МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 39

Республиканский
междуведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1983

УДК 511 + 512.62.

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

СТЕПЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ НА p-АДИЧЕСКОМ ДИСКЕ

Пусть K - полное нормированное расширение поля p-адических чисел, $p \neq 2$. Мы будем отождествлять в стандартном смысле [1] K —значные меры на компакте целых p-адических чисел Z_p и формальные степенные ряды с ограниченными коэффициентами из K. Например, мера Дирака δ_a отождествляется с рядом $\delta_e(X)=(1+X)^e$. Как функция множеств, мера μ восстанавливается по ряду $\mu(X)$ с помощью формулы

$$\mu(a+p^m Z_p)=\frac{1}{p^m}\sum_{i=0}^{p^m-1} w_m^{-\{a\}_m i}\,\mu(w_m^i-1), \tag{1}$$

где w_m — первообразный корень степени p^m из единицы, и для $a\in Z_p$ целое $\{a\}_m$ определяется условиями: $\{a\}_m-a\in p^m Z_p$; $0\leqslant\{a\}_m<p^m$. Пусть $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ — некоторая последовательность в K. Рассмотрим формальные степенные ряды $F(X)=\sum_{n\geqslant 0}\gamma_n\frac{X^n}{n!}$, $\log(1+X)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}$. Следующее утверждение является аналогом для случая мер леммы 2.4 из работы [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы существовала такая мера μ, что $\int_{Z_p} z^n\,d\mu(z)=\gamma_n$ $(n\geqslant 0)$* **(2)**, *необходимо и достаточно, чтобы ряд $F(\log(1+X))$ имел ограниченные коэффициенты. Этот ряд отождествляется с искомой мерой.*

Пример 1. Определим полиномы $D_n^{(\xi)}(Y)$ формальным разложением $\frac{e^{XY}}{1-\xi e^X}=\sum_{n\geqslant 0}D_n^{(\xi)}(Y)\frac{x^n}{n!}$. Положим $D_n^{(\xi)}=D_n^{(\xi)}(0)$. Проблема моментов (2) с $\gamma_n=D_n^{(\xi)}$ при условии $|\xi-1|\geqslant 1$ имеет решение $\mu_\xi(X)=(1-\xi(1+X))^{-1}$. По формуле (1) $\mu_\xi(a+p^m Z_p)=\xi^{\{a\}_m}(1-\xi^{p^m})^{-1}$. Эта мера играет важную роль в работах [3, 4].

Пример 2. Пусть $|\omega|=1\leqslant|1-\xi|$. Мера, определяемая моментами $\gamma_n=\omega^{-n}D_n^{(\xi)}$, имеет вид $\mu_\xi^{(\omega)}(X)=(1-\xi(1+X)^{\omega-1})^{-1}$. Можно показать, что $\mu_\xi^{(\omega)}(a+p^m Z_p)=\xi^{\{\omega a\}_m}(1-\xi^{p^m})^{-1}$.

Пример 3, [1, 2]. Пусть B_n — числа Бернулли, $r\in Z_p^*$. Решением проблемы моментов (2) с $\gamma_{n-1}=(1-r^n)B_n/n$ $(n\geqslant 1)$ является мера Бернулли-Мазура $\mu_{B,r}(X)=X^{-1}-r[(1+X)^r-1]^{-1}$. В случае натурального r, разлагая последнее выражение на простейшие дроби, получаем

$$\mu_{B,r}(X)=\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j(\varepsilon^j-(1+X))^{-1}=\sum_{j=1}^{r-1}\mu_{\varepsilon-j},$$

где ε — первообразный корень степени r из единицы. Последнее соотношение является ключевым в статье [3].

