СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

*Ф. И. Гече**

В конце XIX и начале XX столетий известная теорема Л. Фукса ([1], стр. 195—201) о регулярных особенностях решений дифференциального уравнения

$$z^k w^{(k)} + P_1(z) z^{k-1} w^{(k-1)} + \cdots + P_k(z) w = 0, \tag{1}$$

где $P_i(z)$ — голоморфные функции в окрестности нуля, получила многочисленные обобщения (об истории этого вопроса см. [2], стр. 478—486). Детально был исследован вопрос для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [2—4]. Были получены некоторые результаты также для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь следует отметить работы Хорна [5—7], в которых в основном рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \dfrac{\partial z}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b_0 z + b_1 \dfrac{\partial z}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \dfrac{\partial z}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial z}{\partial y}, \end{cases}$$

где a_j, b_j, c_j — рациональные функции ($j = 0, 1, 2$), и изучаются условия существования решений с регулярными особенностями.

Совершенно другой метод применил к изучению систем подобного рода Л. Фукс в работе [8]. Можно отметить также работу Хорна [9].

В 1963 г. появилась работа Ш. И. Стрелица [10], в которой рассматривается некоторый аналог теоремы Фукса для линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\sum_{0 \leqslant i_1 + \cdots + i_n \leqslant k} P_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n) z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} u}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} = 0,$$

где $P_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n)$ — полиномы по $z_1, \ldots, z_n$ ($0 \leqslant i_1 + \cdots + i_n \leqslant k$). Отметим, что Ш. И. Стрелиц существенно использовал то обстоятельство, что $P_{i_1 \ldots i_n}$ — многочлены.

В первой части настоящей работы мы докажем аналогичную теорему для системы линейных уравнений в частных производных.

Как известно, условие голоморфности функций $P_i(z)$ ($i = 1, \ldots, k$) в окрестности нуля в уравнении (1) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы общее решение уравнения (1) имело в $z = 0$

* Выражаю глубокую признательность А. А. Гольдбергу за научное руководство работой.

регулярную особую точку. Однако частные решения с регулярной особенностью в нуле могут существовать и в том случае, когда это условие не выполняется (о работах, посвященных этой проблеме, см. [2], стр. 486—488). Подобные примеры построены в работе Перрона [11].

Представляет интерес также вопрос, при каких условиях решения уравнения (1) являются голоморфными функциями в окрестности нуля или же целыми функциями. Ответ на этот вопрос в общем случае дал Перрон (см., например, [12]). Его доказательство упростил Хильб [13] и перенес на систему обыкновенных линейных уравнений Леттенмейер [14].

Во второй части настоящей статьи мы докажем некоторые аналоги этих теорем для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 1. Будем пользоваться обозначениями

$$Z=\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\quad U=U(Z)=\begin{pmatrix} u_1(z_1,\ \ldots,\ z_n)\\ \vdots\\ u_m(z_1,\ \ldots,\ z_n)\end{pmatrix},\quad \|U\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|u_i|^2},$$

$$\frac{\partial^q U(Z)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^q u_1(z_1,\ \ldots,\ z_n)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^q u_m(z_1,\ \ldots,\ z_n)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ . & . & .\\ a_{m1} & \ldots & a_{mm}\end{pmatrix},\quad \|A\|=\max_{\|U\|=1}\|AU\|,$$

где $z_1,\ldots,z_n$ — комплексные числа, $u_j(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ — комплекснозначные функции. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть в системе дифференциальных уравнений*

$$L(U)=\sum_{0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant k} z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n}A_{i_1\ldots i_n}(z_1\ \ldots,\ z_n)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}U}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}=0 \quad (1.1)$$

элементы квадратных матриц $A_{i_1\ldots i_n}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ — голоморфные функции в окрестности начала координат. При условии, что

$$\det\Big[\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}A_{i_1\ldots i_n}(0,\ \ldots,\ 0)\,\eta_1^{i_1}\ldots\eta^{i_n}\Big]\neq 0\quad (0^0=1), \qquad (1.2)$$

при всех неотрицательных $\eta_1,\ldots,\eta_n$, $\eta_1+\cdots+\eta_n=1$, $n>1$, существует бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$U=z_1^{\lambda_1}\ldots z_n^{\lambda_n}V(Z)=z_1^{\lambda_1}\ldots z_n^{\lambda_n}\begin{pmatrix} v_1(z_1,\ \ldots,\ z_n)\\ \vdots\\ v_m(z_1,\ \ldots,\ z_n)\end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

где $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ — постоянные комплексные числа, $V(Z)$ — голоморфная вектор-функция в некоторой окрестности начала координат. Если, кроме того, элементы матриц $A_{i_1\ldots i_n}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ — целые функции при $0\leqslant i_1+\cdots+i_n<k$ и тождественно равны постоянной при $i_1+\cdots+i_n=k$, то $V(Z)$ — целая вектор-функция.

В случае, когда $n=1$, как известно, существует по крайней мере одно решение вида (1.3) и, очевидно, не больше чем mk линейно независимых решений.

В случае, когда $m=1$ и элементы соответствующих матриц полиномы, получаем результат Ш. И. Стрелица [10].

Доказательство. Ради простоты ограничимся случаем двух независимых переменных. Доказательство в общем случае проводится так же.

Для удобства обозначим независимые переменные через z и w. Тогда система (1.1) принимает следующий вид:

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} A_{ij}(z,\ w)\, z^i w^j \frac{\partial^{i+j} U}{\partial z^i \partial w^j} = 0. \tag{1.4}$$

Условие (1.2) принимает вид

$$\det\Big[\sum_{i+j=k} A_{ij}(0,\ 0)\,\eta_1^i \eta_2^j\Big] \neq 0, \quad \eta_1 \geqslant 0,\ \eta_2 \geqslant 0,\ \eta_1 + \eta_2 = 1. \tag{1.5}$$

Для доказательства существования решений мы пользуемся хорошо известным методом построения рекуррентных формул аналогично случаю одного обыкновенного дифференциального уравнения. Основная трудность заключается в доказательстве сходимости формальных степенных рядов.

