ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Е. Я. Хруслов

1. В совместной работе В. А. Марченко и автора [1] была рассмотрена краевая задача для оператора Лапласа в односвязной области при нулевом условии на границе, которая состоит из многих мелких связных компонент. Мы исследовали поведение резольвенты этой задачи, когда диаметры связных компонент границы стремятся к нулю, а сами компоненты неограниченно приближаются к некоторой фиксированной поверхности S. Было показано, что при определенных условиях ядро резольвенты $R(x, y; \lambda)$ стремится к функции Грина $G(x, y; \lambda)$ краевой задачи, порождаемой уравнением Гельмгольца и следующими граничными условиями на поверхности S:

$$u^{+}(x) = u^{-}(x)$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)^{-} = 4\pi p(x)\, u(x), \qquad (1)$$

где $p(x)$ — положительная функция, определенным образом выражающаяся через емкости связных компонент границы; знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функций с разных сторон поверхности S; n — нормаль к поверхности S, направленная из стороны, которой отвечает знак $-$, в сторону, которой отвечает знак $+$.

Таким образом, краевая задача с граничными условиями (1) является предельным случаем первой краевой задачи с многосвязной границей, когда связные компоненты границы неограниченно приближаются к поверхности S и их диаметры стремятся к нулю.

В настоящей работе проводится исследование аналитических свойств функции Грина предельной задачи, и полученные результаты используются для анализа решения волнового уравнения при соответствующих граничных условиях.

Автор выражает свою глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

* * *

Всюду в дальнейшем мы пользуемся следующими обозначениями:

x, ξ, y, η — точки трехмерного пространства;

dS_ξ — элемент площади поверхности;

$d\tau_\xi$ — элемент объема.

2. Пусть S — некоторая замкнутая поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова. Эта поверхность разделяет все трехмерное пространство на две области: T_i — внутреннюю относительно S, и T_e — внешнюю.

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую в области $T_i \cup T_e$ дифференциальным уравнением

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x) \tag{2}$$

и следующими граничными условиями на поверхности S:

$$u_e(x) = u_i(x) \tag{3а}$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)_i = 4\pi p(x) u(x), \tag{3б}$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S, а $p(x)$ — заданная на поверхности S непрерывная и положительная функция. Параметр k может принимать любые комплексные значения из верхней полуплоскости, и, следовательно, k^2 может быть любым комплексным числом, не лежащим на положительной полуоси.

Функцией Грина этой краевой задачи с полюсом в точке $y\,(y \overline{\in} S)$ называется функция $G(x, y; k)$, удовлетворяющая граничным условиям (3а)—(3б) и представимая в виде:

$$G(x, y; k) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \gamma(x, y; k), \tag{4}$$

где $\operatorname{Im} k > 0$, а функция $\gamma(x, y; k)$ удовлетворяет в областях T_i и T_e однородному уравнению

$$\Delta\gamma + k^2\gamma = 0 \tag{5}$$

и стремится к нулю на бесконечности.

Докажем существование и единственность функции Грина. Пусть S_R — сфера радиуса R с центром в точке $x\,(x \overline{\in} S)$, где R столь велико, что поверхность S лежит внутри S_R. Введем функцию

$$Q_R(\xi, x; k) = \frac{e^{ik|\xi-x|}}{4\pi|\xi-x|} - \frac{\sin k|\xi-x|}{4\pi|\xi-x|} \cdot \frac{e^{ikR}}{\sin kR}. \tag{6}$$

Эта функция по переменной ξ удовлетворяет уравнению

$$\Delta Q_R + k^2 Q_R = -\delta(\xi, x) \tag{7}$$

и обращается в нуль при $\xi \in S_R$.

Предположим, что функция Грина $G(x, y; k)$ существует. Тогда из уравнений (5) и (7) обычным путем выводим, что

$$\gamma(x, y; k) = \int\limits_S Q_R(\xi, x; k)\left[\left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_e\right] dS_\xi +$$
$$+ \int\limits_S \gamma(\xi, y; k)\left[\left(\frac{\partial Q_R(\xi, x; k)}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial Q_R(\xi, x; k)}{\partial n}\right)_i\right] dS_\xi +$$
$$+ \int\limits_{S_R}\left[Q_R(\xi, x; k)\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n} - \gamma(\xi, y; k)\frac{\partial Q_R(\xi, x; k)}{\partial n}\right] dS_\xi.$$

Так как функция $Q_R(\xi, x; k)$ обращается в нуль на сфере S_R и ее нормальная производная непрерывна при переходе через поверхность S, то из последнего равенства следует

$$\gamma(x, y; k) = \int\limits_S Q_R(\xi, x; k)\left[\left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_e\right] dS_\xi -$$
$$- \int\limits_{S_R} \gamma(\xi, y; k)\frac{\partial Q_R(\xi, x; k)}{\partial n} dS_\xi. \tag{8}$$

...улы (6) видно, что при $R \to \infty$ нормальная производная функ-... ξ, x; k) на сфере S_R стремится к нулю экспоненциально ($\operatorname{Im} k > 0$), ...поверхности S имеет место предельное равенство

$$\lim_{R\to\infty} Q_R(\xi, x; k) = \frac{e^{ik|\xi - x|}}{4\pi|\xi - x|},$$

...и предел существует равномерно по $\xi \in S$, поэтому, устремляя в фор-... (8) R к бесконечности, получим

$$\gamma(x, y; k) = \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\sigma(\xi, y; k)\, dS_\xi, \tag{9}$$

где

$$\sigma(x, y; k) = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial\gamma(\xi, y; k)}{\partial n}\right)_e\right]. \tag{10}$$

...м образом, функция $\gamma(x, y; k)$ всегда может быть представлена в виде ...нциала простого поля с плотностью, распределенной на поверхности S, ...ем плотность $\sigma(x, y; k)$ в силу формул (4), (9), (10) и граничного ...овия (3б) должна удовлетворять такому интегральному уравнению:

$$\sigma(x, y; k) + \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} p(x)\sigma(\xi, y; k)\, dS_\xi = -p(x)\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{11}$$

...другой стороны, если некоторая непрерывная функция $\sigma(x, y; k)$ удов-...творяет этому интегральному уравнению, то функция $G(x, y; k)$, построен-...я по формулам (4) и (9), как легко видеть, будет функцией Грина крае-...й задачи (2), (3а)—(3б).