Рассмотрим теперь вопрос о существовании меры μ на произвольном диске $D(t,s)=t+p^s Z_p$ $(0\leqslant t<p^s,\ s\geqslant 0)$ такой, что

$$\int_{D(t,s)} z^n\,d\mu(z)=\gamma_n^{(t,s)}\quad(n\geqslant 0). \tag{3}$$

Для всякой меры μ на Z_p положим $\mu^{(t,s)}(V) = \mu(t + p^s V)$ $(V \subset \subset Z_p)$ (4). Мера $\mu^{(t,s)}$ определяется значениями меры μ на $D(t, s)$. Отметим для дальнейшего, что $\mu_\xi^{(t,s)} = \xi^t \mu_{\xi p^s}$. Непосредственно проверяется равенство $\int\limits_{D(t,s)} f(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{Z_p} f(t + p^s z)\,d\mu^{(t,s)}(z)$, откуда $\int\limits_{D(t,s)} z^n d\mu(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} p^{sk} \int\limits_{Z_p} z^k\, d\mu^{(t,s)}(z)$ (5). Пускай $F^{(t,s)}(X) = \sum\limits_{n\geq 0} \gamma_n^{(t,s)} \frac{X^n}{n!}$.

Теорема 2. *Проблема моментов* (3) *разрешима тогда и только тогда, когда ряд* $(1+X)^{-tp^{-s}} F^{(t,s)}(p^{-s}\log(1+X))$ *имеет ограниченные коэффициенты. Написанный ряд представляет меру* $\mu^{(t,s)}$. *Ограничение меры* μ *на* $D(t, s)$ *находится по формуле* (4).

Доказательство. В силу формулы (5) задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются равенства (2) для $\mu = \mu^{(t,s)}$ и $\gamma_k = p^{-sk} \sum\limits_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} t^{k-n} \gamma_n^{(t,s)}$. Пусть F — экспоненциальная производящая функция последовательности $(\gamma_k)_{k\geq 0}$. Формальное вычисление показывает, что $F(X) = \exp(-tp^{-s}) F^{(t,s)}(p^{-s}X)$. По теореме I для выполнения упомянутых равенств необходимо и достаточно, чтобы ряд $F(\log(1+X))(1+X)^{-tp^{-s}} F^{(t,s)} \times (p^{-s}\log(1+X))$ имел ограниченные коэффициенты. Он и отождествляется с мерой $\mu^{(t,s)}$.

При $t = s = 1$ проблема моментов (3) связана с вопросом об интегральном представлении непрерывной на Z_p функции в виде

$$f(z) = \int\limits_{1+pZ_p} \lambda^z d\mu(\lambda). \tag{6}$$

Введем формальные степенные ряды $A_f(X) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!}$, где $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \binom{z}{n}$ — разложение f в ряд Малера, и $F_f(X) = \sum\limits_{n\geq 0} f(n) \times \frac{X^n}{n!} = e^X A_f(X)$.

Следствие. *Для существования меры* μ, *дающей представление* (6), *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $A_f(p^{-1}\log(1+X)) = (1+X)^{-p^{-1}} F_f(p^{-1}\log(1+X))$ *имел ограниченные коэффициенты. Такой ряд отождествляется с мерой* $\mu^{(1,1)}$.

Пример 4. Для $c \in Z_p^*$ пусть, как обычно, $\omega(c)$ — единственный корень из единицы степени $p-1$, сравнимый с c по mod p, а функция $\langle\cdot\rangle$ определяется тождеством $c = \omega(c)\langle c\rangle$. Заметим, что $<c> \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Рассмотрим проблему моментов (3) с $\gamma_n^{(1,1)} = \left(\frac{p}{\omega(c)}\right)^n D_n^{(\xi)}\left(\frac{c}{p}\right)$ $(|\xi - 1| \geqslant 1)$. Тогда $F^{(1,1)}(X) = e^{\langle c\rangle X}(1 - \xi e^{p\omega(c)^{-1}X})^{-1}$. По теореме 2 $\mu^{(1,1)}(X) = (1+X)^{\frac{\langle c\rangle - 1}{p}} \times (1 - \xi(1+X)^{\omega(c)^{-1}})^{-1} = \mu_\xi^{(\omega(c))} \delta_{\frac{\langle c\rangle - 1}{p}}$.