Решение системы (1.4) ищем в виде

$$U = U(z,\ w) = \sum_{p,\ q=0}^{\infty} C_{pq} z^{p+\lambda} w^{q+\mu}, \tag{1.6}$$

где λ, μ — некоторые комплексные постоянные, которые определим ниже. C_{pq} — m-мерный вектор-столбец (p, $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Разложим матричные коэффициенты A_{ij} в ряд по степеням z и w:

$$A_{ij}(z,\ w) = \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{\infty} B_{ij}^{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta, \tag{1.7}$$

где $B_{ij}^{\alpha\beta}$ — квадратные матрицы размерности $m \times m$ ($0 \leqslant i + j \leqslant k$, α, $\beta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Предполагая, что ряд (1.6) можно почленно дифференцировать, подставим его в (1.4), после чего получим

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{\infty} B_{ij}^{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \sum_{p,\ q=0}^{\infty} C_{pq}(p+\lambda)(p+\lambda-1)\ \ldots\ (p+\lambda-i+1) \times$$
$$\times (q+\mu)(q+\mu-1)\ \ldots\ (q+\mu-j+1)\, z^{p+\lambda} w^{q+\mu} = 0. \tag{1.8}$$

Отсюда, приравнивая к нулю коэффициенты при степенях z и w, получаем рекуррентные формулы

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} B_{ij}^{00} C_{00} \lambda(\lambda-1)\ \ldots\ (\lambda-i+1)\,\mu(\mu-1)\ \ldots\ (\mu-j+1) = 0, \tag{1.9}$$

. . . .

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} B_{ij}^{00} C_{st}(\lambda+s)(\lambda+s-1)\ \ldots\ (\lambda+s-i+1)(\mu+t)(\mu+t-1)\ \ldots \times$$
$$\times (\mu+t-j+1) + \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant s \\ 0 \leqslant q \leqslant t}}' B_{ij}^{pq} C_{s-p,\ t-q}(\lambda+s-p)(\lambda+s-p-1)\ \ldots \times$$
$$\times (\lambda+s-p-i+1)(\mu+t-q)(\mu+t-q-1)\ \ldots\ (\mu+t-q-j+1) = 0^{*} \tag{1.10}$$

. . . .

Введя обозначение

$$Z(\lambda,\ \mu) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} B_{ij}^{00} \lambda(\lambda-1)\ \ldots\ (\lambda-i+1)\,\mu(\mu-1)\ \ldots\ (\mu-j+1), \tag{1.11}$$

---

* Здесь и дальше штрих при знаке Σ означает, что пропускается член, для которого $p = q = 0$.

запишем формулы (1.9) и (1.10) следующим образом:

$$\chi(\lambda, \mu) C_{00} = 0, \tag{1.12}$$

$$\chi(\lambda + s, \mu + t) C_{st} = - \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant s \\ 0 \leqslant q \leqslant t}}' B_{ij}^{pq} C_{s-p,\, t-q} (\lambda + s - p) \times$$
$$\times (\lambda + s - p - 1) \ldots (\lambda + s - p - i + 1)(\mu + t - q) \times$$
$$\times (\mu + t - q - 1) \ldots (\mu + t - q - j + 1), \tag{1.13}$$
$$s + t > 0, \; s, t = 0, 1, 2, \ldots$$

Выбираем числа λ_0 и μ_0 так, чтобы они удовлетворяли уравнению $\det[\chi(\lambda_0, \mu_0)] = 0$, которое называется определяющим уравнением. Мы покажем, что существует бесконечное множество пар таких чисел и для произвольной пары чисел λ_0, μ_0 существует такое число $T \geqslant 0$, что при некоторых неотрицательных целых s_0 и t_0 $(s_0 + t_0 = T)$ $\det[\chi(\lambda_0 + s_0, \mu_0 + t_0)] = 0$, а при $s + t > N$ $(s, t = 0, 1, 2, \ldots)$ $\det[\chi(\lambda_0 + s, \mu_0 + t)] \neq 0$. Для этого представим матрицу $\chi(\lambda, \mu)$ в виде

$$\chi(\lambda, \mu) = \sum_{\nu=0}^{k} S_\nu(\lambda, \mu), \tag{1.14}$$

где $S_\nu(\lambda, \mu)$ — матрица, элементы которой однородные многочлены относительно λ и μ степени ν $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$. Заметим, что

$$S_k(\lambda, \mu) = \sum_{i+j=k} B_{ij}^{00} \lambda^i \mu^j = \sum_{i+j=k} A_{ij}(0, 0) \lambda^i \mu^j. \tag{1.15}$$

Учитывая условие (1.5), отсюда получаем, что $\det[\chi(\lambda, \mu)]$ является многочленом степени $km > 0$ относительно λ и μ и, следовательно, имеет бесконечное множество корней. Полагая в (1.14) $\lambda = \lambda_0 + s$, $\mu = \mu_0 + t$, получаем

$$\chi(\lambda_0 + s, \mu_0 + t) = \sum_{\nu=0}^{k} (t + s)^\nu S_\nu \left(\frac{\lambda_0 + s}{s + t}, \frac{\mu_0 + t}{s + t} \right) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} (s + t)^\nu S_\nu \left(\frac{s}{s + t} + \varepsilon_1, \frac{t}{s + t} + \varepsilon_2 \right), \tag{1.16}$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ при $s + t \to \infty$. Легко показать, что $\det[\chi(\lambda_0 + s, \mu_0 + t)]$ не обращается в нуль при всех достаточно больших $s + t$. Действительно, вследствие условия (1.5) из (1.15) получаем, что $|\det[S_k(s(s+t)^{-1}, t(s+t)^{-1})]|$ имеет положительный минимум. Поэтому при достаточно больших $s + t$ из (1.16) получаем неравенство

$$|\det[\chi(\lambda_0 + s, \mu_0 + t)]| \geqslant \beta (s + t)^{km}, \quad \beta > 0, \tag{1.17}$$

откуда следует наше утверждение. Вместе с тем доказано существование бесконечного множества пар чисел λ, μ, обладающих свойствами

$$\det[\chi(\lambda, \mu)] = 0, \quad \det[\chi(\lambda + s, \mu + t)] \neq 0$$

при $t + s > 0$ $(s, t = 0, 1, 2, \ldots)$.

В дальнейшем фиксируем произвольную пару таких чисел.