Таким образом, существование и единственность функции Грина будут ...азаны, если мы покажем, что интегральное уравнение (11) имеет единст-...енное непрерывное решение при любом k, лежащем в верхней полу-...скости.

Как известно [2], для уравнения (11) справедливы все теоремы Фред-...гольма. Поэтому оно имеет и притом единственное решение, если одно-...родное уравнение

$$\sigma(x, k) + \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} p(x)\sigma(\xi, k)\, dS_\xi = 0 \tag{12}$$

...не имеет ненулевых решений.

Лемма 1. Уравнение (12) не имеет ненулевых решений, если $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Доказательство.

Пусть функция $\sigma(x, k)$ удовлетворяет уравнению (12). Тогда, так $p(x)$ — вещественна, $\overline{\sigma(x, k)}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\sigma(x, k)} + \int\limits_S \frac{e^{-i\bar{k}|x-\xi|}}{|x-\xi|} p(x)\overline{\sigma(\xi, k)}\, dS_\xi = 0. \tag{12$_1$}$$

...смотрим функции

$$v(x, k) = \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\sigma(\xi, k)\, dS_\xi, \tag{13}$$

$$\overline{v(x, k)} = \int\limits_S \frac{e^{-i\bar{k}|x-\xi|}}{|x-\xi|}\overline{\sigma(\xi, k)}\, dS_\xi. \tag{13$_1$}$$

В силу того, что плотности $\sigma(x, k)$ и $\overline{\sigma(x, k)}$ удовлетворяют уравнениям (12) и (12_1) и, следовательно, непрерывны [2], функции $v(x, k)$ и $\overline{v(x, k)}$ непрерывны во всём пространстве, в областях T_i и T_e удовлетворяют уравнениям

$$\Delta v(x, k) + k^2 v(x, k) = 0, \tag{14}$$

$$\Delta \overline{v(x, k)} + \overline{k^2}\, \overline{v(x, k)} = 0, \tag{14_1}$$

а на поверхности S — граничным условиям

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i = 4\pi p(x)\, v(x, k), \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_i = 4\pi p(x)\, \overline{v(x, k)}. \tag{15_1}$$

Окружим поверхность S сферой S_R радиуса R и обозначим через T_R область, лежащую между поверхностями S_R и S. Далее рассмотрим отдельно два случая.

1. $\operatorname{Im} k > 0$ или $k = 0$, т. е. либо $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$, либо $k^2 \leqslant 0$;
2. $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$, т. е. $k^2 > 0$.

В первом случае из формул (13)—(13_1) следует, что при $x \to \infty$

$$|v(x, k)| = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad |\operatorname{grad} v(x, k)| = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \tag{16}$$

где R — расстояние от некоторой фиксированной точки до точки x.

Применяя вторую формулу Грина к областям T_i и T_e и учитывая уравнение (14), получим

$$0 = \int_{T_i} \bar{v}(\Delta v + k^2 v)\, d\tau + \int_{T_R} \bar{v}(\Delta v + k^2 v)\, d\tau =$$

$$= k^2 \int_{T_i \cup T_R} |v|^2 d\tau - \int_{T_i \cup T_R} |\operatorname{grad} v|^2 d\tau - \int_S \bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i\right] dS + \int_{S_R} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n}\, dS,$$

откуда при $R \to \infty$ в силу оценок (16) и граничного условия (15) следует, что

$$k^2 \int_{T_i \cup T_e} |v|^2 d\tau - \int_{T_i \cup T_e} |\operatorname{grad} v|^2 d\tau - 4\pi \int_S p(x)\, |v|^2 dS = 0.$$

Из этого равенства получаем:

если $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$, то

$$\int_{T_i \cup T_e} |v|^2 d\tau = 0, \tag{17}$$

если $k^2 \leqslant 0$, то

$$\int_{T_i \cup T_e} |\operatorname{grad} v|^2 d\tau + \int_S p(x)\, |v|^2 dS = 0. \tag{18}$$

Так как $p(x) > 0$, то из (17) и (18), очевидно, следует, что при всех k, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} k > 0$ или $k = 0$, $v(x, k) \equiv 0$ и, значит,

$$\sigma(x, k) = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e\right] \equiv 0.$$

Теперь рассмотрим второй случай. Используя выражения (13)—(13$_1$), находим, что функции $v(x, k)$ и $\overline{v(x, k)}$ удовлетворяют таким условиям излучения:

$$\frac{\partial v}{\partial R} - ikv = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad v = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial R} + ik\bar{v} = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad v = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{19$_1$}$$

Учитывая уравнения (14)—(14$_1$) и применяя первую формулу Грина к областям T_i и T_R, получим:

$$0 = \int\limits_{T_i \cup T_R} \{\bar{v}(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta \bar{v} + k^2 \bar{v})\} \, d\tau =$$

$$= \int\limits_S \left\{v\left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_i\right] - \bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i\right]\right\} dS +$$

$$+ \int\limits_{S_R} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) dS,$$

откуда в силу граничных условий (15)—(15$_1$) следует:

$$\int\limits_{S_R} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Из последнего равенства, используя условия излучения (19)—(19$_1$), получим

$$0 = \int\limits_{S_R} \left\{\bar{v}\left[ikv + o\left(\frac{1}{R}\right)\right] - v\left[-ik\bar{v} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right]\right\} dS =$$

$$= 2ik \int\limits_{S_R} |v|^2 \, dS + o(1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{S_R} |v|^2 \, dS = 0. \tag{20}$$

Теперь воспользуемся леммой Купрадзе [3]: если для функции $v(x, k)$, удовлетворяющей вне некоторой замкнутой поверхности S уравнению Гельмгольца и условиям излучения, имеет место соотношение (20), то $v(x, k) \equiv 0$ вне поверхности S.

