О ФУНКЦИЯХ, ГОЛОМОРФНЫХ ВНУТРИ УГЛА И ИМЕЮЩИХ ТАМ НУЛЕВОЙ ПОРЯДОК

А. Ф. Гришин

Как известно, для каждой целой функции $f(z)$ конечного порядка можно подобрать уточненный порядок $\rho(r)$ так, чтобы

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}}\neq 0,\ \infty. \tag{1}$$

При этом уточненным порядком называется функция $\rho(r)$, которая удовлетворяет условиям

$$\rho(r)\to\rho\geqslant 0,\quad r\ln r\rho'(r)\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{2}$$

Если $\rho(r)$ уточненный порядок функции $f(z)$, т. е. выполнено соотношение (1), и $\rho>0$, то ее индикатор

$$h_f(\theta)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}$$

есть тригонометрически выпуклая функция*, т. е. при $\theta_1<\theta_2<\theta_3$, $\theta_3-\theta_1<\frac{\pi}{\rho}$

$$h_f(\theta_1)\sin\rho(\theta_2-\theta_3)+h_f(\theta_2)\sin\rho(\theta_3-\theta_1)+h_f(\theta_3)\sin\rho(\theta_1-\theta_2)\leqslant 0. \tag{3}$$

Если $\rho=0$, то $\rho(r)$ называют нулевым уточненным порядком. В этом случае дополнительно требуется, чтобы $r^{\rho(r)}\to\infty$ при $r\to\infty$.

С введением уточненного порядка стало возможным рассмотрение индикатора функций нулевого порядка. В этой работе рассматриваются функции голоморфные и нулевого уточненного порядка внутри угла.

О п р е д е л е н и е. *Функция $f(z)$, голоморфная внутри угла $\alpha<\arg z<\beta$, имеет там нулевой уточненный порядок, если*

1) *для любых $\varepsilon>0$ и замкнутого угла $\alpha<\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2<\beta$ найдется R такое, что при $\arg z\in[\theta_1,\theta_2]$ и $|z|>R$ будет выполняться неравенство*

$$|f(z)|<e^{r^{\varepsilon}};$$

2) *существует множество лучей $\{\theta_n\}\subset(\alpha,\beta)$, замыкание которого содержит граничные лучи, и такое, что величины*

$$h(\theta_n)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta_n})|}{r^{\rho(r)}}$$

ограничены при каждом n.

---

* См. [1], стр. 96.

Если требовать непрерывность функции $|f(z)|$ вплоть до границы, то множество $\{\theta_n\}$ может состоять лишь из двух граничных и одного внутреннего луча.

В дальнейшем большую роль будет играть

Лемма 1. *Пусть $V(r)=r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ произвольный нулевой уточненный порядок и*

$$u(z)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2},\quad z=re^{i\theta}=x+iy,$$

где

$$\psi(t)=\begin{cases}\alpha V(t) & t\geqslant T_0\\ 0 & -t_0\leqslant t\leqslant t_0,\\ \beta V(|t|). & t\leqslant -T_0\end{cases}$$

а на интервалах $(-T_0,\ -t_0)$, $(t_0,\ T_0)$ определяется с помощью линейной интерполяции. Тогда при $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(re^{i\theta})}{V(r)}=\alpha+(\beta-\alpha)\frac{\theta}{\pi}.$$

Доказательство. Имеем

$$u(z)=\alpha\frac{y}{\pi}\int\limits_{T_0}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+\beta\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-T_0}\frac{V(|t|)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+O(1)=\alpha I'+\beta I''+O(1).$$

Разбив интервал интегрирования $(T_0,\ \infty)$ на три интервала, получим

$$I'=\frac{r\sin\theta}{\pi}\int\limits_{T_0}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}=\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}+\int\limits_{\varepsilon r}^{Nr}+\int\limits_{Nr}^{\infty}=I_1'+I_2'+I_3'.$$

Для I_1' имеем оценку

$$I_1'=\frac{r\sin\theta}{\pi r^2}\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}\frac{V(t)\,dt}{\left(\frac{t}{r}\right)^2-2\left(\frac{t}{r}\right)\cos\theta+1}<\frac{1}{\pi(1-\varepsilon)^2r}\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}V(t)\,dt.$$

Оценим последний интеграл

$$\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}V(t)\,dt=\int\limits_{T_0}^{K}V(t)\,dt+\int\limits_{K}^{\varepsilon r}V(t)\,dt=O(1)+tV(t)\Big|_K^{\varepsilon r}-\int\limits_{K}^{\varepsilon r}[\rho(t)+$$
$$+t\ln t\rho'(t)]\,V(t)\,dt.$$

Последнее равенство получено интегрированием по частям. Из (2) следует, что $|\rho(t)+t\ln t\,\rho'(t)|<\varepsilon$ при $K>K(\varepsilon)$ и поэтому

$$\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}V(t)\,dt<O(1)+\varepsilon rV(\varepsilon r)+\varepsilon\int\limits_{T_0}^{\varepsilon r}V(t)\,dt.$$

Таким образом, имеем:

$$I_1'<O(1)+\frac{\varepsilon}{\pi(1-\varepsilon)^3}V(\varepsilon r).$$

Оценим теперь I_3'.

