МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 35 Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА“
1981

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ p-АДИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТИ

Пусть $\boldsymbol{Q}_p$ — поле p-адических чисел, $\boldsymbol{Z}_p$ — аддитивная группа целых p-адических чисел, $\boldsymbol{Z}_p^*$ — мультипликативная группа чисел $z \in \boldsymbol{Q}_p$, $|z| = 1$. Для $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p^*$ рассмотрим многочлены

$$P_n^\alpha(X) = (X-1)(X-\alpha)\dots(X-\alpha^{n-1}),\ Q_n^\alpha(X) = \frac{P_n^\alpha(X)}{P_n^\alpha(\alpha^n)}.$$

Введем следующий аналог биномиального коэффициента. При $m \geqslant n \geqslant 0$ положим

$$\binom{m}{n}_\alpha = \alpha^{\binom{m-n}{2}} Q_n^\alpha(\alpha^m).$$

Для остальных значений m, n считаем, что $\binom{m}{n}_\alpha = 0$. Имеют место следующие соотношения:

$$\binom{m}{n-1}_\alpha + \alpha^m \binom{m}{n}_\alpha = \binom{m+1}{n}_\alpha, \quad \alpha^{\binom{n}{2}} \binom{m}{n}_\alpha = \alpha^{\binom{m-n}{2}} \binom{m}{m-n}_\alpha,$$

$$P_n^\alpha(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_\alpha X^k. \qquad (1)$$

Пусть E — ультраметрическое банахово пространство над полем $K \supset \mathbf{Q}_p$, S — компактное 0-мерное топологическое пространство, $C(S, E)$ — банахово пространство непрерывных функций $f\colon S \to E$ с нормой $\|f\| = \sup\{\|f(s)\|\colon s \in S\}$. Обозначим $C(S) = C(S, K)$.

В пространстве $C(\mathbf{Z}_p^*, E)$ определим линейный оператор Δ_α по правилу

$$(\Delta_\alpha f)(z) = \frac{f(\alpha z) - f(z)}{z}.$$

Очевидно, что $\|\Delta_\alpha\| \leqslant 1$.

Лемма. *Для любой $f \in C(\mathbf{Z}_p^*, E)$ выполняются равенства*

$$(\Delta_\alpha^n f)(z) = \alpha^{-\binom{n}{2}} z^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_\alpha f(\alpha^k z), \qquad (2)$$

$$f(\alpha^m z) = \sum_{n=0} \binom{m}{m-n}_\alpha z^n (\Delta_\alpha^n f)(z).$$

Из второго соотношения вытекает формула

$$f(\alpha^m) = \sum_{n=0}^{m} \alpha^{\binom{n}{2}} (\Delta_\alpha^n f)(1) Q_n^\alpha(\alpha^m). \qquad (3)$$

С этого момента будем считать, что $|\alpha^{p-1} - 1| = |p|$ и $\bar{\alpha}$ является образующей группы $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Тогда последовательность (α^m) плотна в $\mathbf{Z}_p^*$ и $\|Q_n^\alpha\| = 1$ [1]. Пользуясь этим, можно доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n^\alpha\| = 0. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C(\mathbf{Z}_p^*, E)$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_\alpha^n f = 0$ и справедливо равенство*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \Delta^{\binom{n}{2}} (\Delta_\alpha^n f)(1) Q_n^\alpha(z). \qquad (5)$$

Докажем вначале первое утверждение. Следуя методу доказательства теоремы Капланского (см. [2]), можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином P_ε с коэффициентами из E, что $\|f - P_\varepsilon\| < \varepsilon$. Пусть $n_\varepsilon \in N$таково, что $\Delta_\alpha^{n_\varepsilon} P_\varepsilon = 0$. Тогда для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется $\|\Delta_\alpha^n f\| = \|\Delta_\alpha^n (f - P_\varepsilon)\| \leqslant \|f - P_\varepsilon\| < \varepsilon$. Следовательно, ряд в правой части равномерно сходится к непрерывной функции. Согласно (3) обе части равенства (5) совпадают на плотном подмножестве (α^m), а значит и всюду на Z_p^*.