В нашем случае все условия леммы выполнены и, следовательно, $v(x, k) \equiv 0$ вне S. Поэтому на поверхности S $v_e(x, k) = 0$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e = 0$, откуда, пользуясь граничным условием (15), находим, что $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i = 0$. Следовательно,

$$\sigma(x, k) = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e\right] \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы в силу альтернативы Фредгольма следует, что интегральное уравнение (11) имеет единственное решение. Причем это решение — непрерывно, так как правая часть уравнения (11) непрерывна [2]. Тем самым существование и единственность функции Грина при $\operatorname{Im} k > 0$ доказаны.

3. Исследуем теперь характер зависимости функции Грина от параметра k.

Ядро и правая часть уравнения (11) являются целыми функциями параметра k. Поэтому решение $\sigma(x, y; k)$ этого уравнения есть голоморфная функция от k в области, где оно существует. Согласно лемме 1 при всех k, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, решение $\sigma(x, y; k)$ уравнения (11) существует. Следовательно, функция $\sigma(x, y; k)$ голоморфна в верхней полуплоскости, включая вещественную ось.

Обозначим через $K_n(x, \xi; k)$ n-ю итерацию ядра $K_1(x, \xi; k)$ уравнения (11). Итерированные ядра, очевидно, также являются целыми функциями параметра k. Из характера особенности ядра

$$K_1(x, \xi; k) = \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} p(x)$$

следует, что $K_3(x, \xi; k)$ непрерывная функция переменных x, ξ, и, следовательно, резольвента Фредгольма $\Gamma_3(x, \xi; k)$ этого ядра может быть представлена в виде

$$\Gamma_3(x, \xi; k) = \frac{D_3(x, \xi; k)}{D_3(k)},$$

причем функции $D_3(x, \xi; k)$ и $D_3(k)$ представляются рядами, члены которых, как легко видеть, являются голоморфными функциями от k, а сами ряды сходятся равномерно в каждой конечной области изменения k.

Отсюда следует, что функции $D_3(x, \xi; k)$ и $D_3(k)$ есть целые, а резольвента $\Gamma_3(x, \xi; k)$ мероморфная функция параметра k.

Как известно [4], резольвента Фредгольма $\Gamma_1(x, \xi; k)$ уравнения (11) связана с резольвентой $\Gamma_3(x, \xi; k)$ формулой:

$$\Gamma_1(x, \xi; k) = H(x, \xi; k) + \Gamma_3(x, \xi; k) - \int_S H(x, t; k)\Gamma_3(t, \xi; k)\, dS_t,$$

где функция

$$H(x, \xi; k) = K_1(x, \xi; k) - K_2(x, \xi; k) -$$

целая функция параметра k.

Из этой формулы следует, очевидно, что резольвента $\Gamma_1(x, \xi; k)$ также является мероморфной функцией параметра k, а так как правая часть уравнения (11) есть целая функция от k, то его решение $\sigma(x, y; k)$ есть мероморфная функция во всей плоскости комплексного переменного k, причем все ее полосы, в силу сказанного выше, лежат ниже вещественной оси.

Согласно формулам (4) и (9)

$$G(x, y; k) = \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} + \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \sigma(\xi, y; k)\, dS_\xi \qquad (4_1).$$

Поэтому функция Грина $G(x, y; k)$, как функция параметра k, голоморфна в верхней полуплоскости и допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, где она не может иметь других особенностей, кроме полюсов. Таким образом, аналитическое продолжение функции Грина является мероморфной функцией во всей плоскости комплексного переменного k, причем все ее полюсы лежат ниже вещественной оси.

Для краткости аналитическое продолжение функции Грина в нижнюю полуплоскость мы будем обозначать тоже через $G(x, y; k)$ и называть функцией Грина. Следует, однако, заметить, что при $\operatorname{Im} k < 0$ функция $G(x, y; k)$ не стремится к нулю, когда $x \to \infty$, а растет экспоненциально.

Покажем, что полюсы функции $G(x, y; k)$ не могут неограниченно приближаться к вещественной оси. С этой целью рассмотрим вторую итерацию ядра интегрального уравнения (11):

$$K_2(x, y; k) = p(x) \int\limits_S \frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi|\,|\xi-y|} p(\xi)\, dS_\xi. \tag{21}$$

Лемма 2. Если параметр k стремится к бесконечности, не выходя за пределы любой фиксированной полосы $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_S \int\limits_S |K_2(x, y; k)|^2\, dS_x\, dS_y = 0.$$

Доказательство. Так как функция $e^{ik|x-\xi|}$ равномерно ограничена в полосе $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$, то из классических неравенств для итерированных ядер [2] вытекает, что в этой полосе справедлива равномерная по k оценка

$$|K_2(x, y; k)| \leqslant C(1 + |\ln|x-y||).$$

Из этого неравенства и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла для мажорируемой последовательности функций следует, что лемма будет доказана, если мы покажем, что ядро $K_2(x, y; k)$ при каждом фиксированном x для почти всех y стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности, не выходя за пределы полосы $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$.

При фиксированных x и $y\,(x \neq y)$ рассмотрим семейство эллипсоидов вращения $|x-\xi| + |\xi - y| = u$ $(|x-y| \leqslant u < \infty)$ с фокусами в точках x и y. Множество точек ξ, в которых какие-нибудь эллипсоиды этого семейства касаются поверхности S, обозначим через $F_1(x, y)$. Легко проверить, что множество $F_1(x, y)$ — замкнуто. Покажем, что при фиксированном x множество точек y, для которых $\operatorname{mes} F_1(x, y) > 0$, не более чем счетно. Для этого заметим прежде всего, что если $y_1 \neq y_2$, то $\operatorname{mes}[F_1(x, y_1) \cap F_2(x, y_2)] = 0$. Действительно, если точка $\xi \in F_1(x, y_1) \cap F_2(x, y_2)$, то она принадлежит двум эллипсоидам $|x-\xi| + |\xi - y_1| = u_1$, $|x-\xi| + |\xi - y_2| = u_2$, и нормали в этой точке к поверхности S и этим эллипсоидам совпадают.