Учитывая все сказанное, из формул (1.12), (1.13) легко определяем последовательно все коэффициенты C_{pq}, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, ряд (1.6) является формальным решением системы (1.4). Докажем теперь, что ряд

$$\sum_{p, q=0}^{\infty} \| C_{pq} \| \, |z|^p \, |w|^q \tag{1.18}$$

сходится равномерно в некоторой окрестности начала координат. Из неравенства (1.17) следует, что при больших $s+t$ $(s,\ t \geqslant 0)$

$$\|\chi(\lambda+s,\ \mu+t)X\| \geqslant \gamma(s+t)^k,\ \gamma>0,$$

где X — произвольный m-мерный вектор-столбец, норма которого равна единице. Следовательно, обратная матрица $\chi^{-1}(\lambda+s,\ \mu+t)$ удовлетворяет неравенству (см. [15], стр. 156)

$$\|\chi^{-1}(\lambda+s,\ \mu+t)\| \leqslant \gamma^{-1}(s+t)^{-k},\ s+t \geqslant N_1. \tag{1.19}$$

Предполагая, что элементы матриц $A_{ij}(z,\ \omega)$, $0 \leqslant i+j \leqslant k$ голоморфны в бицилиндре $\{|z| \leqslant R,\ |\omega| \leqslant R\}$, можем найти такую постоянную M, что будут иметь место неравенства

$$\|B_{ij}^{\alpha\beta}\| < MR^{-\alpha-\beta}\ (0 \leqslant i+j \leqslant k,\quad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2\ \ldots). \tag{1.20}$$

Учитывая неравенства (1.19) и (1.20), из (1.13) получаем следующие оценки:

$$\|C_{st}\| < KM \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant s\\ 0 \leqslant q \leqslant t}}' R^{-p-q}\|C_{s-p,\ t-q}\|,\ s+t \geqslant N_1, \tag{1.21}$$

где K — постоянная, не зависящая от s и t. Очевидно, существует постоянная P, удовлетворяющая неравенствам

$$P > 2+2KM,\ \|C_{p,\ q}\| < (PR^{-1})^{p+q},\ 0 \leqslant p+q < N_1. \tag{1.22}$$

Теперь методом индукции легко показать, что неравенства

$$\|C_{pq}\| < (PR^{-1})^{p+q} \tag{1.23}$$

справедливы при всех $p+q \geqslant 0$. Действительно, предполагая, что они имеют место при $0 \leqslant p+q \leqslant h-1$, с учетом соотношений

$$\sum_{l=0}^{h-1}(h+1-l)P^l = (h+2)\sum_{l=0}^{h-1}P^l - \sum_{l=0}^{h-1}(l+1)P^l =$$
$$= (h+2)\frac{P^h-1}{P-1} - \frac{hP^{h+1}-(h+1)P^h+1}{(P-1)^2} = \frac{1}{(P-1)^2} \times$$
$$\times [(h+2)(P-1)(P^h-1) - hP^{h+1} - (h+1)P^h + 1] < \frac{P^h(2P-1)}{(P-1)^2} \tag{1.24}$$

и неравенств (1.22) из (1.21) получаем

$$\|C_{pq}\| \leqslant KMR^{-h}\sum_{l=0}^{h-1}(h-l+1)P^l < \frac{KM(2P-1)P^h}{(P-1)^2R^h} < \left(\frac{P}{R}\right)^h,$$
$$p+q=h.$$

Тем самым справедливость неравенств (1.23) доказана при всех $p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Но это означает, что ряд (1.18) равномерно сходится внутри бицилиндра $\{|z| < RP^{-1},\ |\omega| < RP^{-1}\}$, следовательно, ряд

$$\sum_{p,\ q=0}^{\infty} C_{pq}z^p\omega^q \tag{1.25}$$

представляет в этом бицилиндре голоморфную вектор-функцию. Этим первая часть теоремы 1 доказана.

Пусть теперь элементы матриц $A_{ij}(z,\ \omega)$ — целые функции при $0 \leqslant i+j < k$ и равны тождественно постоянной при $i+j=k$. В этом случае по предположению $B_{ij}^{\alpha\beta}=0$ при $\alpha+\beta>0$, $i+j=k$ и формулы (1.13) примут следующий вид:

$$C_{st}=-\chi^{-1}(\lambda+s,\,\mu+t)\sum_{0\leqslant i+j<k}\;\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant s\\0\leqslant q\leqslant t}}{}' B_{ij}^{pq}C_{s-p,\,t-q}\times$$
$$\times(\lambda+s-p)(\lambda+s-p-1)\cdots(\lambda+s-p-i+1)(\mu+t-q)\times$$
$$\times(\mu+t-q-1)\cdots(\mu+t-q-j+1),$$
$$s+t>0. \tag{1.26}$$

Пусть R — произвольно большое число. Очевидно, существует такая постоянная M, что

$$\|B_{ij}^{\alpha\beta}\|<MR^{-\alpha-\beta},\quad 0\leqslant i+j<k,\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.27}$$

Учитывая (1.19) и (1.27), из (1.26) при $s+t\geqslant N_1$ получаем оценки

$$\|C_{st}\|\leqslant\|\chi^{-1}(\lambda+s,\,\mu+t)\|\sum_{0\leqslant i+j<k}\;\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant s\\0\leqslant q\leqslant t}}{}' B_{ij}^{pq}C_{s-p,\,t-q}\times$$
$$\times|s+\lambda-p\,\|\,\lambda+s-p-1|\cdots|\lambda+s-p-i+1\,\|\,\mu+t-q\,\|\,\mu+$$
$$+t-q-1|\cdots|\mu+t-q-j+1|\leqslant\frac{MK_1}{\gamma(s+t)^k}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant s\\0\leqslant q\leqslant t}}{}' R^{-p-q}\|C_{s-p,\,t-q}\|(t+$$
$$+s-p-q+1)^{k-1}=\frac{K}{(s+t)^k}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant s\\0\leqslant q\leqslant t}}{}' R^{-p-q}\|C_{s-p,\,t-q}\|(t+s-p-q+1)^{k-1}, \tag{1.28}$$

где K — постоянная, не зависящая от s, t.

Пусть P, N и L — постоянные, такие, что справедливы неравенства

$$N\geqslant N_1,\quad N\geqslant K,\quad \|C_{pq}\|<(PR^{-1})^{p+q}\quad(0\leqslant p+k\leqslant N), \tag{1.29}$$

$$\left[\alpha+\frac{\alpha+1}{\ln P}+\frac{k-1}{(N+1)\ln^2P}+\cdots+\frac{(k-1)(k-2)\ldots 1}{(N+1)^{k-1}\ln^kP}\right]\left(\frac{N+1}{N+\alpha-1}\right)^k<L, \tag{1.30}$$
$$\alpha=2,\ 3,\ \ldots$$

Тогда имеют место неравенства

$$\sum_{h=0}^{N}(h+\alpha)P^{N-h}(N-h+1)^{k-1}\leqslant\alpha P^N(N+1)^{k-1}+\int_0^N P^{N-x}(N-x+1)^{k-1}\times$$
$$\times(x+\alpha)\,dx=\alpha P^N(N+1)^{k-1}+\frac{\alpha P^N}{\ln P}(N+1)^{k-1}-$$
$$-\frac{k-1}{\ln P}\int_0^N P^{N-x}(N-x+1)^{k-2}(x+\alpha)\,dx+\frac{1}{\ln P}\int_0^N(N-x+1)^{k-1}P^{N-x}\,dx<$$
$$<P^N(N+1)^{k-1}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\ln P}\right)+\frac{1}{\ln P}\int_0^N(N-x+1)^{k-1}P^{N-x}\,dx<$$
$$<P^N(N+1)^{k-1}\left[\alpha+\frac{\alpha+1}{\ln P}+\frac{k-1}{(N+1)\ln^2P}+\cdots+\frac{(k-1)(k-2)\ldots 1}{(N+1)^{k-1}\ln^kP}\right]<$$
$$<LP^N(N+\alpha-1)^kN^{-1},$$
$$\alpha=2,\ 3,\ \ldots \tag{1.31}$$