Пример 5. Пусть натуральное $r \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $\gamma_{n,l}^{(1,1)} = p^n \times \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{p-1} \omega(i)^{l-n} \varepsilon^{-ji} D_n^{(\varepsilon - jp)}\left(\frac{i}{p}\right)$, где ε — первообразный корень степени r из единицы в $\boldsymbol{C}_p$. Для соответствующей проблемы моментов на $1 + p\boldsymbol{Z}_p$ имеем:

$$\mu_{(l)}^{(1,1)} = \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{p-1} \omega(i)^l \varepsilon^{-ji} \mu_{\varepsilon - jp}^{(\omega(i))} \sigma_{\frac{\langle i\rangle - 1}{p}}. \tag{7}$$

Рассмотрим функции $\varphi_{(l)}(z) = \int_{D(1,1)} \lambda^z d\mu_{(l)}(z)$. Они аналитичны на $\boldsymbol{Z}_p$ и обладают свойством: если $n \equiv l (\mathrm{mod}\ p-1)$, $n \geqslant 0$, то $\varphi_{(l)}(n) = (1 - r^{n+1})(1 - p^n)\frac{B_{n+1}}{n+1}$. Последнее вытекает из следующей формально проверяемой формулы: $(1 - p^n)(1 - r^{n+1})\frac{B_{n+1}}{n+1} = p^n \sum_{j=1}^{r-1} \times \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon^{-ji} D_n^{(\varepsilon - jp)}\left(\frac{i}{p}\right)$. Напомним, что p-адическая дзета-функция ζ_p характеризуется условиями: 1) $\zeta_p(1-n) = -(1 - p^{n-1})\frac{B_n}{n}$ $(n \in (p-1)\boldsymbol{N})$; 2) функция $z \mapsto (r^{1-z} - 1)\zeta_p(z)$ аналитична на $\boldsymbol{Z}_p$. Легко видеть, что $\varphi_{(-1)}(u) = (r^{u+1} - 1)\zeta_p(-u)$ или $(r^{1-z} - 1) \times \zeta_p(z) = \varphi_{(-1)}(-z) = \int_{D(1,1)} \lambda^{-z} d\mu_{(-1)}(\lambda)$. Таким образом, установлена

Теорема 3. *Для меры $\mu_{(-1)}$, определяемой соотношениями* (4), (7) *имеет место равенство* $(r^{1-z} - 1)\zeta_p(z) = \int_{1+pZ_p} \lambda^{-z} \times d\mu_{(-1)}(\lambda)$.

Существование такого представления было доказано в (5) другим способом, но явный вид меры приведен не был.

Пусть U — открытое компактное подмножество в $\boldsymbol{Z}_p$. Его можно записать в виде несвязного объединения дисков $D(i) = D(t_i, s_i)(1 \leqslant i \leqslant m)$. Пусть $F^{(U)}$ — экспоненциальная производящая функция некоторой последовательности $(\gamma_n^{(U)})_{n \geqslant 0}$.

Теорема 4. *Проблема моментов* $\int\limits_U z^n\,d\mu(z)=\gamma_n^{(U)}\quad(n\geqslant 0)\qquad(8)$ *разрешима тогда и только тогда, когда найдутся такие формальные степенные ряды* $F_i(1\leqslant i\leqslant m)$, что $F^{(U)}=\sum\limits_{i=1}^{m}F_i$ *и каждый ряд* $(1+X)^{-t_ip^{-s_i}}\cdot F_i(p^{-s_i}\log(1+X))$ *имеет ограниченные коэффициенты. Указанный ряд представляет меру* $\mu^{(t_i,s_i)}$. *Ограничение* μ *на каждое из подмножеств* $D(i)$ *восстанавливается по определению* (4).