Так как нормаль к эллипсоиду вращения лежит в плоскости фокальных радиусов и делит угол между ними пополам, то множество $F_1(x, y_1) \cap F_1(x, y_2)$ лежит на прямой, проходящей через точки y_1 и y_2, а потому имеет нулевую меру. Отсюда следует, что множество точек y, для которых $\operatorname{mes} F_1(x, y) > \varepsilon$, конечно, так как площадь поверхности S ограничена и $\operatorname{mes}[F_1(x, y_1) \cap F_1(x, y_2)] = 0$.

Поэтому множество точек y, для которых $\operatorname{mes} F_1(x, y) > 0$, не более чем счетно при любом x.

Дальше будем рассматривать только те точки $y \neq x$, для которых $\operatorname{mes} F_1(x, y) = 0$.

Пусть $F_2(x, y)$ — множество точек пересечения отрезка прямой, лежащего между x и y с поверхностью S. Ясно, что множество $F_2(x, y)$ тоже замкнуто и имеет меру нуль. Покроем замкнутое множество $F_1(x, y) \cup F_2(x, y)$ открытым множеством G так, чтобы при всех k из полосы $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$

$$p(x) \int\limits_G \frac{|e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}|}{|x-\xi|\,|\xi-y|} p(\xi)\, dS_\xi < \varepsilon. \tag{22}$$

Это, очевидно, можно сделать, так как мера множества $F_1(x, y) \cup F_2(x, y)$ равна нулю.

Рассмотрим оставшуюся часть поверхности, т. е. множество $S\setminus G$. Так как множество $S\setminus G$ замкнуто, то расстояние δ от него до множества $F_1(x, y)\bigcup F_2(x, y)$ — положительно. Обозначим соответственно через $\vec{n}(\xi)$ и $\vec{n}_1(\xi)$ единичные векторы нормалей в точке ξ к поверхности и эллипсоиду $|x-\xi|+|\xi-y|=u$, проходящему через точку ξ.

На замкнутом множестве F_δ всех точек поверхности S, расстояния от которых до множества $F_1(x, y)\bigcup F_2(x, y)$ больше или равно $\frac{\delta}{2}$, вектор $\vec{n}(\xi)\times\vec{n}_1(\xi)$ меняется непрерывно и не обращается в нуль, так что

$$\min_{\xi\in F_\delta}|\vec{n}(\xi)\times\vec{n}_1(\xi)|=h>0.$$

Покроем каждую точку замкнутого множества $S\setminus G\subset F_\delta$ окрестностью, вырезаемой из поверхности S шаром с центром в этой точке радиуса $\rho<\frac{\delta}{2}$ и столь малого, чтобы для любых точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$(\vec{n}(\xi_1)\times\vec{n}_1(\xi_1),\ \vec{n}(\xi_2)\times\vec{n}_1(\xi_2))>\frac{h^2}{2}. \tag{23}$$

Из этого покрытия выберем конечное покрытие $S_1, S_2, \ldots, S_N$, что возможно в силу леммы Бореля — Лебега. Для множества $G_\rho=\bigcup_1^N S_n$, очевидно, справедливы включения

$$F_\delta\supset G_\rho\supset S\setminus G. \tag{24}$$

Введем функции $\chi_n(\xi)$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ следующим образом:

$$\chi_1(\xi)=\begin{cases}1 & \xi\in S_1\\ 0 & \xi\bar{\in} S_1\end{cases},\ \ldots,\ \chi_n(\xi)=\begin{cases}1 & \xi\in S_n\setminus\bigcup_1^{n-1}S_i\\ 0 & \xi\bar{\in} S_n\setminus\bigcup_1^{n-1}S_i.\end{cases}$$

Ясно, что на множестве G_ρ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{N}\chi_n(\xi)=1\quad \xi\in G_\rho.$$

Поэтому формулу (21) можно записать в таком виде:

$$K_2(x, y; k)=p(x)\left\{\int\limits_{S\setminus G\rho}\frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi||\xi-y|}p(\xi)\,dS_\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{S_n}\frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi||\xi-y|}p(\xi)\chi_n(\xi)\,dS_\xi\right\},$$

откуда, учитывая неравенство (22) и включение $S\setminus G_\rho\subset G$, вытекающее из (24), получим

$$|K_2(x, y; k)|\leqslant\varepsilon+\left|p(x)\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{S_n}\frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi||\xi-y|}p(\xi)\chi_n(\xi)\,dS_\xi\right|.$$

Из этого неравенства видно, что лемма будет доказана, если мы покажем, что интегралы

$$\int\limits_{S_n} \frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi|\,|\xi-y|} p(\xi)\chi_n(\xi)\,dS_\xi \quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{25}$$

стремятся к нулю, когда k стремится к бесконечности, не выходя за пределы полосы $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$. Зададим на каждом множестве S_n координатную сеть, выбрав в качестве одного семейства координатных линий ($u = \text{const}$) линии пересечения поверхности S с эллипсоидами $|x-\xi| + |\xi - y| = u$, а второго ($v = \text{const}$) — линии пересечения поверхности S с параллельными плоскостями $(\vec{\xi}, \vec{n}) = v$, нормаль $\vec{n}$ к которым по направлению совпадает с вектором $\vec{n}(\xi_n) \times \vec{n}_1(\xi_n)$, где ξ_n — некоторая точка S_n.

Так как на множестве S_n справедливо неравенство (23), то, как нетрудно показать, уравнение куска S_n поверхности S можно записать в виде $\vec{\xi} = \vec{\xi}(u, v)$, где точка (u, v) пробегает ограниченное открытое множество $\hat{S}_n$ плоскости u, v и на этом множестве вектор-функции $\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial v}$ непрерывны и ограничены. Поэтому мы можем представить интеграл (25) в виде

$$\int\limits_{S_n} \frac{e^{ik(|x-\xi|+|\xi-y|)}}{|x-\xi|\,|\xi-y|} p(\xi)\chi_n(\xi)\,dS_\xi =$$

$$= \int\limits_{a_n}^{b_n} e^{i\alpha u} e^{-\beta u} \int\limits_{A(u)} \frac{p[\xi(u,v)]\,\chi_n[\xi(u,v)]}{|x-\xi(u,v)|\,|\xi(u,v)-y|} D(u,v)\,dv\,du,$$

где $\alpha = \operatorname{Re} k$, $\beta = \operatorname{Im} k$; $A(u)$ — интервал, длина которого непрерывно зависит от u; функция $D(u, v)$ известным образом выражается через коэффициенты первой квадратичной формы функции $\vec{\xi} = \vec{\xi}(u, v)$ и, согласно сказанному выше, ограничена и непрерывна.