Учитывая неравенства (1.29) и (1.31), из (1.28) при $s+t=N+1$ получаем

$$\| C_{st} \| \leqslant \frac{K}{(N+1)^k R^{N+1}} \sum_{h=1}^{N+1} (h+1)(N+2-h)^{k-1} P^{N+1-h} =$$

$$= \frac{K}{(N+1)^k R^{N+1}} \sum_{h=0}^{N} (h+2)(N-h+1)^{k-1} P^{N-h} < \frac{LP^N}{R^{N+1}}. \tag{1.32}$$

Пусть теперь $s+t=N+2$. Тогда с учетом неравенств (1.29), (1.31) и (1.32) из (1.28) находим

$$\| C_{st} \| \leqslant \frac{K}{(N+2)^k R^{N+2}} \left[\sum_{h=2}^{N+2} (h+1)(N-h+3)^{k-1} P^{N+2-h} + \right.$$

$$\left. + R^{N+1} (N+2)^{k-1} \sum_{i+j=1} \| C_{s-i,\, t-j} \| \right] < \frac{K}{(N+2)^k R^{N+2}} \left[\sum_{h=0}^{N} (h+3) \times \right.$$

$$\left. \times (N-h+1)^{k-1} P^{N-h} + 2(N+2)^{k-1} LP^N \right] < \frac{K}{NR^{N+2}} [LP^N + 2LP^N] \leqslant \frac{3LP^N}{R^{N+2}}.$$

Теперь методом индукции легко доказать неравенства

$$\| C_{st} \| < \frac{4^{l-1} LP^N}{R^{N+l}}, \quad s+t=l, \quad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{1.33}$$

Действительно, предполагая, что неравенства (1.33) справедливы при $l=1, \ldots q-1$, докажем их справедливость при $l=q$ $(q \geqslant 3)$, т. е. при $s+t=N+q$. Учитывая (1.24), (1.29), (1.31) и (1.33), из (1.28) следует

$$\| C_{st} \| \leqslant \frac{K}{(N+q)^k R^{N+q}} \left[\sum_{h=q}^{N+q} (h+1)(N+q-h+1)^{k-1} P^{N+q-h} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \leqslant i+j \leqslant q-1} R^{N+q-i-j} \| C_{s-i,\, t-j} \| (N+q-i-j+1)^{k-1} \right] <$$

$$< \frac{K}{(N+q)^k R^{N+q}} \left[\sum_{h=0}^{N} (h+q+1)(N-h+1)^{k-1} P^{N-h} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \leqslant i+j \leqslant q-1} 4^{q-i-j-1} LP^N (N+q-i-j+1)^{k-1} \right] <$$

$$< \frac{K}{NR^{N+q}} \left[LP^N + \sum_{1 \leqslant i+j \leqslant q-1} 4^{q-i-j-1} LP^N \right] \leqslant \frac{KLP^N}{NR^{N+q}} \left(1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=0}^{q-2} (q-h) 4^h \right) \leqslant \frac{LP^N}{R^{N+q}} \left(1 + \frac{7}{9} \cdot 4^{q-1} \right) < \frac{LP^N 4^{q-1}}{R^{N+q}}.$$

Следовательно, неравенства (1.33) имеют место при всех $s,\ t=0,1,\ 2, \ldots, s+t>N$. Так как K, L, P, N — постоянны, из (1.33) следует, что ряд (1.18) равномерно сходится внутри бицилиндра $\left\{ |z| < \frac{1}{4} R,\ |w| < \frac{1}{4} R \right\}$. Вследствие произвольности R ряд (1.25) представляет целую вектор-функцию. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Следствие. Система неоднородных уравнений $L(U) = z_1^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_n} F(Z)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные комплексные числа, такие, что при любых неотрицательных целых числах $l_1, \ldots, l_n$

$$\det[\chi(\lambda_1+l_1,\ \ldots,\ \lambda_n+l_n)] =$$

$$= \det\Big[\sum_{0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant k} A_{i_1\ldots i_n}(0,\ \ldots,\ 0)\prod_{j=1}^{n}[(\lambda_j+l_j)\ \cdots\ (\lambda_j+l_j-i_j+1)]\Big] \neq 0, \tag{1.34}$$

обладает решением вида (1.3), где $V(Z)$ — голоморфная в окрестности нуля или целая вектор-функция в зависимости от того, являются ли элементы матриц $A_{i_1\ldots i_n}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, а также вектор-функция $F(Z)$ голоморфными в окрестности нуля или целыми, причем во втором случае требуется, чтобы $A_{i_1\ldots i_n}$ с $i_1+\ \cdots\ +i_n=k$ были постоянными матрицами.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из хода доказательства теоремы 1. Условие (1.34) обеспечивает разрешимость рекуррентных формул. Сходимость формальных степенных рядов доказывается так же, как в теореме 1.

В работе [16] мы доказали, что все решения вида (1.3) системы уравнений (1.1), где элементы матриц $A_{i_1\ldots i_n}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ — многочлены при $0\leqslant i_1+\ \cdots\ +i_n<k$ и равны тождественно постоянной при $i_1+\ \cdots\ +i_n=k$, при выполнении условия (1.2) имеют рост не выше нормального типа некоторого конечного порядка. Объединяя этот результат с теоремой 1 настоящей статьи, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть в системе уравнений* (1.1) *элементы матриц $A_{i_1\ldots i_n}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ — многочлены по $z_1,\ \ldots,\ z_n$ при $0\leqslant i_1+\ \cdots\ +i_n<k$ и равны тождественно постоянной при $i_1+\ \cdots\ +i_n=k$, причем выполняется условие* (1.2). *Тогда существует бесконечное множество решений вида* (1.3) (*естественно, при $n>1$*), *где $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ — постоянные, $V(Z)$ — целая вектор-функция, причем для всех таких решений рост целых вектор-функций не выше нормального типа некоторого конечного порядка* ρ, *общего для всех решений указанного вида.*