$$I_3' = \frac{r\sin\theta}{\pi}\int_{Nr}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2} < \frac{r}{\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}\int_{Nr}^{\infty}\frac{V(t)}{t^2}\,dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_{Nr}^{\infty}\frac{V(t)}{t^2}\,dt = -\frac{V(t)}{t}\Big|_{Nr}^{\infty} + \int_{Nr}^{\infty}\frac{[\rho(t)+t\ln t\rho'(t)]\,V(t)}{t^2}\,dt.$$

Из (2) получаем

$$\int_{Nr}^{\infty}\frac{V(t)}{t^2}\,dt < \frac{V(Nr)}{Nr} + \varepsilon\int_{Nr}^{\infty}\frac{V(t)}{t^2}\,dt$$

окончательно

$$I_3' < \frac{1}{N}\,\frac{1}{\pi(1-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}V(Nr).$$

Осталось оценить I_2'. Функция $V(t)$ есть медленно растущая*, т. е. по любым $\varepsilon>0$, $N>0$, $\delta>0$ можно найти $R(\varepsilon,\delta,N)$ так, чтобы при $\varepsilon\leqslant t\leqslant N$ и $r>R(\varepsilon,\delta,N)$ выполнялись неравенства

$$(1-\delta)V(r) < V(tr) < (1+\delta)V(r). \tag{4}$$

Поэтому при $r>R(\varepsilon,\delta,N)$

$$I_2' < (1+\delta)V(r)\frac{y}{\pi}\int_{\varepsilon r}^{Nr}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2} < (1+\delta)V(r)\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right).$$

Точно так же при достаточно малом ε и большом N

$$I_2' > (1-\delta)V(r)\frac{y}{\pi}\int_{\varepsilon r}^{Nr}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2} > (1-\delta)V(r)\left(1-\frac{\theta}{\pi}-\eta\right),$$

где η можно сделать как угодно малым.

Используя (4) и оценки I_1', I_2', I_3', получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{I'(re^{i\theta})}{V(r)} = 1-\frac{\theta}{\pi}.$$

Аналогично получается, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{I''(re^{i\theta})}{V(r)} = \frac{\theta}{\pi}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. *Так как $u(re^{i\theta})$ есть гармоническая функция в верхней полуплоскости, непрерывная вплоть до границы и с гладкими граничными значениями, то*

$$f(z) = e^{u(z)+iv(z)},$$

где $v(z)$ — гармонически сопряженная с $u(z)$, голоморфная в верхней полуплоскости, не имеющая там нулей и непрерывная вплоть до границы.

* См. [1], стр. 48.

Для этой функции имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)}=\alpha+(\beta-\alpha)\frac{\theta}{\pi}.$$

Теорема 1. *Если функция $\varphi(z)$ голоморфна в угле $\alpha<\arg z<\beta$ и имеет там нулевой уточненный порядок $\rho(r)$, то ее индикатор относительно этого порядка является выпуклой функцией, ограниченной в любом внутреннем угле.*

Доказательство. Пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(re^{i\theta_\nu})|}{V(r)}=h_\nu\quad(\nu=1,2).$$

Построим функцию $f_\varepsilon(z)$ такую, как в замечании к лемме 1 с индикатором

$$h_\varepsilon(\theta)=(h_1+\varepsilon)\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}+(h_2+\varepsilon)\frac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$$

и рассмотрим отношение

$$\Psi(z)=\frac{\varphi(z)}{f_\varepsilon(z)}.$$

Оценим его на лучах $\arg z=\theta_1$ и $\arg z=\theta_2$:

$$\left|\frac{\varphi(re^{i\theta_1})}{f_\varepsilon(re^{i\theta_1})}\right|<\left|\frac{e^{\left(h_1+\frac{\varepsilon}{3}\right)V(r)}}{e^{\left(h_1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}\right)V(r)}}\right|<1$$

при $r>R\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. На сегменте $\left[0,\ R\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$ функция $|\Psi(re^{i\theta_1})|$ непрерывна, а поэтому ограничена. Отсюда следует, что $\Psi(re^{i\theta_1})$ ограничена на всем луче. Точно так же получается ограниченность $\Psi(re^{i\theta_2})$. Из теоремы Фрагмена — Линделефа следует ограниченность $\Psi(z)$ внутри всего угла $\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2$. Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{V(r)}<h_\varepsilon(\theta),\quad \theta\in[\theta_1,\theta_2].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{V(r)}\leqslant h_1\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}+h_2\frac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}.$$

Это неравенство показывает, что индикатор является выпуклой функцией. Из выпуклости индикатора и ограниченности его на множестве $\{\theta_n\}$, замыкание которого содержит точки α и β, следует ограниченность его на любом внутреннем сегменте. Теорема 1 доказана.

В связи с теоремой 1 интересно отметить, что если неравенство (3) разделить на ρ и перейти к пределу при $\rho\to0$, то получим неравенство, характеризующее выпуклые функции.

Так как индикатор целой функции является периодической функцией, то в силу теоремы 1 он будет константой. Этот факт установлен А. А. Гольдбергом (см. [2]). Докажем теперь теорему, обратную к теореме 1.

Теорема 2. *Каковы бы ни были выпуклая функция $h(\theta)$, $0<\theta<\pi$, нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ и счетное множество $\{\theta_n\}\subset(0,\pi)$, невключающее угловых точек функции $h(\theta)$, существует функция $F(z)$, го-*

морфная в верхней полуплоскости, непрерывная вплоть до границы, индикатор которой относительно $\rho(r)$ *совпадает с* $h(\theta)$, *причем*

$$h(\theta_n) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln|F(re^{i\theta_n})|}{V(r)}.$$

налогичная теорема для полуполосы при $r^{\rho(r)} = \ln r$ есть у Карлемана м. [3]).