Ясно, что внутренний интеграл существует при всех u $(a_n \leqslant u \leqslant b_n)$ и является ограниченной функцией от u. Поэтому при фиксированном β внешний интеграл в силу теоремы Римана — Лебега стремится к нулю при $|\alpha| \to \infty$, причем равномерно по β $(-M \leqslant \beta \leqslant 0)$, так как подынтегральные функции равностепенно непрерывны по β. Лемма доказана.

Обозначим через D_{MN} множество значений k, удовлетворяющих условия: $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$ и $|\operatorname{Re} k| \geqslant N$.

В силу леммы 2 при любом M найдется такое $N = N(M)$, что для всех $k \in D_{MN}$ будет выполняться неравенство

$$\int\limits_S \int\limits_S |k_2(x,\ y;\ k)|^2\, dS_x\, dS_y < \frac{1}{2},$$

из которого следует, что в метрике L^2 норма оператора с итерированным ядром $K_2(x, y; k)$ меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при всех $k \in D_{MN}$ и, значит, уравнение (11) имеет единственное решение $\sigma(x, y; k)$, которое может быть получено методом последовательных приближений. Следовательно, в замкнутой области D_{MN} функция $\sigma(x, y; k)$ голоморфна.

В силу формулы (4_1) функция Грина $G(x, y; k)$ также будет голоморфной функцией от k в области $-M \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 0$, $|\operatorname{Re} k| \geqslant N(M)$, а так как она является мероморфной функцией во всей плоскости комплексного переменного k, то в полосе $-M \leqslant \operatorname{Im} k < 0$ может лежать только конечное число ее полюсов. Таким образом, имеет место следующая теорема.

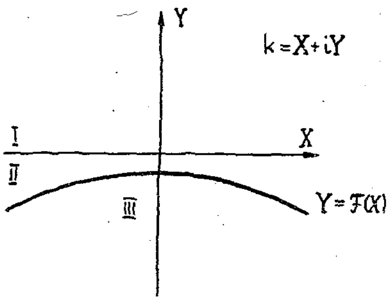
Теорема 1. *Функция Грина* $G(x, y; k)$ *задачи* (2) (3а) — (3б), *являет мероморфной функцией во всей плоскости комплексного переменного и ее полюсы могут лежать только в нижней полуплоскости ниже нек торой кривой* $Y = F(X)$, *где* $F(X) \leqslant \beta < 0$ *и* $F(X) \to -\infty$ при $|X| \to$ (рис. 1).

4. Рассмотрим в области $T_i \cup T_e$ волновое уравнение

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \qquad (2$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее на поверхности S грани ным условиям (3а) — (3б), при таких начальных данных:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \varphi(x), \qquad (2$$



I — область существования функции Грина. *I* и *II* — области голоморфности функции Грина и ее аналитического продолжения. *III* — область, где могут лежать полосы аналитического продолжения функции Грина.

где $\varphi(x)$ — финитная функция, сосредот ченная строго внутри области T_i. Решен задачи $u(x, t)$ описывает распространен начального возмущения $\varphi(x)$, сосредот ченного в области T_i, сквозь поверхность Нас будет интересовать скорость затухан начального возмущения, т. е. поведен $u(x, t)$ при $x \in T_i$ и $t \to \infty$. Формаль решение этой задачи можно найти следу щим образом. Пусть

$$\bar{u}(x, k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(x, t)\, dt \quad (\operatorname{Im} k = \beta > 0) \qquad (2$$

В силу (26) функция $\bar{u}(x, k)$ должна удо летворять уравнению

$$\Delta \bar{u}(x, k) + k^2 \bar{u}(x, k) = -\varphi(x)$$

и граничным условиям (3а) — (3б). Следовательно, она выражается чер функцию Грина $G(x, y; k)$ краевой задачи (2), (3а) — (3б) по формуле

$$\bar{u}(x, k) = \int_{T_i \cup T_e} G(x, \xi; k) \varphi(\xi)\, d\tau_\xi. \qquad (2$$

Используя формулу обращения Фурье, из равенств (28) и (29) получ

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\beta}^{\infty + i\beta} e^{-ikt} \int_{T_i \cup T_e} G(x, \xi; k) \varphi(\xi)\, d\tau_\xi\, dk. \qquad (3$$

Нетрудно показать, что функция $u(x, t)$, построенная по этой формул будет классическим решением поставленной задачи, если функция (2 и ее производные первого и второго порядка убывают при $|\operatorname{Re} k| \to$ как $|k|^{-2}$ равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$.

Эти оценки можно получить, используя лемму 2 и равенство Гил берта для функции Грина $G(x, y; k)$, если функция $\varphi(x)$ имеет четы непрерывные производные, что мы в дальнейшем и будем предполагат При этом оценки получаются равномерными в любой полуплоскос $\operatorname{Im} k \geqslant -M$.

Пусть β_0 — кратчайшее расстояние от полюсов функции Грина $G(x, y;$ до вещественной оси и

$$k_j = \alpha_j - i\beta_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ее полюсы с мнимой частью $-\beta_0$. Из теоремы 1 следует, что $\beta_0 > 0$, ри достаточно малом $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant -\beta_0 - \varepsilon$ других полюсов функция Грина не имеет.