Если, кроме того, элементы матриц $A_{i_1\ldots i_n}(0\leqslant i_1+\ \cdots\ +i_n\leqslant k)$ постоянные числа, то указанные решения растут как степенная функция.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров, которые показывают, насколько существенны условия наших теорем.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} z\dfrac{\partial u_1}{\partial z}+w\dfrac{\partial u_1}{\partial w}=u_1, \\ w\dfrac{\partial u_1}{\partial w}+z\dfrac{\partial u_2}{\partial z}+w\dfrac{\partial u_2}{\partial w}=0, \end{cases}$$

или же в матричной записи

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}z\frac{\partial U}{\partial z}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}w\frac{\partial U}{\partial w}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}U$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1, так как условие (1.2)

$$\begin{vmatrix}\eta_1+\eta_2 & 0\\ \eta_2 & \eta_1+\eta_2\end{vmatrix}=(\eta_1+\eta_2)^2\equiv 1$$

выполняется. Общее решение данной системы будет

$$\begin{cases} u_1=zf\left(\dfrac{z}{w}\right), \\ u_2=\left[g\left(\dfrac{z}{w}\right)+w\right]\left(\dfrac{z}{w}\right)^2 f'\left(\dfrac{z}{w}\right), \end{cases}$$

где f и g — произвольные функции. Если положить $f(x)=x^{\lambda}$, $g(x)=0$, то получим решение

$$\begin{cases} u_1 = z^{\lambda+1} w^{-\lambda}, \\ u_2 = \lambda z^{\lambda+1} w^{-\lambda}, \end{cases}$$

— произвольная постоянная.

Итак, существует бесконечное множество решений вида (1.3), что и утверждается теоремой. Так как матричные коэффициенты A_{ij} данной системы постоянные, то согласно теореме 2 все решения вида (1.3) должны расти как степенная функция, что мы и наблюдаем в данном примере.

Пример 2. Этот пример показывает, что условие (1.2) теоремы 1 в общем случае существенно.

$$\begin{cases} z \dfrac{\partial u_1}{\partial z} - w \dfrac{\partial u_1}{\partial w} = zwu_1, \\ w \dfrac{\partial u_1}{\partial w} + z \dfrac{\partial u_2}{\partial z} - w \dfrac{\partial u_2}{\partial w} = zwu_2. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \frac{\partial U}{\partial z} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w \frac{\partial U}{\partial w} = \begin{pmatrix} zw & 0 \\ 0 & zw \end{pmatrix} U.$$

Проверим условие (1.2):

$$\begin{vmatrix} \eta_1 - \eta_2 & 0 \\ \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \end{vmatrix} = (\eta_1 - \eta_2)^2.$$

Очевидно, при $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ наше условие не выполняется и система не имеет решения вида (1.3). Действительно, из первого уравнения находим $u_1 = f(zw) z^{zw}$, где f — произвольная функция. Очевидно, чтобы решение системы имело вид (1.3), необходимо, чтобы $f \equiv 0$. Но в этом случае из второго уравнения получаем $u_2 = g(zw) z^{zw}$. Поэтому существует только тривиальное решение искомого вида, $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, что исключаем из рассмотрения.

Однако условие (1.22) не является необходимым для того, чтобы система имела решение вида (1.3). Это показывает следующий пример системы уравнений, для которой условие (1.2) не выполняется и все же имеется бесконечное множество таких решений.

Пример 3. Система

$$\begin{cases} z \dfrac{\partial u_1}{\partial z} + w \dfrac{\partial u_1}{\partial w} = wu_1, \\ z^2 \dfrac{\partial u_1}{\partial z} + z \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = u_2, \end{cases}$$

или же

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} z \frac{\partial U}{\partial z} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w \frac{\partial U}{\partial w} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

имеет бесконечное множество решений вида (1.3), а именно

$$\begin{cases} u_1 = z^{\lambda} w^{-\lambda} e^{w}, \\ u_2 = z^{\lambda} w^{-\lambda} z e^{w}, \end{cases}$$

где λ — произвольное комплексное число, хотя

$$\begin{vmatrix} \eta_1 + \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{vmatrix} = \eta_1 (\eta_1 + \eta_2)$$

обращается в нуль при $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$.

§ 2. Как отмечалось во введении, уже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (а также систем обыкновенных дифференциальных уравнений) для существования частных решений с регулярной особенностью не обязательно, чтобы уравнение имело вид (1). Тем более это справедливо для уравнений в частных производных. В этом параграфе мы будем рассматривать систему (обозначения прежние)

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=k} A_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1+l_1} \ldots z_n^{i_n+l_n} \frac{\partial^k U}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} +$$

$$+ \sum_{0\leqslant i_1+\cdots+i_n<k} A_{i_1\ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n) z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} U}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} = 0, \tag{2.1}$$

где $l_1, \ldots, l_n$ — целые числа, и докажем некоторые достаточные условия для существования решений вида (1.3), а также голоморфных и целых решений.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть имеется бесконечная система линейных уравнений относительно бесконечного числа неизвестных* V_ν, *где* *

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \ \nu_1, \ldots, \nu_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$V_\nu + \sum_\alpha S_{\nu\alpha} V_\alpha = W_\nu, \quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \ \nu_1, \ldots, \nu_n = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

где V_ν *и* W_ν — *m-мерные вектор-столбцы,* $S_{\alpha\nu}$ — *матрица размерности* $m \times m$. *Если выполняются условия*

$$\sum_\alpha \sum_\nu \| S_{\nu\alpha} \|^\rho = \theta < 1, \tag{2.3}$$

$$\sum_\nu \| W_\nu \|^\tau = \gamma < \infty, \tag{2.4}$$

где ρ *и* τ — *положительные числа, удовлетворяющие условию* $\rho^{-1} + \tau^{-1} = 1$ *то существует единственное решение системы* (2.2), *удовлетворяющее условию*

$$\sum_\nu \| V_\nu \|^\tau < \infty.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству известной теоремы о бесконечных системах (см., например, [15], стр. 164—167). Надо только воспользоваться известными соотношениями для нормы векторов и матриц, а также неравенствами Гельдера и Минковского.

Замечание. Если в системе (2.2) взять вместо W_ν векторы W'_ν с условием $\sum_\nu \| W'_\nu \| < \infty$, то получим снова единственное решение V'_ν, для которого ряд $\sum_\nu \| V'_\nu \|^\tau$ сходится. Используя неравенство Минковского, отсюда получаем, что ряды $\sum_\nu \| aV_\nu + bV'_\nu \|^\tau$ и $\sum_\nu \| aW_\nu + bW'_\nu \|^\tau$, где a, b — произвольные постоянные, сходятся. Следовательно, $V''_\nu = aV_\nu + bV'_\nu$ — единственное решение для системы

$$V_\nu + \sum_\alpha S_{\alpha\nu} V_\alpha = aW_\nu + bW'_\nu,$$

удовлетворяющее условию $\sum_\nu \| W''_\nu \|^\tau < \infty$. Аналогичный результат имеет место, если правую часть системы (2.2) заменить линейной комбинацией произвольного конечного числа векторов.

