{1}{\gamma_{n,n}-\varepsilon_n}$ не является собственным значением интегрального оператора, стоящего в левой части полученного уравнения. Рассмотрим функционал

$$I_n^*(f) = \sum_{p,q=0}^{n} \gamma'_{p,q} \int_0^1\int_0^1 [f_{p,q}(x, y)]^2\,dx\,dy$$

на том же множестве функций $K_n$. Здесь $\gamma'_{p,q} = \gamma_{p,q}$ при $p+q < 2n$ и $\gamma'_{n,n} = \gamma_{n,n} - \varepsilon_n$. К функционалу $I_n^*(f)$ применимы прежние рассуждения, которые приводят к уравнению (1) с тем же интегральным опе[р]тором, но с множителем $\gamma'_{n,n}$, причем $-\frac{1}{\gamma'_{n,n}}$ не является собственны[м] значением оператора. Таким образом, новое уравнение имеет решение, к[о]торое можно представить в виде:

$$f_{n,n}(x, y) = \frac{\theta(x, y)}{\gamma'_{n,n}} + \int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, y, s, t)\,\theta(s, t)\,ds\,dt + \int_0^1 \Gamma_1(x, s)\,\theta(s, y)\,ds + \int_0^1 \Gamma_2(y, t)\,\theta(x, t)\,dt,$$

где резольвенты $\Gamma$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ являются непрерывными кусочно-аналитиче[с]кими функциями, зависящими только от класса $C(m_{p,q})$. Отсюда пол[у]чаем значение для «минимизирующей» функции:

$$f^{(n)}(x, y) = \int_0^x\int_0^y \frac{(x-s)^{n-1}(y-t)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} f_{n,n}(s, t)\,ds\,dt + \theta_1(x, y),$$

где

$$\theta_1(x, y) = \sum_{p,q=0}^{n} \left\{\frac{x^p}{p!} F_{p,0}(0, y) + \frac{y^q}{q!} F_{0,q}(x, 0) - \frac{x^p y^q}{p!q!} F_{p,q}(0, 0)\right\}.$$

Как было показано,

$$f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 f^{(n)}(x, y)}{\partial x\,\partial y}.$$

*Подставляя в это соотношение значения функций* $f_{n,n}(x, y)$, $F_{p,0}(0, y)$ и $F_{0,q}(x, 0)$ через функции $\psi_{p-1}(y)$ и $\varphi_{q-1}(x)$ после соответствующи[х] преобразований получим:

$$f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p,q=0}^{n} \left\{\int_0^x \alpha_{n,p}(x, y, s)\,\varphi_p(s)\,ds + \int_0^y \beta_{n,q}(x, y, s)\,\psi_q(s)\,ds + \gamma_{n,p,q}(x, y)\,f_{p,q}(0, 0)\right\},$$

где функции $\alpha_{n,p}$, $\beta_{n,q}$ и $\gamma_{n,p,q}$ зависят только от класса $C(m_{p,q})$. Рассмотрим теперь функцию

$$g(\xi, \eta) = f(x\xi, y\eta) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1).$$

Очевидно, $g(\xi, \eta) \in C(m_{p,q})$ и по доказанному,

$$g(\xi, \eta) = f(x\xi, y\eta) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p,q=0}^{n} \left\{y^p \int_0^\xi \alpha_{n,p}(\xi, \eta, s)\,\varphi_p(sx)\,ds + x^q \int_0^\eta \beta_{n,q}(\xi, \eta, s)\,\psi_q(s)\,ds + y^p x^q \gamma_{n,p,q}(\xi, \eta)\,f_{p,q}(0, 0)\right\}.$$

Полагая здесь $\xi = \eta = 1$, $\alpha_{n,p}(1, 1, s) = \mu_{n,p}(s)$, $\beta_{n,q}(1, 1, s) = \nu_{n,q}(s)$, $\gamma_{n,p,q}(1, 1) = \omega_{n,p,q}$, получим утверждение теоремы.

Если функция $f(x, y)$ вместе со всеми своими производными принадлежит классу, квазианалитическому (I), то имеет место следующий более точный результат.

**Теорема 2.** *Существуют числа* $\gamma_{n, p, q}$, *зависящие только от класса* $C(m_{p, q})$ *такие, что*

$$f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p, q=0}^{n} \gamma_{n, p, q} c_{p, q} x^p y^q,$$

*причем сходимость равномерная.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем одну простую лемму, относящуюся к квазианалитическим классам функций одной переменной.

Пусть $C(m_p)$ — квазианалитический класс функций одной переменной. Обозначим через $C(r, m_p)$ совокупность всех тех функций $f(x) \in C(m_p)$, для которых

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f^{(p)}(x)| \leqslant r^p m_p,$$

где $r$ фиксировано. Имеет место

***Лемма.*** *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для любой функции* $f(x) \in C(r, m_p)$ *и любого* $n \geqslant N$ *будет*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \omega_{n, k} c_k x^k| < \varepsilon \quad (c_k = f^{(k)}(0)),$$

*где* $\omega_{n, k}$ — *«суммирующие множители» ряда Тейлора функций из класса* $C(m_p)$ (см. [1]).