Доказательство. Через точку $(\theta_n, h(\theta_n))$ проводим касательную $= h_n(\theta)$ к кривой $y = h(\theta)$. Строим функцию $F_n(z)$, такую как в замечании к лемме 1, с индикатором $h_n(\theta)$ относительно порядка $\rho(r)$. Функции (t), участвующие в построении $F_n(z)$, выбираем так, чтобы $|\psi_n(t)| < V^2(|t|)$. Это можно сделать за счет выбора числа $t_{0,n}$. Пусть

$$u_1(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2(|t|)\,dt}{(t-x)^2 + y^2},$$

гда

$$|F_n(z)| < e^{u_1(z)}. \tag{5}$$

бозначим

$$A_n = \max_{m \leqslant n} \max_{r} \left| \frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})} \right|.$$

неравенства $h_n(\theta_m) < h_m(\theta_m)$, имеющего место в силу выпуклости $h(\theta)$, едует, что $1 \leqslant A_n < \infty$. Определим функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 A_n} F_n(z).$$

неравенства (5) получается оценка

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 A_n} F_n(z) \right| < e^{u_1(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

которой следует, что функция $F(z)$ голоморфная в верхней полуплоскости и непрерывная вплоть до границы. Получим более строгие оценки нкции $F(z)$ на лучах $\arg z = \theta_m$.

$$|F(re^{i\theta_m})| < |F_m(re^{i\theta_m})| \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 A_n} \left| \frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})} \right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 A_n} \left| \frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})} \right| \right].$$

неравенства $h_n(\theta_m) < h_m(\theta_m)$ следует существование $R_{n,m}(\varepsilon)$, $n \neq m$ кого, что при $r > R_{n,m}(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$\left| \frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})} \right| < \varepsilon.$$

мечая, что по определению A_n для $n > m$

$$\frac{1}{A_n} \left| \frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})} \right| < 1,$$

учим при $r > R_m(1) = \max_{n<m} R_{n,m}(1)$

$$|F(re^{i\theta_m})| < |F_m(re^{i\theta_m})| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{6}$$

Оценим теперь в обратную сторону

$$|F(re^{i\theta_m})|>|F_m(re^{i\theta_m})|\left[\frac{1}{m^2A_m}-\sum_{n=1}^{N}{}'\frac{1}{n^2A_n}\left|\frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})}\right|-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2A_n}\left|\frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})}\right|\right].$$

Повторяя предыдущие оценки, получим при $r>R_N(\varepsilon)$

$$|F(re^{i\theta_m})|>|F_m(re^{i\theta_m})|\left(\frac{1}{m^2A_m}-\varepsilon\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right).$$

Выбирая N достаточно большим, а ε — маленьким, получим

$$|F(re^{i\theta_m})|>C_m|F_m(re^{i\theta_m})|,\quad C_m>0. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$h_F(\theta_m)=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|F(re^{i\theta_m})|}{V(r)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|F_m(re^{i\theta_m})|}{V(r)}=h_m(\theta_m)=h(\theta_m).$$

Можем считать, что множество $\{\theta_m\}$ плотно в интервале $(0,\pi)$, иначе мы добавили бы новые точки. Из непрерывности индикатора и плотности множества $\{\theta_m\}$ следует, что $h_F(\theta)\equiv h(\theta)$. Можно добавить, что рассмотрение верхней полуплоскости несущественно. Случай любого угла можно свести к полуплоскости конформным отображением $W=e^{i\varphi}z^{\gamma}$.

Замечание относительно граничных лучей. Если на одном конце, например, в нуле, функция $h(\theta)$ ограничена и ограничена $h'(\theta)$, то мы можем продолжить $h(\theta)$ как выпуклую за точку нуль. В этом случае можем считать, что функция $F(z)$ голоморфна в более широком угле и точка $0\in\{\theta_m\}$. Если $h(\theta)$ ограничена в нуле, а $h'(\theta)$ неограничена, то мы не можем продолжить функцию $h(\theta)$ как выпуклую за точку нуль. В этом случае нельзя найти функцию голоморфную в более широком угле, индикатор которой на $(0,\pi)$ совпадал бы с $h(\theta)$. Однако мы построили функцию $F(z)$ непрерывной вплоть до границы (даже в случае, когда $h(\theta)$ неограничена). Покажем, что можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(r)|}{V(r)}=h(0).$$

Для этого достаточно взять такие A_n

$$A_n=\max\left(\max_{m<n}\max_{r}\left|\frac{F_n(re^{i\theta_m})}{F_m(re^{i\theta_m})}\right|,\ \max_{r}\left|\frac{F_n(r)}{F_0(r)}\right|\right),$$

где $F_0(z)$ функция с индикатором, тождественно равным $h(0)$. Действительно,

$$|F(r)|<|F_0(r)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2A_n}\left|\frac{F_n(r)}{F_0(r)}\right|<|F_0(r)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Отсюда $h_F(0)\leqslant h(0)$, и $h_F(0)=h(0)$ в силу выпуклости $h_F(\theta)$. Наконец, если $h(\theta)$ неограничена в окрестности нуля, то в силу выпуклости $h_F(\theta)$, имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(r)|}{r^{\rho(r)}}=\infty.$$

В дальнейшем мы построим функцию, индикатор которой имеет произвольный конечный скачок на граничных лучах.