---

* Все относящиеся к лемме суммы распространяются на систему индексов, пробегающих значения 0, 1, 2, ..., т. е. $\sum\limits_\alpha \equiv \sum\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n=0}^{\infty}$.

Переходим теперь к исследованию системы (2.1). Мы сразу предполагаем, что в системе (2.1) матричные коэффициенты $A_{i_1 \ldots i_n}$ $(i_1 + \cdots + i_n = k)$ с постоянными элементами удовлетворяют условию

$$\begin{gathered}\det\Big[\sum_{i_1+\cdots+i_n=k} A_{i_1\ldots i_n}\eta_1^{i_1}\ldots\eta_n^{i_n}\Big] \neq 0 \quad (0^0 = 1),\\ \eta_1, \ldots, \eta_n \geqslant 0, \quad \eta_1 + \cdots + \eta_n = 1,\end{gathered} \tag{2.5}$$

а элементы матриц $A_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n)$ $(0 \leqslant i_1 + \cdots + i_n < k)$ голоморфные функции в окрестности начала координат либо целые функции.

Для простоты изложения ограничимся случаем двух независимых переменных, которые обозначим через z и w. Тогда систему (2.1) можно переписать в виде

$$\sum_{i+j=k} A_{ij} z^{i+l} w^{j+f} \frac{\partial^k U}{\partial z^i \partial w^j} + \sum_{0\leqslant i+j<k} A_{ij}(z, w) z^i w^j \frac{\partial^{i+j} U}{\partial z^i \partial w^j} = 0. \tag{2.6}$$

Разложим коэффициенты $A_{ij}(z, w)$ в ряд по степеням z и w

$$A_{ij}(z, w) = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{\infty} B_{ij}^{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \quad (0 \leqslant i + j < k).$$

Решение системы (2.6) по-прежнему будем искать в виде

$$U = U(z, w) = \sum_{p,\,q=0}^{\infty} C_{pq} z^{p+\lambda} w^{q+\mu}, \tag{2.7}$$

где λ, μ — постоянные, которые определим ниже, C_{pq} — m-мерный вектор-столбец $(p, q = 0, 1, 2, \ldots)$.

Предполагая, что ряд (2.7) можно почленно дифференцировать, подставим его в (2.6) и получим

$$\begin{gathered}\sum_{i+j=k}\sum_{p,q=0}^{\infty} A_{ij}C_{pq}(p+\lambda)(p+\lambda-1)\cdots(p+\lambda-i+1)(q+\mu)\times\\ \times(q+\mu-1)\cdots(q+\mu-j+1)z^{p+l+\lambda}w^{q+f+\mu} +\\ +\sum_{0\leqslant i+j<k}\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}\sum_{p,\,q=0}^{\infty} B_{ij}^{\alpha\beta}C_{pq}(p+\lambda)(p+\lambda-1)\cdots(p+\lambda-i+1)\times\\ \times(q+\mu)(q+\mu-1)\cdots(q+\mu-j+1)z^{\alpha+p+\lambda}w^{\beta+q+\mu} = 0.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Введя обозначения

$$\begin{gathered}\chi(p, q) = \sum_{i+j=k} A_{ij}(p+\lambda)(p+\lambda-1)\cdots(p+\lambda-i+1)\times\\ \times(q+\mu)(q+\mu-1)\cdots(q+\mu-j+1),\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\chi_{pq}^{\alpha\beta} = \sum_{0\leqslant i+j<k} B_{ij}^{\alpha\beta}(p-\alpha+\lambda)(p-\alpha+\lambda-1)\cdots(p-\alpha+\lambda-i+1)\times\\ \times(q-\beta+\mu)(q-\beta+\mu-1)\cdots(q-\beta+\mu-j+1),\end{gathered} \tag{2.10}$$

систему (2.8) перепишем так:

$$\sum_{p+q=0}^{\infty}\Big[\chi(p-l,\ q-f)C_{p-l,\,q-f} + \sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q}\chi_{pq}^{\alpha\beta}C_{p-\alpha,\,q-\beta}\Big] z^{p+\lambda}w^{q+\mu} = 0,$$

где $C_{st} \equiv 0$, если s или t отрицательное.

Приравнивая к нулю в последнем уравнении коэффициенты при степенях z и w, получаем систему уравнений

$$\chi(p-l,\ q-f)\,C_{p-l,\,q-f}+\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q}\chi_{pq}^{\alpha\beta}C_{p-\alpha,\,q-\beta}=0, \tag{2.11}$$
$$p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Следуя работам [12], [14], сначала отделим от системы (2.11) те уравнения, для которых $p+q\leqslant N+l+f$, где N будет определено ниже, и рассмотрим бесконечную систему

$$\chi(p-l,\ q-f)\,C_{p-l,\,q-f}+\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q}\chi_{pq}^{\alpha\beta}C_{p-\alpha,\,q-\beta}=0,$$
$$p+q\geqslant N+l+f+1. \tag{2.12}$$

В силу условия (2.5) из (2.9) так же, как и при доказательстве теоремы 1, при фиксированных λ и μ и достаточно большом N легко получить неравенство

$$|\det(\chi(p,\ q)|\geqslant\beta(p+q)^{km},\quad \beta>0,\quad p+q>N+l+f, \tag{2.13}$$

откуда следует оценка для нормы обратной матрицы

$$\|\chi^{-1}(p,\ q)\|\leqslant\gamma(p+q)^{-k},\quad \gamma>0,\quad p+q>N+l+f. \tag{2.14}$$

Учитывая (2.13), систему (2.12) можем переписать в виде

$$C_{p-l,\,q-f}+\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q}T_{pq}^{\alpha\beta}C_{p-\alpha,\,q-\beta}=0,\quad p+q\geqslant N+l+f+1, \tag{2.15}$$

где

$$T_{pq}^{\alpha\beta}=\chi^{-1}(p-l,\ q-f)\,\chi_{pq}^{\alpha\beta}.$$

Предполагая, что элементы матриц $A_{ij}(z,w)$ $(0\leqslant i+j<k)$ голоморфны в бицилиндре $\{|z|\leqslant R,\ |w|\leqslant R\}$, можем записать неравенства

$$\|B_{ij}^{\alpha\beta}\|\leqslant MR^{-\alpha-\beta},\ \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad 0\leqslant i+j<k, \tag{2.16}$$

где M — некоторая постоянная.