Следствие. Для любой $f \in C(Z_p^*, E)$ верно

$$\|f\| = \sup\left\{\left|\left(\Delta_\alpha^n f\right)(1)\right| : n \geqslant 0\right\}. \tag{6}$$

Равенства (5), (6) показывают, что система $(Q_n^\alpha)_{n \geqslant 0}$ является ортонормированным базисом в $C\left(Z_p^*\right)$. Этот факт не является новым (см. [1, 2]). Для нас, однако, важен явный вид коэффициентов в (5).

Теорема 2: *Всякое сильно (равномерно) непрерывное представление группы Z_p^* в пространстве E имеет вид $T(z) = \sum_{n \geqslant 0} P_n^\alpha(T(\alpha))\, Q_n^\alpha(z)$, где ряд сходится в соответствующем смысле.*

Утверждение следует из теоремы 1, примененной к функции $T(z)$ и вытекающего из равенств (1), (2) соотношения

$$\left(\Delta_\alpha^n T\right)(z) = \alpha^{-\binom{n}{2}} P_n^\alpha(T(\alpha))\, z^{-n} T(z).$$

Положим

$$\binom{r,\ s}{k}_\alpha = \frac{P_{r+s-k}^\alpha(\alpha^s)\, P_{r+s-k}^\alpha(\alpha^r)}{P_{r+s-k}^\alpha(\alpha^{r+s-k})}.$$

Отметим без доказательства следующую формулу:

$$P_r^\alpha P_s^\alpha = \sum_{k=\max\{r,\ s\}}^{r+s} \binom{r,\ s}{k}_\alpha P_k^\alpha. \tag{7}$$

Введем множество $K_\alpha[[X]]$ «формальных интерполяционных рядов»

$$F(X) = \sum_{n \geqslant 0} \mu_n P_n^\alpha(X) \tag{8}$$

с коэффициентами $\mu_n \in K$. Определим умножение рядов с учетом дистрибутивности и соотношения (7):

$$\left(\sum_{r \geqslant 0} \mu_r P_r^\alpha\right)\left(\sum_{s \geqslant 0} \nu_s P_s^\alpha\right) = \sum_{k \geqslant 0}\left(\sum_{r=0}^{k} \sum_{s=k-r}^{k} \binom{r,\ s}{k}_\alpha \mu_r \nu_s\right) P_k^\alpha.$$

Для ряда (8) естественно определяется значение

$$F(\alpha^m) = \sum_{n=0}^{m} \mu_n P_n^\alpha(\alpha^m).$$

Справедливо условие равенства рядов:

$$F_1 = F_2 \leftrightarrow F_1(\alpha^m) = F_2(\alpha^m) \quad (m \geqslant 0). \tag{9}$$

Пусть $K_\alpha\langle X\rangle$ — множество рядов (8) с ограниченными коэффициентами. Определим норму ряда F, полагая $\|F\|_\alpha = \sup\{|\mu_n| : n \geqslant 0\}$. Неравенство $\|F_1F_2\|_\alpha \leqslant \|F_1\|_\alpha \|F_2\|_\alpha$ выполняется благодаря тому, что $\left|\binom{r,\ s}{k}_\alpha\right| \leqslant 1$. Поэтому $K_\alpha\langle X\rangle$ является ультраметрической банаховой алгеброй.

В силу соотношения (4), ряд (8) можно рассматривать как непрерывную на Z_p^* функцию с разложением по базису

$$F(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mu_n P_n^\alpha(\alpha^n) Q_n^\alpha(z). \tag{10}$$

Это позволяет рассматривать Δ_α как оператор в $K_\alpha\langle X\rangle$. В силу единственности разложения (10) для любого $n \geqslant 0$ имеем:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_\alpha F(\alpha^k)\right| = |\mu_n P_n^\alpha(\alpha^n)| \leqslant \|F\|_\alpha \|P_n^\alpha\|.$$

Теорема 3. *Для того чтобы существовал ряд $F \in K_\alpha\langle X\rangle$ такой, что $F(\alpha^k) = F_k$ для всех $k \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой константы $C > 0$ и всех $n \geqslant 0$ выполнялись неравенства*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_\alpha F_k\right| \leqslant C \|P_n^\alpha\|.$$

Следствие. Ряд F обратим в алгебре $K_\alpha\langle X\rangle$ тогда и только тогда, когда существует такая константа $C > 0$, что для всех $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_\alpha \frac{1}{F(\alpha^k)}\right| \leqslant C \|P_n^\alpha\|.$$

В частности, элемент $\lambda - X$ обратим в $K_\alpha\langle X\rangle$ тогда и только тогда, когда $\lambda \overline{\in} Z_p^*$.