Так как при наших предположениях о $\varphi(x)$ функция (29) убывает $|\operatorname{Re} k| \to \infty$ как $|k|^{-2}$ равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant -\beta_0 - \varepsilon$, формуле (30) путь интегрирования можно опустить до прямой $= -\beta_0 - \varepsilon$, что дает

$$u(x, t) = -i \sum_{k_j} \operatorname{Res}[e^{-ik_j t} \tilde{u}(x, k_j)] + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty - i(\beta_0+\varepsilon)}^{\infty - i(\beta_0+\varepsilon)} e^{-ikt} \tilde{u}(x, k)\, dk,$$

е.

$$u(x, t) = e^{-\beta_0 t} \left\{ \sum_{j=1}^{n} e^{-i\alpha_j t} P_j(x, t) + \frac{e^{-\varepsilon t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu t} \tilde{u}(x, \mu - i(\beta_0 + \varepsilon))\, d\mu \right\},$$

где $P_j(x, t) = \sum_{s=0}^{m-1} t^s u_{js}(x)$; m — наибольшая кратность полюсов

k_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

аким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ сосредоточена строго внутри области T_i четырежды непрерывно дифференцируема, то решение задачи (26) — 7) при граничных условиях* (3а) — (3б) *затухает при $t \to \infty$ как $e^{-\beta_0 t} t^{m-1}$, β_0 — кратчайшее расстояние от полюсов функции Грина $G(x, y; k)$ щественной оси и m — наибольшая кратность полюсов с мнимой тью $-\beta_0$.*

Замечание. Если функция Грина $G(x, y; k)$ вообще не имеет по-в, то решение $u(x, t)$ убывает быстрее любой экспоненты. Ниже будет зано, что при больших $p(x)$ функция Грина $G(x, y; k)$, обязательно т полюсы, так что в этом случае убывание происходит экспонен-ьно.

5. Рассмотрим семейство краевых задач (2), (3а) — (3б), в которых ция $p(x)$, входящая в граничные условия, зависит от параметра λ:

$$p(x) = \lambda p_0(x) \quad (1 \geqslant p_0(x) > 0).$$

ли в граничных условиях этого семейства сделать формальный предель- переход при $\lambda \to \infty$, то они перейдут в одно условие

$$u_e(x) = u_i(x) = 0, \quad x \in S,$$

ледовательно, в пределе мы получим две не связанные между собой вые задачи в областях T_i и T_e соответственно с нулевыми граничными условиями на поверхности S. Дадим строгое обоснование этого едельного перехода. Нам понадобится прежде всего следующая лемма.

Лемма 3. Для всех точек x и y, лежащих на поверхности S, справедлива следующая формула:

$$\frac{e^{ik|x-y|} - 1}{|x-y|} = \int\limits_S \frac{b(\xi, y; k)}{|x-\xi|}\, dS_\xi, \tag{31}$$

где функция $b(\xi, y; k)$ — целая функция от k, непрерывная по ξ и y при $\xi \neq y$ и удовлетворяет всюду неравенству

$$|b(\xi, y; k)| < C_1(k)(1 + |\ln|\xi - y||),$$

причем $C_1(k)$ равномерно ограничено в каждой конечной области изменения k.

Доказательство. Введем финитную дважды непрерывно дифференциальную функцию $\varphi(x)$, равную единице в некоторой окрестности поверхности S. Тогда функция

$$\psi(x)=\frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|}\varphi(x)$$

финитна, удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$\Delta\psi(x)=F(x,y;k), \tag{32}$$

причем, как легко проверить, функция $F(x,y;k)$ тоже финитна, непрерывна при $x\neq y$ и всюду удовлетворяет неравенству

$$|F(x,y;k)|<\frac{C_2(k)}{|x-y|}, \tag{33}$$

где $C_2(k)$ — равномерно ограничено в каждой конечной области изменения k. Кроме того, $F(x,y;k)$ является целой функцией параметра k.

Пользуясь формулой Грина, а также учитывая оценку (33), уравнение (32) и финитность функции $\psi(x)$, получаем

$$\psi(x)=\int\limits_{T_i\cup T_e}\frac{F(\xi,y;k)}{|x-\xi|}d\tau_\xi$$

(фактически интегрирование ведется здесь по конечной области пространства).

Отсюда, так как $\varphi(x)=1$ при $x\in S$, следует

$$\frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|}=\int\limits_{T_i\cup T_e}\frac{F(\xi,y;k)}{|x-\xi|}d\tau_\xi,\quad x\in S,\ y\in S. \tag{34}$$

Обозначим через $G_i(x,y)$ и $G_e(x,y)$ функции Грина для задачи Дирикле в областях T_i и T_e соответственно. Тогда, если $x\in T_e$, а $\eta\in T_i$, то

$$\frac{1}{|x-\eta|}=\int\limits_S\frac{\partial G_i(\xi,\eta)}{\partial n_\xi}\cdot\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi,$$

откуда, устремляя x к поверхности S, получим

$$\frac{1}{|x-\eta|}=\int\limits_S\frac{\partial G_i(\xi,\eta)}{\partial n_\xi}\cdot\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi\quad x\in S,\ \eta\in T_i.$$

Аналогично при $x\in S$, а $\eta\in T_e$ имеем

$$\frac{1}{|x-\eta|}=-\int\limits_S\frac{\partial G_e(\xi,\eta)}{\partial n_\xi}\cdot\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi\quad x\in S,\ \eta\in T_e.$$

Умножая каждую из этих формул на $F(\eta,y;k)$ и интегрируя соответственно по областям T_i и T_e, получаем

$$\int\limits_{T_i}\frac{F(\eta,y;k)}{|x-\eta|}d\tau_\eta=\int\limits_{T_i}F(\eta,y;k)\int\limits_S\frac{\partial G_i(\xi,\eta)}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi\,d\tau_\eta, \tag{35}$$

$$\int\limits_{T_e}\frac{F(\eta,y;k)}{|x-\eta|}d\tau_\eta=-\int\limits_{T_e}F(\eta,y;k)\int\limits_S\frac{\partial G_e(\xi,\eta)}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi\,d\tau_\eta. \tag{36}$$

звестно [5], для нормальных производных функций Грина $G_i(\xi, \eta)$ $\xi, \eta)$ имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial G_i(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}\right| < \frac{C_i}{|\xi-\eta|^2} \quad \xi \in S, \ \eta \in T_i,$$
$$\left|\frac{\partial G_e(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}\right| < \frac{C_e}{|\xi-\eta|^2} \quad \xi \in S, \ \eta \in T_e. \tag{37}$$