Учитывая (2.14) и (2.16), из (2.10) получаем оценки

$$\|T_{pq}^{\alpha\beta}\|\leqslant K(p+q)^{-1}R^{-\alpha-\beta},\quad K=\mathrm{const},\quad p+q\geqslant N+l+f+1. \tag{2.17}$$

Пусть θ — произвольное число из интервала $0<\theta<1$. Обозначим

$$D_{\alpha\beta}=C_{\alpha\beta}(\theta R)^{\alpha+\beta},\quad S_{pq}^{\alpha\beta}=T_{pq}^{\alpha\beta}(\theta R)^{\alpha+\beta-l-f},$$
$$p+q\geqslant N+l+f+1,\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.18}$$

Тогда систему (2.15) можно переписать следующим образом:

$$D_{pq}=\sum_{\alpha=0}^{p+l}\sum_{\beta=0}^{q+f}S_{p+l,\,q+f}^{p-\alpha+l,\,q-\beta+f}D_{\alpha\beta}=0,\quad p+q\geqslant N+1$$

или же

$$D_{pq}+\sum_{\alpha,\,\beta}{}^{*}S_{p+l,\,q+f}^{p+l-\alpha,\,q+f-\beta}D_{\alpha\beta}=-\sum_{0\leqslant\alpha+\beta\leqslant N}S_{p+l,\,q+f}^{p+l-\alpha,\,q+f-\beta}D_{\alpha\beta},\quad p+q\geqslant N+1, \tag{2.19}$$

где $\sum\limits_{\alpha,\,\beta}^{*}$ распространяется на те индексы α, β, для которых выполняются неравенства $0 \leqslant \alpha \leqslant p+l$, $0 \leqslant \beta \leqslant q+f$, $\alpha+\beta \geqslant N+1$, $S^{ab}_{p+l,\, q+f} \equiv 0$, если a или b, или оба они отрицательны.

Из (2.17) и (2.18) следуют оценки

$$\| S^{p+l-\alpha,\, q+f-\beta}_{p+l,\, q+f} \| \leqslant KR^{-l-f}(p+q+l+f)^{-1}\theta^{p+q-\alpha-\beta}, \quad p+q \geqslant N+1$$

и, следовательно, при достаточно большом N

$$\sum_{\alpha,\,\beta}{}^{*} \| S^{p+l-\alpha,\, q+f-\beta}_{p+l,\, q+f} \|^3 \leqslant K^3 R^{-3(l+f)}(p+q+l+f)^{-3} \sum_{\alpha,\,\beta}{}^{*} \theta^{3(p+q-\alpha-\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant L(p+q)^{-3}, \quad L = \mathrm{const},$$

$$\sum_{p+q \geqslant N+1} \sum_{\alpha,\,\beta}{}^{*} \| S^{p+l-\alpha,\, q+f-\beta}_{p+l,\, q+f} \|^3 \leqslant L\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \frac{1}{(N+2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(N+2)^3} + \ldots \right) < 1. \tag{2.20}$$

Рассмотрим теперь те бесконечные системы уравнений, которые получаются из (2.19) последовательной заменой правой части (2.19) на столбцы из матриц $S^{p+l-\alpha,\, q+f-\beta}_{p+l,\, q+f}$. Каждая из полученных систем в силу неравенства (2.20) удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет единственное решение $D_{pq} = D^{\alpha\beta i}_{pq}$, $p+q > N$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{p+q>N} \| D^{\alpha\beta i}_{pq} \|^{3/2} < \infty, \quad 0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что величины ρ и τ из леммы соответственно равны 3 и $\frac{3}{2}$; в случае n независимых переменных $\rho = n+1$, $\tau = \frac{1}{n}(n+1)$.

Применяя теперь замечание к лемме к системе (2.19), получаем решение данной системы в виде

$$D_{pq} = \sum_{0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N} \sum_{i=1}^{m} D^{\alpha\beta i}_{pq} D^{(i)}_{\alpha\beta} = \sum_{0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N} D^{\alpha\beta}_{pq} D_{\alpha\beta}, \quad p+q \geqslant N+1, \tag{2.21}$$

где $D^{(i)}_{\alpha\beta}$ — произвольные числа, $D_{\alpha\beta}$ — m-мерные вектор-столбцы, образованные из этих чисел, а $D^{\alpha\beta}_{pq}$ — квадратные матрицы, столбцами которых являются векторы $D^{\alpha\beta i}_{pq}$, $i = 1, \ldots, m$, $0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N$. Решение системы (2.19), определенное формулами (2.21) для произвольных векторов $D_{\alpha\beta}$ $(0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{p+q>N} \| D_{pq} \|^{3/2} < \infty. \tag{2.22}$$

Для сходимости нашего ряда (2.7) это условие является необходимым и достаточным. Действительно, если ряд (2.7) является решением системы (2.6), то ряд

$$\sum_{p,\, q=0}^{\infty} \| C_{pq} \| \, |z|^{p+\lambda} \, |w|^{q+\mu} \tag{2.23}$$

сходится в бицилиндре $\{|z| \leqslant R,\ |w| \leqslant R\}$, значит, $\| C_{pq} \| \leqslant MR^{-p-q}$, или $\| D_{pq} \| \leqslant M\theta^{p+q}$, где M — некоторая постоянная. Отсюда следует сходимость ряда в (2.22). Наоборот, из условия (2.22) при больших $p+q$ следует неравенство $\| D_{pq} \| < 1$, т. е. $\| C_{pq} \| < (\theta R)^{-p-q}$. Вследствие произвольности θ $(0 < \theta < 1)$ отсюда следует, что ряд (2.23) сходится в бицилиндре $\{|z| < R,\ |w| < R\}$.

Нам осталось выбрать $D_{\alpha\beta}$ $(0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant N)$ так, чтобы $C_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(\theta R)^{-\alpha-\beta}$ удовлетворяли системе уравнений

$$\chi(p-l,\ q-f)\,C_{p-l,\ q-f} + \sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q}\chi_{pq}^{\alpha\beta}C_{p-\alpha,\ q-\beta} = 0, \quad 0 \leqslant p+q \leqslant N+l+f. \tag{2.24}$$

Рассмотрим два случая: 1) $l+f \geqslant 0$, $|l|+|f| \neq 0$; 2) $l+f<0$.