Теперь рассмотрим вопросы, связанные с распределением нулей функций нулевого порядка, голоморфных в угле. Через $n(r, \vartheta, \theta)$ как обычно обозначается число корней функции $f(z)$ в секторе $|z| \leqslant r$, $\vartheta < \arg z \leqslant \theta$.

$$\overline{\Delta}(\vartheta, \theta) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{V(r)}$$

называется верхней плотностью корней функции $f(z)$ относительно порядка $\rho(r)$, а соответствующий нижний предел $\underline{\Delta}(\vartheta, \theta)$ — нижней плотностью. Если $\overline{\Delta}(\vartheta, \theta) = \underline{\Delta}(\vartheta, \theta) = \Delta(\vartheta, \theta)$ при всех $\alpha < \vartheta < \theta < \beta$, за исключением, быть может, счетного числа лучей, то говорят, что $\Delta(\vartheta, \theta)$ есть плотность множества корней функции $f(z)$ внутри угла (α, β). В случае $\rho > 0$ множество корней $\{a_k\}$ называется правильно распределенным по отношению к порядку $\rho(r)$, если в случае нецелого ρ существует их плотность во всей плоскости, а в случае целого ρ требуется еще, чтобы при некотором c существовал предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{\rho(r)-\rho}} \Big(c + \sum_{|a_n| < r} a_n^{-\rho}\Big).$$

Для целых функций положительного порядка доказывается (см. [1] глава III), что для того, чтобы существовал предел

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ r \overline{\in} E_0}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}},$$

где E_0 обозначает множество линейной плотности нуль, необходимо и достаточно, чтобы множество корней функции $f(z)$ было правильно распределено по отношению к порядку $\rho(r)$. Для случая функций нулевого порядка, голоморфных в угле, аналогичных теорем не удалось установить. Однако аналогичные результаты получаются в терминах функции

$$J_f^r(\theta) = \int_0^r \frac{\ln|f(te^{i\theta})|}{t}\, dt.$$

Для существования написанного интеграла требуем, чтобы $|f(0)| = 1$.

В дальнейшем будет исследована связь между наличием плотности, корней функции $f(z)$ и существованием предела

$$H(\theta) = \lim_{r \to \infty} \frac{J_f^r(\theta)}{r^{\rho(r)}}.$$

Определение. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри угла $\alpha < \arg z < \beta$. Функция $J_f^r(\theta)$ имеет внутри этого угла нулевой уточненный порядок $\rho(r)$, если*

1) для любых $\varepsilon > 0$ и замкнутого угла $[\theta_1, \theta_2] \subset (\alpha, \beta)$ найдется R такое, что при $r > R$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$;

$$J_f^r(\theta) < r^{\varepsilon}$$

2) существует множество лучей $\{\theta_n\} \subset (\alpha, \beta)$, замыкание которого содержит граничные лучи, и такое, что величины

$$H(\theta_n) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{J_f^r(\theta)}{r^{\rho(r)}}$$

ограничены при каждом n.

Если требовать непрерывности $J_f^r(\theta)$ вплоть до границы, то в качестве множества $\{\theta_n\}$ можно взять два граничных и один внутренний луч. Следует отметить, что $J_f^r(\theta)$ имеет не такой порядок, как $f(z)$. Если существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}},$$

то порядок $\rho_1(r)$ функция $J_f^r(\theta)$ определяется из равенства

$$r^{\rho_1(r)}=\int_0^r\frac{t^{\rho(t)}}{t}\,dt.$$

Пользуясь правилом Лопиталя, можно убедиться, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^{\rho(r)}}{r^{\rho_1(r)}}=0.$$

Если $J_f^r(\theta)$ имеет своим порядком $\rho(r)$, то

$$H(\theta)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{J_f^r(\theta)}{r^{\rho(r)}}$$

называется индикатором функции $J_f^r(\theta)$ относительно порядка $\rho(r)$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри угла (α,β). Если $J_f^r(\theta)$ имеет своим порядком $\rho(r)$, то ее индикатор $H(\theta)$ есть выпуклая функция на интервале (α,β).*

Функция $J_f^r(\theta)$ — субгармоническая внутри угла (α,β). Для субгармонических функций верна теорема Фрагмена — Линделефа. Поэтому доказательство леммы 2 в существенном не отличается от доказательства теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть*

$$F(z,\varphi,\psi)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{z}{r_ke^{i\varphi}}}{1-\dfrac{z}{r_ke^{-i\psi}}},\quad 0\leqslant\varphi<\pi,\ 0<\psi\leqslant\pi,$$

тогда

$$J_F^r(\theta)=\int_0^\infty\ln\left|\frac{e^{i\theta}-te^{i\varphi}}{e^{i\theta}-te^{-i\psi}}\right|\frac{n(rt)}{t}\,dt.$$

Доказательство. Имеем

$$\ln|F(z,\varphi,\psi)|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|\frac{r_ke^{i\varphi}-z}{r_ke^{-i\psi}-z}\right|=\int_0^\infty\ln\left|\frac{te^{i\varphi}-z}{te^{-i\psi}-z}\right|dn(t).$$

Делая замену $t=ur$, получим

$$\ln|F(z,\varphi,\psi)|=\int_0^\infty\ln\left|\frac{ue^{i\varphi}-e^{i\theta}}{ue^{-i\psi}-e^{i\theta}}\right|dn(ur).$$

Вычисляем теперь $J_F^r(\theta)$.

$$J_F^r(\theta) = \int_0^r \frac{\ln|F(te^{i\theta})|}{t}\,dt = \int_0^\infty \ln\left|\frac{ue^{i\varphi} - e^{i\theta}}{ue^{-i\psi} - e^{i\theta}}\right| d\int_0^r \frac{n(ut)}{t}\,dt.$$

Отсюда

$$J_F^r(\theta) = \int_0^\infty \ln\left|\frac{ue^{i\varphi} - e^{i\theta}}{ue^{-i\psi} - e^{i\theta}}\right| d\int_0^{ru} \frac{n(v)}{v}\,dv = \int_0^\infty \ln\left|\frac{ue^{i\varphi} - e^{i\theta}}{ue^{-i\psi} - e^{i\theta}}\right| \frac{n(ur)}{u}\,du$$

Это и есть нужное представление.

