О ПРОДОЛЖЕНИИ МАТРИЧНЫХ НОРМ

Г. Р. Белицкий

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — кольцо всех вещественных квадратных матриц n-го порядка. Идеалом в $\mathfrak{M}_n$ называется такое подмножество $I \subset \mathfrak{M}_n$ ($I \neq \mathfrak{M}_n$, $I \neq \{0\}$), что, если $U \in I$, то $AU \in I$ для всех $A \in \mathfrak{M}_n$ (левый идеал), или $UA \in I$ (правый идеал)*. Здесь мы будем рассматривать только левые идеалы; все результаты непосредственно переносятся на правые идеалы.

Функционал $N(A)$, определенный на идеале I, называется функционалом типа нормы матриц, если он обладает свойствами нормы матриц (см. [1]):

a) $N(A) > 0 \quad (A \neq 0)$,

b) $N(\lambda A) = |\lambda| N(A) \quad (A \in I)$,

c) $N(\sum A_i) \leqslant \sum N(A_i) \quad (A_i \in I, \ \sum A_i \in I)$,

d) $N(AB) \leqslant N(A) \cdot N(B) \quad (A, B \in I)$.

Функционал, определенный на $\mathfrak{M}_n$ и обладающий всеми свойствами нормы матриц, за исключением, быть может, кольцевого свойства

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \, \| B \|,$$

называется векторной нормой матриц.

Для всякого функционала $N(A)$ типа нормы матриц, определенного на замкнутом множестве $H \subset \mathfrak{M}_n$, существует векторная норма матриц, продолжающая этот функционал на $\mathfrak{M}_n$ (т. е. совпадающая с ним на H). Для доказательства достаточно, очевидно, продолжить $N(A)$ на линейную оболочку множества H.

Положим

$$\| A \| = \inf \sum |\lambda_i| N(U_i), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем $U_i \in H$ таким, что $A = \sum \lambda_i U_i$. Равенством (1) на линейной оболочке H определена векторная норма матриц, совпадающая с $N(A)$ на H.

Теорема 1. *Для всякого функционала $N(A)$ типа нормы матриц, определенного на замкнутом идеале I, существует норма матриц, продолжающая этот функционал на $\mathfrak{M}_n$.*

Доказательство. Положим

$$\| A \|_1 = \max_{U \in I} \frac{N(AU)}{N(U)}$$

для всех $A \in \mathfrak{M}_n$. Очевидно, $\| A \|_1$ — норма матриц, причем в силу свойства d)

$$\| A \|_1 \leqslant N(A) \, (A \in I). \tag{2}$$

* Таким образом, мы будем рассматривать полугрупповые (а не кольцевые) идеалы.

Пусть, далее $\|A\|^\circ$ — какая-нибудь векторная норма матриц, совпадающая с $N(A)$ на I. Тогда в силу (2) векторная норма матриц

$$\|A\|' = \max(\|A\|^\circ, \|A\|_1)$$

также совпадает с $N(A)$ на I. Положим

$$\|A\| = \max_{U \neq 0} \frac{\|UA\|'}{\|U\|_1}.$$

Непосредственно проверяется, что $\|A\|$ — норма матриц. Покажем, что

$$\|A\| = N(A) \quad (A \in I).$$

Так как для единичной матрицы E

$$\|E\|_1 = 1,$$

то, очевидно,

$$\|A\| \geqslant \|A\|' \geqslant \|A\|^\circ \tag{3}$$

для всех A. Пусть теперь $A \in I$; тогда $UA \in I$ для всех U, поэтому $\|UA\|' = N(UA)$. Далее, из определения нормы $\|A\|_1$ вытекает, что если $U \in I$, то для всех A

$$N(AU) \leqslant \|A\|_1 N(U).$$

Отсюда

$$\|A\| = \max_{U \neq 0} \frac{\|UA\|'}{\|U\|_1} = \max_{U \neq 0} \frac{N(UA)}{\|U\|_1} \leqslant N(A),$$

если $A \in I$. С другой стороны, из (3) следует, что

$$\|A\| \geqslant N(A) \quad (A \in I).$$

Итак, $\|A\| = N(A)$, если $A \in I$. Теорема доказана.