Это утверждение легко следует из определения класса $C(r, m_p)$.

Переходим к доказательству теоремы 2. Положим

$$L_n[\varphi_1 \ldots \varphi_n, \psi_1 \ldots \psi_n] = \sum_{p, q=0}^{n} \Big[y^q \int_0^1 \mu_{n, q}(u) \varphi_q(ux)\, du +$$
$$+ x^p \int_0^1 \nu_{n, p}(u) \psi_p(uy)\, du + \omega_{n, p, q} c_{p, q}\Big],$$

где $\mu_{n, q}(x)$, $\nu_{n, p}(x)$ и $\omega_{n, p, q}$ — те же, что и в теореме 1. Очевидно,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |L_n| \leqslant c_n \max_{1\leqslant p, q\leqslant n} \max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} [\max(|\varphi_p(x)|, |\psi_q(y)|)],$$

где $c_n$ — константа, зависящая только от класса $C(m_{p, q})$.

Рассмотрим теперь следующую последовательность квазианалитических классов функций одной переменной

$C(n, n^q m_{k, q})_{k=0}^{\infty}$, $C(n, n^p m_{p, k})_{k=0}^{\infty}$ $(q = 0, 1, \ldots, n, p = 0, 1, \ldots, n$
$n = 1, 2, \ldots)$

Пусть это будут классы $C(r_1, m_p^{(1)})$, $C(r_2, m_p^{(2)})$ и так далее. Каждая из функций $\varphi_p(x)$ [соответственно $\psi_q(y)$] будет попадать в классы $C(n, n^p m_{k, p})$ (соответственно $C(n, n^q m_{k, q})$), начиная с некоторого $n$.

Пусть теперь $\varepsilon_k \to 0$. Обозначим через $K_n$ наибольшее из чисел $K \leqslant N$ таких, что

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \omega_{n,\nu}^{(j)} c_\nu x^\nu \right| \leqslant \frac{\varepsilon_k}{C_k}$$

для всех $n \geqslant N$ и всех функций $f(x) \in C(r_j, m_p^{(j)})$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Из леммы следует, что $K_N \to \infty$ вместе с $N$. Положим, далее, $M_N = [\sqrt{K_N}] - 1$ и рассмотрим выражение

$$|L_{M_N}[\varphi_1 \ldots \varphi_{M_N}, \psi_1 \ldots \psi_{M_N}] - L_{M_N}[P_1^{(N)} \ldots P_{M_N}^{(N)}, Q_1^{(N)} \ldots Q_{M_N}^{(N)}]| =$$

$$= |L_{M_N}[\varphi_1 - P_1^{(N)} \ldots \psi_{M_N} - Q_{M_N}^{(N)}]| \leqslant C_{M_N} \cdot \frac{\varepsilon_{M_N}}{C_{M_N}} = \varepsilon_{M_N}. \quad (2)$$

Здесь $P_j^{(N)}$ и $Q_j^{(N)}$ — отрезки «обобщенных» рядов Тейлора функций $\varphi_j$ и $\psi_j$ соответственно (длины $N$).

Далее, так как $M_N \to \infty$, то, в силу теоремы 1,

$$L_{M_N}[\varphi_1 \ldots \varphi_{M_N}, \psi_1 \ldots \psi_{M_N}] \to f(x, y),$$

и из (2) вытекает, что

$$L_{M_N}[P_1^{(N)} \ldots P_{M_N}^{(N)}, Q_1^{(N)} \ldots Q_{M_N}^{(N)}] \to f(x, y).$$

Заметим, что числа $M_N$ не зависят от функции $f(x, y)$ и поэтому, в силу линейности операторов $L_n$, получаем:

$$L_{M_N} = \sum_{p,q=0}^{N} C_{p,q}\omega_{N,p,q}(x, y),$$

где функции $\omega_{N,p,q}(x, y)$ зависят только от классов $C(m_{p,q})$.

Далее, при $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$ имеем:

$$f(\xi x, \eta y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{p,q=0}^{N} C_{p,q}\xi^p \eta^q \omega_{N,p,q}(x, y),$$

откуда

$$f(\xi, \eta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{p,q=0}^{N} \gamma_{N,p,q}\xi^p \eta^q C_{p,q},$$

где $\gamma_{N,p,q} = \omega_{N,p,q}(1, 1)$. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. Carleman. Les fonctions quasi analytiques. Paris, Gauthier — Villars, 1926.
2. В. И. Мацаев, Л. И. Ронкин. Квазианалитические классы функций от нескольких переменных. «Зап. матем. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и ХМО», т. XXVII, серия 4 (1961), 49—57.