Лемма 4. *Если* $f(z) = F(z, \varphi, \psi)$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{V(r)} = 1$,

$$h(\theta, \varphi, \psi) = \lim \frac{J_f^r(\theta)}{V(r)} = \int_0^\infty \ln\left|\frac{ue^{i\varphi} - e^{i\theta}}{ue^{-i\psi} - e^{i\theta}}\right| \frac{du}{u}.$$

При этом

$$h(\theta, \varphi, \psi) = \begin{cases} (\varphi + \psi - 2\pi)\,\theta + (\varphi + \psi)\,\pi - \frac{\varphi^2 - \psi^2}{2} & \theta \leqslant \varphi \\ (\varphi + \psi)\,\theta - (\varphi + \psi)\,\pi - \frac{\varphi^2 - \psi^2}{2} & \theta > \varphi \end{cases}$$

Доказательство несущественно отличается от доказательства леммы 1.

Замечание 1. Лемму 4 можно уточнить. Пусть

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)}{V(r)},$$

а $\underline{\Delta}$ — соответствующий нижний предел, тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{J_f^r(\theta)}{V(r)} = \underline{\Delta} h(\theta, \varphi, \psi),$$

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{J_f^r(\theta)}{V(r)} = \overline{\Delta} h(\theta, \varphi, \psi).$$

Замечание 2. Если $f(z) = \prod\limits_{i=1}^{n} F(z, \varphi_i, \psi_i)$ и плотность корней функции $F(z, \varphi_i, \psi_i)$ равна α_i, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{J_f^r(\theta)}{V(r)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(\theta, \varphi_i, \psi_i).$$

Теорема 3. *Если множество корней* $\{a_k\}$ *функции* $f(z)$, *голоморфной в верхней полуплоскости и непрерывной вплоть до границы, имеет плотность*

$$\Delta(\vartheta, \theta) = \lim_{r\to\infty}\frac{n(r, \vartheta, \theta)}{V(r)} \tag{8}$$

для всех лучей, исключая, быть может, счетное множество и $\Delta(-\varepsilon, \pi) < \infty$, *то из существования предела*

$$H(\theta) = \lim_{r\to\infty}\frac{J_f^r(\theta)}{V(r)}$$

при $\theta = 0, \pi$ *следует его существование при* $0 < \theta < \pi$.

Доказательство. По формуле Р. Неванлинны ([1], стр. 31) имеем

$$\ln|f(z)| = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt + \ln|\chi(z)|,$$

где

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-\frac{z}{a_k}}{1-\frac{z}{\bar a_k}}.$$

Вычислим $J_f^r(\theta)$.

$$J_f^r(\theta) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{J_f^{-t}(\pi)\,dt}{(t-x)^2+y^2} + \frac{y}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{J_f^{t}(0)\,dt}{(t-x)^2+y^2} + J_\chi^r(\theta).$$

Существование требуемого предела для первых двух слагаемых следует из леммы 1. Осталось рассмотреть $J_\chi^r(\theta)$. Зафиксируем некоторый луч θ_0. Разобьем верхнюю и нижнюю полуплоскость δ-сетями $0=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_n=\pi$, $0=-\varphi_0=-\psi_0>-\varphi_1=-\psi_1>\cdots>-\varphi_n=-\psi_n=\pi$ так, чтобы среди лучей деления не было особых лучей (тех, для которых не существует предел (8)) и чтобы лучи $\arg z=\theta_0$, $\arg z=\pi-\theta_0$ были биссектрисами тех наименьших углов, которым они принадлежат. Все $a_j\in(\varphi_k, \varphi_{k+1}]\not\ni\theta_0$ сместим на граничный луч (обозначим его через φ_k'), так, чтобы

$$\left|1-\frac{re^{i\theta_0}}{a_j}\right| \geqslant \left|1-\frac{re^{i\theta_0}}{|a_j|\,e^{i\varphi_k'}}\right|,$$

а все $a_j\in(\varphi_i, \varphi_{i+1}]\ni\theta_0$ сместим на луч θ_0 и обозначим его через φ_i'. Все $\bar a_j\in[-\psi_{k+1}, -\psi_k)$ сместим на граничный луч (обозначим его через ψ_k'), так, чтобы

$$\left|1-\frac{re^{i\theta_0}}{\bar a_j}\right| \leqslant \left|1-\frac{re^{i\theta_0}}{|a_j|\,e^{-i\psi_k'}}\right|.$$

После этих смещений мы получим

$$\chi_1(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\ \prod_{a_j\in(\varphi_k,\ \varphi_{k+1}]} \left|\frac{1-\frac{z}{|a_j|\,e^{i\varphi_k'}}}{1-\frac{z}{|a_j|\,e^{-i\psi_k'}}}\right|,$$