Говорят, что норма матриц $\|A\|$ сохраняет единицу, если $\|E\| = 1$ для единичной матрицы E. Функционал типа нормы матриц, определенный на замкнутом идеале, не обязательно обладает продолжением, сохраняющим единицу. Однако имеет место

Теорема 2. *Пусть функционал $N(A)$ типа нормы матриц определен на подмножестве матриц*

$$\tilde{I} = \bigcup_{\lambda} \{\lambda E\} \bigcup I \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где I — произвольный замкнутый идеал в $\mathfrak{M}_n$. Пусть, кроме того,

$$N(E) = 1.$$

Тогда существует сохраняющая единицу норма матриц, продолжающая функционал $N(A)$ на $\mathfrak{M}_n$.

Доказательство. Пусть, как и прежде,

$$\|A\|_1 = \max_{U \in I} \frac{N(AU)}{N(U)},$$

$\|A\|^\circ$ — векторная норма матриц, совпадающая с $N(A)$ на $\tilde{I}$ и $\|A\| = \max(\|A\|^\circ, \|A\|_1)$. Нетрудно проверить, что норма

$$\|A\| = \max_{U \neq 0} \frac{\|UA\|'}{\|U\|'}$$

удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Следствие 1. *Если I — неполный* замкнутый идеал, то для всякого функционала типа нормы матриц, определенного на I, существует сохраняющая единицу норма матриц, продолжающая этот функционал на $\mathfrak{M}_n$.*

В самом деле, так как I — неполный идеал, то единичную матрицу E нельзя представить в виде

$$E = \sum U_i, \quad U \in I.$$

Поэтому, не нарушая условия c), можно положить $N(\lambda E) = |\lambda|$. Легко видеть, что после этого на $\tilde{I}$ будет определен функционал типа нормы матриц, причем $N(E) = 1$. В силу теоремы 2 существует сохраняющая единицу норма матриц, продолжающая этот функционал на $\mathfrak{M}_n$.

Укажем некоторые дальнейшие следствия. Рассмотрим в множестве норм матриц отношение частичного порядка, определяемое [2] как выполнение неравенства

$$\| A \|_1 \leqslant \| A \|_2 \tag{4}$$

для всех A. При выполнении неравенства (4) будем говорить, что $\| A \|_2$ является мажорантой для $\| A \|_1$. Если, кроме того,

$$\| A_0 \|_1 < \| A_0 \|_2$$

для некоторой матрицы A_0, то условимся называть $\| A \|_2$ строгой мажорантой для $\| A \|_1$. Пусть $\| A \|$ — какая-нибудь векторная норма матриц. Нетрудно доказать следующее утверждение: для того чтобы существовала векторная норма матриц, строго мажорирующая $\| A \|$ и совпадающая с ней на замкнутом центрально-симметричном множестве $H \subset \mathfrak{M}_n$, необходимо и достаточно, чтобы множество CH (дополнение H до $\mathfrak{M}_n$) содержало хотя бы одну экстремальную точку [3] сферы $\| A \| \leqslant 1$.

Следствие 2. *Пусть $N(A)$ — какая-нибудь норма матриц и пусть I — замкнутый идеал. Для того чтобы существовала строгая мажоранта для $N(A)$, совпадающая с ней на I, необходимо и достаточно, чтобы множество CI содержало хотя бы одну экстремальную точку сферы $N(A) \leqslant 1$.*

Необходимость следует из сделанного выше замечания. Для доказательства достаточности рассмотрим такую векторную норму матриц $\| A \|^{\circ}$, которая строго мажорирует $N(A)$ и совпадает с ней на I. Тогда в обозначениях теоремы 1

$$\| A \| = \max_{U \neq 0} \frac{\| AU \|'}{\| U \|_1} \geqslant \| A \|' \geqslant \| A \|^{\circ} \geqslant N(A),$$

причем $\| A \|$ совпадает с $N(A)$ на I.