Случай $l=f=0$ рассмотрен в § 1. Пусть теперь $l+f \geqslant 0$ $(|l|+|f| \neq 0)$. В этом случае (2.24) представляет собой систему $\varkappa_1 = \frac{1}{2}(N+l+f+2)(N+l+f+1)$ однородных линейных векторных уравнений относительно неизвестных векторов $C_{\alpha\beta}$ с матричными коэффициентами, $0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N+l+f$. Однако, если $l+f>0$, то векторы $C_{\alpha\beta}$, для которых $\alpha+\beta > N$, не произвольны, а должны удовлетворять равенствам (2.21). Поэтому к системе (2.24) нужно присоединить $\varkappa_2 = (l+f)\left(N+\frac{1}{2}(l+f)+\frac{3}{2}\right)$ векторных уравнений

$$C_{pq} = \sum_{0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N} E_{pq}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}, \quad N+1 \leqslant p+q \leqslant N+l+f, \tag{2.25}$$

где $E_{pq}^{\alpha\beta} = D_{pq}^{\alpha\beta}(\theta R)^{\alpha+\beta-p-q}$. Следовательно, для определения $\varkappa_1$ неизвестных векторов $C_{\alpha\beta}$ имеем систему $\varkappa_1+\varkappa_2$ векторных однородных линейных уравнений. Матрица этой системы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix}
\chi_{00}^{00} & & & & & & \\
\chi_{10}^{10} & \chi_{10}^{00} & & & & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & \\
\chi_{0N}^{0N} & 0 & \ldots & \chi_{0N}^{00} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\chi_{0,\ N+l+f}^{0,\ N+l+f} & 0 & \ldots & \chi_{0,\ N+l+f}^{0,\ l+f} & \ldots & \chi_{0\ N+l+f}^{00} & \\
E_{N+1,\ 0}^{00} & E_{N+1,\ 0}^{10} & \ldots & E_{N+1,\ 0}^{0N} & E & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_{0,\ N+l+f}^{00} & E_{0,\ N+l+f}^{10} & \ldots & E_{0,\ N+l+f}^{0N} & 0 & \ldots & E
\end{pmatrix},$$

где на незаполненных местах стоят нули, E — единичная матрица.

Чтобы наша система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы Q был меньше, чем $\varkappa_1$. В общем случае практически невозможно указать ранг этой матрицы, так как для определения матриц $E_{pq}^{\alpha\beta}$ нужно решать бесконечные системы уравнений. Поэтому мы ограничимся рассмотрением квадратной матрицы Q', которая получается из Q, если отбросим последние $\varkappa_2$ строк*:

$$Q' = \begin{pmatrix}
\chi_{00}^{00} & & & \\
\chi_{10}^{10} & \chi_{10}^{00} & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\
\chi_{0,\ N+l+f}^{0,\ N+l+f} & 0 & \ldots & \chi_{0,\ N+l+f}^{00}
\end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

* Если $l+f=0$, то $\varkappa_2=0$ и $Q'=Q$.

Ранг последней матрицы легко вычислить, пользуясь равенствами (2.9) и (2.10). Если ранг матрицы Q' равен r, то при условии $h = \varkappa_1 - \varkappa_2 - r > 0$ существует по крайней мере h линейно независимых решений. Резюмируя наши выводы, можем сформулировать теорему.

Теорема 3. *Пусть в системе уравнений (2.6) матрицы A_{ij} $(i+j=k)$ с постоянными элементами удовлетворяют условию*

$$\det \Big(\sum_{i+j=k} A_{ij}\eta_1^i\eta_2^j\Big) \neq 0, \quad \eta_1,\ \eta_2 \geqslant 0, \quad \eta_1+\eta_2=1,$$

а элементы матриц $A_{ij}(z, \omega)$ $(0 \leqslant i+j < k)$ голоморфные в окрестности начала координат (целые) функции. Для того чтобы система (2.6) при $l+f \geqslant 0$ $(|l|+|f| \neq 0)$ имела решение вида $z^\lambda \omega^\mu V(z, \omega)$, где $V(z, \omega)$ — голоморфная в окрестности начала координат (целая) вектор-функция, достаточно, чтобы при фиксированных λ и μ и произвольном $N > N_0 = N_0(l, f, \lambda, \mu)$ матрица (2.26), составленная из тейлоровских коэффициентов матричных коэффициентов системы (2.6) с помощью формул (2.9) и (2.10), имела ранг r, удовлетворяющий условию $h = \varkappa_1 - \varkappa_2 - r > 0$. При этом число линейно независимых решений $z^\lambda \omega^\mu V(z, \omega)$ с фиксированными λ и μ по крайней мере равно h.

Рассмотрим теперь случай $l+f<0$. В этом случае для определения произвольных $\varkappa_3 = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ векторов $C_{\alpha\beta}$ $(0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N)$ имеем систему $\varkappa_1 = \frac{1}{2}(N+l+f+1)(N+l+f+2)$ векторных уравнений (2.24). Так как $l = \varkappa_3 - \varkappa_1 > 0$, система (2.24) всегда имеет, по крайней мере, $lm = (\varkappa_3 - \varkappa_1)m$ линейно независимых решений. Поскольку $l = \varkappa_3 - \varkappa_1 = -N(l+f) - \frac{1}{2}(l+f)^2 - \frac{3}{2}(l+f)$ в зависимости от N может быть сделано сколь угодно большим, можем утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы относительно системы (2.6) с $l+f<0$. Тогда существует бесконечное множество решений системы (2.6) вида $z^\lambda\omega^\mu V(z, \omega)$, где λ и μ — произвольные комплексные числа, $V(z, \omega)$ — голоморфная в окрестности нуля или целая вектор-функция в зависимости от того, являются ли коэффициенты системы (2.6) голоморфными в окрестности нуля или целыми функциями. В частности, если коэффициенты системы (2.6) целые, то существует бесконечное множество целых решений.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.— Л., 1941.

2. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 2, Analysis II B 5, Leipzig, B. G. Teubner 1901—1921.

3. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит. М., 1958.

4. J. Horn. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen I. Math. Ann., 39 (1891), 391—408.

5. J. Horn. Über ein System linearer partieller Differentialgleichungen. Acta Math., **12** (1889), 113—175.

6. J. Horn. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen. Acta Math., **14** 1890/91), 337—347.

7. J. Horn. Über System linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen. *Habilitationsschrift der Universität Freiburg i. B. Berlin, Mayer und Müller, 1890.*

8. L. Fuchs. Über lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, I (1891), 157—176.

9. J. Horn. Zur Integration der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Math. Ann., 42, (1893), 215—252.

10. Ш. И. Стрелиц. Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных. «Матем. сб.», 60 (102): 2 (1963), 121—130.

11. O. Perron. Beispile linearer Differentialgleichungen mit partikulären Integralen, die sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Acta Math, **48** (1926), 345—351.

12. O. Perron. Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Math. Ann., **70** (1911), 1—32.

13. E. Hilb. Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Math. Ann., **82** (1921), 40—41.

14. F. Lettenmeyer. Über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen. Sitzungsber. Bayerischen Akad. Wiss. (1926), 287—307.

15. А. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.

16. Ф. И. Гече. О целых решениях систем дифференциальных уравнений в частных производных. (См. данный сборник).