причем $|\chi_1(re^{i\theta_0})| \leqslant |\chi(re^{i\theta_0})|$. (9)

Проделывая подобные операции, можно получить функцию

$$\chi_2(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\ \prod_{a_j\in(\varphi_k,\ \varphi_{k+1}]} \left|\frac{1-\frac{z}{|a_j|\,e^{i\varphi_k''}}}{1-\frac{z}{|a_j|\,e^{-i\psi_k''}}}\right|,$$

причем $|\chi(re^{i\theta_0})| \leqslant |\chi_2(re^{i\theta_0})|$. (10)

Из неравенств (9), (10) по определению $J_\chi^r(\theta)$ будем иметь

$$J_{\chi_1}^r(\theta_0) \leqslant J_\chi^r(\theta_0) \leqslant J_{\chi_2}^r(\theta_0).$$

Функции $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ представляются в виде конечного произведения функций вида $F(z, \varphi_i, \psi_i)$, причем у каждой функции имеется плотность корней α_i относительно $\rho(r)$, так как лучи деления выбирались неособенными. Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{J^r_\chi(\theta_0)}{V(r)} - \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{J^r_\chi(\theta_0)}{V(r)} \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{J^r_{\chi_2}(\theta_0)}{V(r)} - \lim_{r\to\infty} \frac{J^r_{\chi_1}(\theta_0)}{V(r)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i [h(\theta, \varphi_i', \psi_i') - h(\theta, \varphi_i'', \psi_i'')].$$

Но $|\varphi_k'' - \varphi_k'| \leqslant \delta$, $|\psi_k'' - \psi_k| \leqslant \delta$, а функция $h(\theta, \varphi, \psi)$ равномерно непрерывна по своим аргументам. Поэтому по любому ε можно найти $\delta(\varepsilon)$, что при $\delta < \delta(\varepsilon)$ каждая из величин в квадратных скобках будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{\sum \alpha_i} = \frac{\varepsilon}{\Delta(-\varepsilon, \pi)}$.

Итак, доказано, что существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{J^r_\chi(\theta_0)}{V(r)}.$$

Тем самым теорема доказана.

Продолжая рассмотрение функций вида

$$\chi(z) = \prod_k \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \frac{z}{\bar{a}_k}},$$

мы в дополнение к теореме 2 построим функцию $\chi(z)$ с линейным индикатором относительного порядка $\rho(r)$, который строго меньше нуля на интервале $(0, \pi)$. Разрыва индикатора в крайних точках добьемся за счет накопления корней у граничных лучей. Оценим теперь на некотором луче $\arg z = \theta$, $0 < \theta < \pi$, функцию

$$\ln\left|\frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}\right|, \quad a_k = r_k e^{i\theta_k} = x_k + iy_k, \quad y_k > 0.$$

$$\ln\left|\frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}\right| = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 - 2rr_k\cos(\theta - \theta_k) + r_k^2}{r^2 - 2rr_k\cos(\theta + \theta_k) + r_k^2} = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{4yy_k}{|z - \bar{a}_k|^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 - u_k).$$

Величина $u_k \to 0$ при $\theta_k \to 0$. Действительно,

$$u_k = \frac{4yy_k}{|z - \bar{a}_k|^2} < \frac{4y_k}{|z - \bar{a}_k|} < \frac{4\sin\theta_k}{\sin\theta}.$$

Поэтому

$$\ln\left|\frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}\right| = -\frac{2yy_k}{|z - \bar{a}_k|^2}(1 + \varepsilon_k) = -\frac{2yy_k}{|z - |a_k||^2} \cdot \left|\frac{z - |a_k|}{z - \bar{a}_k}\right|^2 (1 + \varepsilon_k),$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $\theta_k \to 0$.

Очевидно, отношение

$$\left|\frac{z - |a_k|}{z - \bar{a}_k}\right|^2 = 1 + \frac{2rr_k[\cos(\theta + \theta_k) - \cos\theta]}{r^2 + r_k^2 - 2rr_k\cos(\theta + \theta_k)} \to 1$$

при $\theta_k \to 0$ равномерно относительно r и r_k.

Из этих оценок следует, что

$$\ln\left|\frac{z-a_k}{z-\bar{a}_k}\right| = -\frac{2yy_k(1+\gamma_k)}{|z-|a_k||^2},$$

где $\gamma_k \to 0$ при $\theta_k \to 0$.

Рассмотрим теперь

$$\chi_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\dfrac{z}{a_k}}{1-\dfrac{z}{\bar{a}_k}}\right)^{n_k}.$$

Модуль a_k выбираем равным корню уравнения

$$k = \int_0^r \frac{t^{\rho(t)}}{t}\,dt = V_1(r),$$

а $\arg a_k = \theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Число n_k выбираем так, чтобы

$$\left|n_k y_k - \frac{1}{2}\alpha|a_k|\right| < y_k.$$

Тогда

$$\ln|\chi_1(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \ln\left|\frac{z-a_k}{z-\bar{a}_k}\right| = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2yy_k n_k(1+\gamma_k)}{|z-|a_k||^2} =$$

$$= -\int_0^{\infty}\frac{\alpha yt(1+\gamma_1(t))}{|z-t|^2}\,d[V_1(t)],$$

где $\gamma_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Несложными преобразованиями можно показать, что мы сделаем небольшую относительную ошибку, если отбросим $\gamma_1(t)$ и снимем знак целой части при $V_1(t)$ в дифференциале. Именно

$$\ln|\chi_1(z)| = -\alpha y\int_0^{\infty}\frac{t\,dV_1(t)}{|z-t|^2}(1+o(1)).$$

Вспоминая значение $V_1(t)$, по лемме 1 получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\chi_1(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = -\alpha\pi\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right).$$

Аналогичным способом строится $\chi_2(z)$ такая, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\chi_2(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = -\beta\theta.$$

Тогда для $\chi(z) = \chi_1(z)\chi_2(z)$ будет выполнено

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\chi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = -\alpha\pi + (\alpha-\beta)\theta.$$

При этом $\ln|\chi(\pm r)| = 0$. Нужный нам пример построен.