Аналогично доказывается

Следствие 3. *Пусть $N(A)$ — сохраняющая единицу норма матриц и пусть I — замкнутый идеал в $\mathfrak{M}_n$. Для того чтобы существовала строгая мажоранта для $N(A)$, совпадающая с ней на I и сохраняющая единицу, необходимо и достаточно, чтобы множество CI содержало хотя бы одну экстремальную точку, отличную от $\pm E$.*

Замечание. Если норма матриц $N(A)$ сохраняет единицу, то у нее всегда существует (не обязательно сохраняющая единицу) строгая мажоранта, совпадающая с ней на замкнутом идеале I. Это непосредственно вытекает из следствия 2 и из того, что матрица E является (см. [4]) экстремальной точкой сферы $N(A) \leqslant 1$.

* Т. е. линейная оболочка I не совпадает с $\mathfrak{M}_n$.

Так как совокупность всех экстремальных точек сферы $N(A) \leqslant 1$ является полным множеством в $\mathfrak{M}_n$, то из следствия 2 вытекает, что в множестве норм матриц, совпадающих с $N(A)$ на неполном замкнутом идеале, не существует максимального элемента. Используя следствие 3, можно доказать, что в множестве норм матриц, совпадающих с какой-нибудь фиксированной нормой на неполном идеале и сохраняющих единицу, также не существует максимального элемента.

Замечание. Если H — полная подполугруппа в $\mathfrak{M}_n$ и $N(A)$ — функционал типа нормы матриц на H, то легко проверить, что равенством (1) определяется норма матриц. Эта норма является, очевидно, наибольшим элементом в множестве векторных норм матриц, совпадающих с $N(A)$ на H. Таким образом, теорема 1 оказывается справедливой также и для полных подполугрупп. Это замечание относится и к следствию 2.

Укажем теперь одно применение полученных результатов.

Пусть R_n — n-мерное вещественное векторное пространство. Всякая норма векторов $\|x\|$ в R_n порождает операторную норму матриц.

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

которая, очевидно, сохраняет единицу. В [2] доказано, что не всякая сохраняющая единицу норма матриц является операторной. Именно, если $\{\|A\|_\alpha\}$ — какое-нибудь множество операторных норм, содержащее по крайней мере две различные нормы, причем

$$\|A\| \equiv \sup_\alpha \|A\|_\alpha < \infty \quad (A \in \mathfrak{M}_n), \tag{5}$$

то функционал, определенный равенством (5), есть сохраняющая единицу норма матриц, не являющаяся операторной. Но, может быть, всякая сохраняющая единицу норма матриц является верхней гранью некоторого множества операторных норм? Ниже дается отрицательный ответ на этот вопрос.

Назовем квазиоператорной нормой всякую норму матриц, совпадающую с какой-нибудь операторной нормой на множестве I_1 всех матриц первого ранга*. Из [2] следует, что квазиоператорная норма либо является операторной, либо не может быть верхней гранью никакого множества операторных норм.

Теорема 3. *Существует сохраняющая единицу норма матриц, не являющаяся верхней гранью никакого множества операторных норм.*

Для доказательства достаточно установить существование сохраняющих единицу квазиоператорных норм, не являющихся операторными. Пусть

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

где $\|x\|$ — такая норма векторов, для которой существует нетривиальная изометрическая матрица:

$$\|Ux\| = \|x\| \quad (x \in R_n), \quad U \neq \pm E.$$

В качестве $\|x\|$ можно взять, например, эвклидову норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2}.$$

* Очевидно, I_1 является идеалом.

Такие матрицы U являются [3] экстремальными точками сферы $\|A\| \leqslant 1$, причем $U \overline{\in} I_1$. В силу следствия 3 существует норма матриц $\|A\|_1$, совпадающая с $\|A\|$ на I_1, сохраняющая единицу и строго мажорирующая норму $\|A\|$. Норма $\|A\|_1$ не может быть операторной в силу доказанной в [2] минимальности операторных норм.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Фадеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат, 1950.
2. Ю. И. Любич. Об операторных нормах матриц. «Усп. матем. наук», XVIII, № 4, 1963, 161—164.
3. М. Гельфанд. «Матем. сб.», 9 (51), 1941, 267—316.
4. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. Изд-во иностр. лит., М., 1961.