Теорема 4. *Всякий гомоморфизм $K_\alpha\langle X\rangle \to K$ имеет вид $F \mapsto F(\lambda)$ с некоторым $\lambda \in Z_p^*$.*

Напомним, что спектральной нормой элемента a алгебры A называется величина $\|a\|_{sp} = \sup |\varphi(a)|$, где φ пробегает все гомоморфизмы $A \to K$.

Следствие. Для любого $F \in K_\alpha\langle X\rangle$ выполняется $\|F\|_{sp} = \|F\| = \sup\{|\mu_n| \|P_n^\alpha\| : n \geqslant 0\}$.

Групповой алгеброй $M(G)$ компактной O-мерной группы G называется [3] алгебра ограниченных линейных функционалов на $C(G)$ с обычной нормой и сверткой в качестве умножения. Известно [3], что $M(Z_p)$ изометрически изоморфна алгебре ограниченных формальных степенных рядов $K\langle X\rangle$.

Теорема 5. *Отображение, сопоставляющее мере* μ *ряд* (8) *с коэффициентами* $\mu_n = \mu(Q_n^\alpha)$, *является изометрическим изоморфизмом алгебры* $M(\mathbf{Z}_p^*)$ *на* $K_\alpha\langle X\rangle$.

Доказательство. Линейность и изометричность очевидны. Установим мультипликативность. Из теоремы 2, примененной к представлению $z \to z^m$, следует, что

$$\sum_{n=0}^{m} P_n^\alpha(\alpha^m)\, Q_n^\alpha(xy) = (xy)^m = x^m y^m =$$

$$= \left\{\sum_{r=0}^{m} P_r^\alpha(\alpha^m)\, Q_r^\alpha(x)\right\} \left\{\sum_{s=0}^{m} P_s^\alpha(\alpha^m)\, Q_s^\alpha(y)\right\}.$$

Подействуем на обе части этого равенства функционалом $\mu \divideontimes \nu$:

$$\sum_{n=0}^{m} P_n^\alpha(\alpha^m)(\mu \divideontimes \nu)_n = \sum_{r=0}^{m} P_r^\alpha(\alpha^m)\,\mu_r \sum_{s=0}^{m} P_s^\alpha(\alpha^m)\,\nu_s.$$

В силу условия (9) это означает, что $\sum_{n\geqslant 0}(\mu \divideontimes \nu)_n P_n^\alpha = \sum_{r\geqslant 0}\mu_r P_r^\alpha \times$ $\times \sum_{s\geqslant 0}\nu_s P_s^\alpha$.

Список литературы: 1. *Amice Y.* Interpolation p — adique.— Bull. Soc. Math. France, 1964, t. 92, p. 117—180. 2. *Rooij A. C. M. van.* Non — Archimedean Functional Analysis.— Dept. of Mathematics of the Catholic University. Nijmegen, 1973. 3. *Put M. van der.* Difference equations over p — adic fields.— Math. Ann., 1972, vol. 198, № 3, p. 189—203.

Поступила 14 мая 1979 г.

УДК 513.88: 519.4

О представлениях p-адической окружности. Калюжный В. Н. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 35. Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 41—45.

Пусть Z_p^* — группа p-адических чисел, по модулю равных единице. Указан общий вид представлений группы Z_p^* в ультраметрическом банаховом пространстве. Определена алгебра «формальных интерполяционных рядов» с ограниченными коэффициентами. Доказано, что групповая алгебра группы Z_p^* изометрически изоморфна этой алгебре.

Список лит.: 3 назв.