Лемма 5. *Если при любом $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ существует предел*

$$H(\theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{J_F^r(\theta)}{V(r)},$$

$$\sup_{r,\,\theta\in(\eta,\,\pi-\eta)} \left| \frac{J_F^r(\theta)}{V(r)} \right| < \infty$$

. любом положительном η.

Доказательство. По формуле Р. Неванлинны имеем

$$\ln|F(z)| = \frac{r\sin\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(t)|\,dt}{t^2 - 2tr\cos\theta + r^2} + \ln\left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{a_k}}{1 - \dfrac{z}{\bar a_k}} \right|.$$

..юда получим, что

$$J_F^r(\theta) = \frac{\sin\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{J_F^{-tr}(\pi)\,dt}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} + \frac{\sin\theta}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{J_F^{tr}(0)\,dt}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} +$$

$$+ J_\chi^r(\theta) = J_1 + J_2 + J_\chi^r(\theta).$$

..есь

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{a_k}}{1 - \dfrac{z}{\bar a_k}}.$$

. силу леммы 1 имеем

$$\sup_r \left| \frac{J_1}{V(r)} \right| + \sup_r \left| \frac{J_2}{V(r)} \right| < \infty.$$

Осталось показать, что

$$\sup_{r,\,\theta\in(\eta,\,\pi-\eta)} \left| \frac{J_\chi^r(\theta)}{V(r)} \right| < \infty.$$

..ля этого докажем ограниченность при каждых ϑ, θ из $(0, \pi)$ величины

$$\sigma(\vartheta, \theta) = \sup_r \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{V(r)}.$$

..редположим противное. Пусть $\sigma(\vartheta_0, \theta_0) = \infty$. Возьмем луч $\arg z = \varphi_0$, .. $< \min(\vartheta_0, \pi - \theta_0)$. Построим функцию

$$\chi_1(z) = \prod_{a_k\in(\vartheta_0,\,\theta)} \frac{1 - \dfrac{z}{|a_k|\,e^{i\vartheta_0}}}{1 - \dfrac{z}{|a_k|\,e^{-i\vartheta_0}}}.$$

Очевидно, что $|\chi(re^{i\varphi_0})| < |\chi_1(re^{i\varphi_0})|$. У функции $\chi_1(z)$ корни расположены на одном луче с бесконечной верхней плотностью. По замечанию 1 к лемме 4

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{J_{\chi_1}^r(\varphi_0)}{V(r)} = -\infty,$$

а. следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{J_\chi^r(\varphi_0)}{V(r)}=-\infty,$$

что противоречит условиям леммы. Наше предположение неверно, а следовательно, $\sigma(\vartheta, \theta)\leqslant\infty$ при $\vartheta, \theta\in(0, \pi)$.

Теперь мы можем предположить ограниченность $\sigma(-\varepsilon, \pi)$. Если бы это было не так, мы взяли бы немного меньший угол $(\eta, \pi-\eta)$, для которого $\sigma(\eta, \pi-\eta)<\infty$ и распрямили бы его на полуплоскость преобразованием $\xi=z^\alpha$. Теперь

$$|\chi(re^{i\theta})|>\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1-\frac{r}{|a_k|}}{1+\frac{r}{|a_k|}}\right|.$$

Верхняя плотность $\{a_k\}$ по предложению конечна, а поэтому по первому замечанию к лемме 4

$$\sup_r\left|\frac{J_\chi^r(\theta)}{V(r)}\right|<\infty.$$

На этом доказательство леммы заканчивается.

Заметим еще, что полуплоскость в формулировке леммы можно заменить любым углом, так как последний преобразованием вида $\xi=e^{i\alpha}z^\beta$ переводится в полуплоскость.

Теорема 4. *Если $F(z)$ голоморфна внутри угла (α, β) и существует предел*

$$H(\theta)=\lim_{r\to\infty}\frac{J_F^r(\theta)}{V(r)},$$

то множество корней функции $F(z)$ имеет угловую плотность

$$\Delta(\vartheta, \theta)=\lim_{r\to\infty}\frac{h(r, \vartheta, \theta)}{V(r)}=\frac{1}{2\pi}[H'(\theta)-H'(\vartheta)]$$

всюду, где существуют указанные производные.