Доказательство. Ряд F_i будем считать записанным в виде $F_i(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\gamma_n^{(i)}\frac{X^n}{n!}$. Пусть вначале требуемая мера μ существует. Положим $\gamma_n^{(i)}=\int\limits_{D(i)}z^n\,d\mu(z)$. Тогда первое условие выполняется в силу равенства (8), а второе вытекает из теоремы 2. Наоборот, пусть имеются ряды F_i, удовлетворяющие условиям теоремы. Положим $\mu^{(t_i,s_i)}(X)=(1+X)^{-t_ip^{-s_i}}F_i(p^{-s_i}\log(1+X))$. Это определит меры $\mu^{(i)}$ на дисках $D(i)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ такие, что $\int\limits_{D(i)}z^n\,d\mu^{(i)}(z)=\gamma_n^{(i)}(n\geqslant 0)$, и которые можно рассматривать как ограничение некоторой меры μ, заданной на U. Суммируя последние равенства, получаем (8).

Пример 6. Пусть $U=\mathbf{Z}_p^*=\bigcup\limits_{i=1}^{p-1}(i+p\mathbf{Z}_p)$. Покажем, что проблема моментов (8) с $\gamma_n^{(U)}=(1-p^n)(1-r^{n+1})\frac{B_{n+1}}{n+1}((p,r)=1)$ приводит к ограничению меры Бернулли-Мазура $\mu_{B,r}$ на $\mathbf{Z}_p^*$. Имеем $F^{(U)}(X)=(e^X-1)^{-1}-r(e^{rX}-1)^{-1}-p(e^{pX}-1)^{-1}+rp\times\times(e^{rpX}-1)^{-1}$. Далее возьмем $F_i(X)=e^{iX}\sum\limits_{j=1}^{r-1}\varepsilon^{-ji}(1-\varepsilon^{-jp}e^{pX})^{-1}$.

Тогда $\mu^{(i,1)}=\sum\limits_{j=1}^{r-1}\varepsilon^{-ji}\mu_{\varepsilon^{-jp}}=\mu_{B,r}^{(i,1)}$, согласно примеру 3. Отсюда $\mu=\mu_{B,r}$ на $i+p\mathbf{Z}_p$ $(1\leqslant i\leqslant p-1)$.

В заключение сформулируем результат, представляющий интерес в связи с p-адическим преобразованием Меллина [1].

Теорема 5. *Для того, чтобы существовала мера* μ *на* $\mathbf{Z}_p^*$, *для которой* $\int\limits_{Z_p^*}\langle z\rangle^n z^{-1}\,d\mu(z)=\beta_n\ (n\geqslant 1)$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие ряды* $F_i\ (1\leqslant i\leqslant p-1)$, что

$\sum_{n>1} \beta_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^{p-1} \omega(i)^{-1} F_i(\omega(i)^{-1} X)$, *и каждый ряд* $\mu^{(i,1)}(X) = (1+X)^{-ip^{-1}} F_i(p^{-1} \log(1+X))$ *имел ограниченные коэффициенты.*

Список литературы: *Lang S.* Cyclotomic fields. New York e. a., Springer, 1978. XI.— 253 p. 2. *Amice Y.* Duals. Proceedings of the conference on p-adic analysis (University of Nijmegen, 1978), p. 1 — 15. 3. *Koblitz N.* A new proof of certain formulas for p-adic L-functions. Duke Math. J., 1979, v. 46, № 2, p. 455 — 468. 4. *Осипов Ю. В.* p-адические дзета-функции и числа Бернулли. — В кн.: Исследования по теории чисел, 6. — (Зап. науч. семин. ЛОМИ, т. 93), Л.: Наука, 1980, с. 192 — 203. 5. *Barsky D.* Transformation de Cauchy p-adique et algébre d'Iwasawa. Math. Ann. 1978, v. 232, p. 255 — 266.

Поступила в редколлегию 31. 08. 81.