их оценок, а также из финитности $F(\eta, y; k)$ и оценки (33) следует, в правых частях формул (35), (36) мы можем поменять порядок рирования. В результате, учитывая (34), получим

$$\frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|} = \int_S \frac{b(\xi, y; k)}{|x-\xi|} dS_\xi,$$

где

$$b(\xi, y; k) = \int_{T_i} \frac{\partial G_i(\xi, \eta)}{\partial n_\xi} F(\eta, y; k)\, d\tau_\eta - \int_{T_e} \frac{\partial G_e(\xi, \eta)}{\partial n_\xi} F(\eta, y; k)\, d\tau_\eta.$$

да, в силу указанных выше свойств функции $F(\eta, y; k)$ и непрерыв- нормальных производных функций Грина при $\xi \neq \eta$, следует, что $y; k)$ — целая функция параметра k, непрерывная по ξ и y при $\xi \neq y$. е того, согласно известным оценкам сингулярных интегралов [2], из (37) вытекает неравенство

$$|b(\xi, y; k)| < C_1(k)(1 + |\ln|\xi - y||),$$

где $C_1(k)$ — равномерно ограничено в каждой конечной области измене- k.

Лемма доказана.

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что имеет место ставление

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \int_S \frac{q(\xi, y; k)}{|x-\xi|} dS_\xi \quad x \in S, \ y \bar{\in} S,$$

е функция $q(\xi, y; k)$ — непрерывна по ξ, y и голоморфна во всей плоскости комплексного переменного k.

Обратимся теперь к уравнению (11). Так как $(p(x) = \lambda p_0(x)$, то это авнение для рассматриваемого семейства краевых задач можно записать таком виде:

$$\varepsilon\sigma(x, y; k) + p_0(x) \int_S \frac{\sigma(\xi, y; k)}{|x-\xi|} dS_\xi + p_0(x) \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|} \sigma(\xi, y; k)\, dS_\xi =$$
$$= -p_0(x) \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{11$_1$}$$

На множестве функций, заданных на поверхности S и суммируемых квадратом на S, введем скалярное произведение

$$(f_1, f_2)_{p_0} = \int_S f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)} \frac{1}{p_0(\xi)} dS_\xi$$

обозначим полученное гильбертово пространство через $L^2_{p_0}(S)$. В пространстве $L^2_{p_0}(S)$ определим операторы R_{p_0} и B по формулам:

$$R_{p_0} f = p_0(x) \int_S \frac{f(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi; \quad Bf = \int_S b(x, \xi; k) f(\xi)\, dS_\xi,$$

где функция $b(x, \xi; k)$ определена в лемме 3 (формула (31)). Использу лемму 3 и замечание к ней, мы можем переписать уравнение (11_1) так

$$\varepsilon\sigma + R_{p_0}\sigma + R_{p_0}B\sigma = -R_{p_0}q. \qquad (11_2)$$

Легко проверить, что в пространстве $L^2_{p_0}(S)$ оператор R_{p_0} самосопряженный, положительно определенный и вполне непрерывный. Поэтому при всех $\varepsilon > 0$ существует $(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1}$, что позволяет преобразовать уравнение (11_2) к виду

$$\sigma + B\sigma - \varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1}B\sigma = -q + \varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1}q. \qquad (11_3)$$

Из свойств ядра $b(x, \xi; k)$ оператора B, доказанных в лемме 3, следует что к оператору $I + B$, рассматриваемому в пространстве $L^2_{p_0}(S)$, применимы все теоремы и формулы Фредгольма. Поэтому

$$(I + B)^{-1}f = f(x) - \int_S \Gamma(x, \xi; k) f(\xi)\, dS_\xi,$$

где ядро $\Gamma(x, \xi; k)$ является мероморфной функцией параметра k, что следует из аналитичности по k ядра $b(x, \xi; k)$ и формул Фредгольма.

Лемма 4. *Пусть F — любое ограничение и замкнутое множество точек k, не содержащее полюсов резольвентного ядра $\Gamma(x, \xi; k)$ оператора B. Тогда существует такое λ_0, что для всех $k \in F$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$ уравнение* (11) *имеет решение $\sigma(x, y; k)$ и при $\lambda \to \infty$ $\sigma(x, y; k)$ стремится в метрике $L^2_{p_0}(S)$ равномерно по $k \in F$ к решению $\sigma_0 = \sigma_0(x, y; k)$ уравнения*

$$\sigma_0 + B\sigma_0 = -q.$$

Доказательство. Так как уравнение (11) эквивалентно уравнению (11_3) и по условию леммы на множестве F существует $(I + B)^{-1}$ и, следовательно,

$$\sup_{k \in F} \| (I + B)^{-1} \|_{p_0} < C,$$

то для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{k \in F} \| \varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1} B \|_{p_0} = 0; \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{k \in F} \| \varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1} \|_{p_0} = 0.$$

Оба равенства доказываются одинаково, поэтому мы ограничимся доказательством первого.

Так как в пространстве $L^2_{p_0}(S)$ оператор R_{p_0} самосопряженный, положительно определенный, и вполне непрерывный, то его собственные значения μ_n положительны, а соответствующая им система ортонормированных собственных функций $\varphi_n = \varphi_n(x)$ полна в $L^2_{p_0}(S)$.

Поэтому

$$\varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1}Bf = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Bf, \varphi_n)}{\mu_n + \varepsilon} \varphi_n$$

и

$$\| \varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1} Bf \|^2_{p_0} = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Bf, \varphi_n)_{p_0}|^2}{(\mu_n + \varepsilon)^2} = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, B^*\varphi_n)_{p_0}|^2}{(\mu_n + \varepsilon)^2}, \qquad (38)$$

где сопряженный к B оператор B^* определяется формулой

$$B^*f = p_0(x) \int_S \frac{\overline{b(\xi, x; k)}}{p_0(\xi)} f(\xi)\, dS_\xi,$$

отсюда, так как $b(\xi, x; k) \in L^2_{p_0}(S)$, в силу полноты системы собственных функций следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B^*\varphi_n(x)|^2 = p_0^2(x) \int_S |b(\xi, x; k)|^2 \frac{1}{p_0(\xi)} dS_\xi < \infty.$$

Значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|B^*\varphi_n\|^2_{p_0} = \int_S p_0(x) \int_S \frac{|b(\xi, x; k)|^2}{p_0(\xi)} dS_\xi \, dS_x \tag{39}$$

сходится, причем равномерно по $k \in F$.