Доказательство. Запишем обобщенную формулу Иенсена (см. [1], стр. 187)

$$2\pi n(t, \vartheta, \theta)=\frac{d}{d\varphi}J_F^t(\varphi)\Big|_{\varphi=\theta}-\frac{d}{d\varphi}J_F^t(\varphi)\Big|_{\varphi=\vartheta}+t\int_\vartheta^\theta \ln_u'|F(ue^{i\varphi})|\Big|_{u=t}d\varphi. \tag{11}$$

Если (11) усереднить по ϑ и θ, разделить на t, проинтегрировать по t от r до er, разделить на r, проинтегрировать по r от R до eR и, наконец, разделить на $V(R)$, то получим

$$\frac{2\pi}{kl}\int_0^{\theta+k}\int_{\vartheta-l}^{\vartheta}\int_R^{eR}\int_r^{er}\frac{n(t, \vartheta, \theta)}{trV(R)}\,dt\,dr\,d\vartheta\,d\theta=\int_R^{eR}\int_r^{er}\frac{J_F^t(\theta+k)-J_F^t(\theta)}{ktrV(R)}\,dt\,dr-$$

$$-\int_R^{eR}\int_r^{er}\frac{J_F^t(\vartheta)-J_F^t(\vartheta-l)}{ltV(R)}\,dt\,dr+\frac{1}{kl}\int_0^{\theta+k}\int_{\vartheta-l}^{\vartheta}\int_\vartheta^\theta\frac{J_F^{e^2R}(\varphi)-2J_F^{eR}(\varphi)+J_F^R(\varphi)}{V(R)}\,d\varphi\,d\vartheta\,d\theta.$$

Так как $V(R)$ является медленно растущей функцией, то в силу условий теоремы предел подынтегральной функции в последнем интеграле

А так как по лемме 5 подынтегральная функция ограничена, ... последнего интеграла равен нулю, следовательно, при достаточ-...ных R модуль этого интеграла меньше ε. Считая теперь θ и ϑ ...быми, выберем k_0 и l_0 такими малыми по модулю, что

$$\left|\frac{H(\theta+k_0)-H(\theta)}{k_0}-H'(\theta)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{H(\vartheta)-H(\vartheta-l_0)}{l_0}-H'(\vartheta)\right|<\varepsilon.$$

...еременная t в интегралах может изменяться в пределах от R до e^2R. ..., учитывая, что $V(R)$ — медленно растущая, и условия тео-... можем по $\varepsilon>0$ найти $R(\varepsilon)$ так, что при $R>R(\varepsilon)$ будет выпол-... неравенство

$$\left|\frac{J_F^t(\varphi)}{V(R)}-H(\varphi)\right|<\varepsilon\min(|k_0|,\ |l_0|)$$

$\varphi=\theta,\ \theta+k_0,\ \vartheta,\ \vartheta-l_0.$

Обозначим через

$$I(R,\vartheta,\theta)=\int\limits_R^{eR}\int\limits_r^{er}\frac{n(t,\vartheta,\theta)}{tr}\,dt\,dr.$$

...тывая все вышесказанное, получим при $R>R(\varepsilon)$

$$\left|\frac{2\pi}{k_0l_0}\int\limits_\theta^{\theta+k_0}\int\limits_{\vartheta-l_0}^{\vartheta}\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}\,d\vartheta\,d\theta-H'(\theta)+H'(\vartheta)\right|<7\varepsilon.$$

...з k_0 и l_0 положительными, получим

$$\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}<\frac{1}{k_0l_0}\int\limits_\theta^{\theta+k_0}\int\limits_{\vartheta-l_0}^{\vartheta}\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}\,d\vartheta\,d\theta<\frac{1}{2\pi}[H'(\theta)-H'(\vartheta)+7\varepsilon]. \qquad (12)$$

... если взять k_0 и l_0 отрицательными, то

$$\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}>\frac{1}{k_0l_0}\int\limits_\theta^{\theta+k_0}\int\limits_{\vartheta-l_0}^{\vartheta}\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}\,d\vartheta\,d\theta>\frac{1}{2\pi}[H'(\theta)-H'(\vartheta)-7\varepsilon], \qquad (13)$$

Из неравенств (12), (13) следует существование предела

$$\lim_{R\to\infty}\frac{I(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}=\frac{1}{2\pi}[H'(\theta)-H'(\vartheta)].$$

Из определения $I(R,\vartheta,\theta)$ следует, что

$$I\left(\frac{R}{e^2},\vartheta,\theta\right)\leqslant n(R,\vartheta,\theta)\leqslant I(R,\vartheta,\theta).$$

Из этого неравенства следует существование

$$\Delta(\vartheta,\theta)=\lim_{R\to\infty}\frac{n(R,\vartheta,\theta)}{V(R)}=\frac{1}{2\pi}[H'(\theta)-H'(\vartheta)].$$

Для случая целых функций нулевого порядка теоремы о связи между ростом функции и множеством ее нулей звучат очень просто.

Теорема 5. *Если множество корней целой функции $f(z)$ нулевого порядка удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt} = 0,$$

то существует предел

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ \overline{r\in E_0}}} \frac{\ln|f(z)|}{\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt} = 1.$$

Теорема 6. *Если для целой функции нулевого порядка существует предел*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ \overline{r\in E_0}}} \frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}} = 1,$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt} = 0.$$

Условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt} = 0$$

означает, что функция $\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ представляется в виде

$$\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = r^{\rho(r)},$$

где $\rho(r)$ некоторый нулевой уточненный порядок.

Теоремы 5 и 6 мы не будем доказывать. Отметим лишь, что их доказательство напоминает доказательство соответствующих теорем для случая положительного порядка, но значительно проще.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
2. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. «Матем. сб.» 61 (103) : 3, (1963), 334—349.
3. T. Carleman. Sur la croissance de certaines classes de fonctions analytiques. Matematisk Tidsskrift, B 1931, 3/4, 46—62.