Пользуясь неравенством Буняковского — Шварца, из формулы (38) получим

$$\|\varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1} Bf\|_{p_0} \leqslant \|f\|^2_{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|B^*\varphi_n\|^2_{p_0}}{(\mu_n + \varepsilon)^2} \varepsilon^2,$$

т. е.

$$\|\varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1} B\|_{p_0} \leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|B^*\varphi_n\|^2_{p_0}}{(\mu_n + \varepsilon)^2} \varepsilon^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда в силу равномерной по k сходимости ряда (39) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{k \in F} \|\varepsilon(\varepsilon I + R_{p_0})^{-1}\|_{p_0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть k — какой-нибудь полюс резольвентного ядра $\Gamma(x, \xi; k)$ оператора B, а $\sigma_0(x)$ — соответствующее данному полюсу ненулевое решение однородного уравнения

$$\sigma_0 + B\sigma_0 = 0. \tag{40}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор R_{p_0}, в силу леммы получим:

$$p_0(x) \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi = 0 \quad x \in S.$$

Следовательно, функция

$$\psi(x, k) = \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi,$$

удовлетворяющая в областях T_i и T_e уравнению Гельмгольца $\Delta\psi + k^2\psi = 0$, равна нулю на поверхности S. Обратно, если функция $\varphi(x, k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в T_i и обращается в нуль на S, то, как легко видеть,

$$\int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \frac{\partial\varphi(\xi, k)}{\partial n} dS_\xi = 0 \quad \text{при } x \in S,$$

и, значит, $\frac{\partial\varphi(x, k)}{\partial n}$ есть ненулевое решение уравнения (40). Таким образом, корни квадратные $\pm\sqrt{\lambda_n}$ из собственных значений λ_n оператора $-\Delta$, рассматриваемого в области T_i с нулевым граничным условием, заведомо являются полюсами резольвентного ядра $\Gamma(x, \xi; k)$. Нетрудно также показать, что в области $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ других полюсов $\Gamma(x, \xi; k)$ нет.

Следовательно, ядро $\Gamma(x, \xi; k)$ имеет своими вещественными полюса последовательность $\pm\sqrt{\lambda_n}$ и, кроме того, оно может иметь полюсы в нижней полуплоскости, которым соответствуют решения однородного уравнения Гельмгольца, обращающиеся в нуль на поверхности S.

Пусть k отлично от всех полюсов $\Gamma(x, \xi; k)$. Тогда, пользуясь леммой и замечанием к ней, аналогично предыдущему найдем, что решение $\sigma_0(x, y$ уравнения

$$\sigma_0 + B\sigma_0 = -q(x, y; k) \quad (4$$

удовлетворяет равенству

$$\int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\sigma_0(\xi, y; k)\,dS_\xi = -\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad x \in S.$$

Отсюда следует, что функция

$$Q(x, y; k) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\sigma_0(\xi, y; k)\,dS_\xi \quad (4$$

при $\operatorname{Im} k > 0$ и $x, y \in T_i$ ($x, y \in T_e$) есть функция Грина $G_i(x, y; k)$ ($G_e(x, y; k$ для уравнения Гельмгольца в области T_i (T_e) при нулевом граничном у ловии на поверхности S. При других значениях k $Q(x, y; k)$ являет аналитическим продолжением функции $G_i(x, y; k)$ ($G_e(x, y; k)$), которое, со ласно предыдущему, есть мероморфная функция во всей плоскости ко плексного переменного k.

Если x и y принадлежит разным областям T_i и T_e, то функци $Q(x, y; k)$ удовлетворяет по x однородному уравнению Гельмгольца в со ответствующей области и равна нулю на S. Поэтому при $\operatorname{Im} k > 0$ он равна нулю тождественно, а, значит, ее аналитическое продолжение то равно нулю.

Теорема 3. *Пусть в краевой задаче (2), (3а) — (3б) $p(x) = \lambda p_0(x$ Тогда при $\lambda \to \infty$ функция Грина $G(x, y; k)$ этой задачи (при $\operatorname{Im} k <$ ее аналитическое продолжение) имеет предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} G(x, y; k) = \begin{cases} G_i(x, y; k) & x, y \in T_i \\ G_e(x, y; k) & x, y \in T_e \\ 0 & x \in T_i,\ y \in T_e \text{ или } y \in T_i,\ x \in T_e \end{cases}$$

Здесь при $\operatorname{Im} k > 0$ $G_i(x, y; k)$ и $G_e(x, y; k)$ — функции Грина дл уравнения Гельмгольца в областях T_i и T_e при нулевом граничном услови на S, а при других k, не совпадающих с полюсами ядра $\Gamma(x, y; k)$ — и аналитические продолжения.

Доказательство. При рассматриваемых значениях k в силу леммы 4 решение $\sigma(x, y; k)$ уравнения (11) при $\lambda \to \infty$ стремится в метрик $L^2_{p_0}(S)$ к решению $\sigma_0(x, y; k)$ уравнения (41). Отсюда, пользуясь представ лением (4_1) функции Грина $G(x, y; k)$ и формулой (42), нетрудно показать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} G(x, y; k) = Q(x, y; k)$$

равномерно по x, y, лежащих в любой ограниченной области на положительном расстоянии от поверхности S. Теорема доказана.

Следствие. *Если x и y принадлежат области T_i, то функция ра $G(x, y; k)$ краевой задачи (2), (3а)—(3б) с $p(x) = \lambda p_0(x)$ при достаточно большом λ имеет в нижней полуплоскости полюсы, которые при $\to \infty$ стремятся к полюсам $\pm \sqrt{\lambda_n}$ функции $G_i(x, y; k)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.» 65 (107): 3 (1964), 458—472.
2. С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.
3. В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М. — Л., Гостехиздат, 1950.
4. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, М. —Л., ОНТИ, 1934.
5. Д. М. Эйдус. Оценки производных функции Грина. «Докл. АН СССР», 106, № 2 (1956), 207—210.