МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 31 Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1964 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1979

УДК 512.86

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

О КРИТИЧЕСКОМ ПОКАЗАТЕЛЕ СЖАТИЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E^n — евклидово пространство размерности n. Рассмотрим класс сжатий в E^n: $\sum = \{A : \|A\| = 1, \rho(A) < 1\}$. Критическим показателем оператора $A \in \sum$ назовем число $q(A) = \min\{k \in N : \|A^k\| < 1\}$. В. Птаком [1] было доказано (в иной формулировке) неравенство

$$q(A) \leqslant n. \tag{1}$$

Другие доказательства этого факта были даны в [2], [3]. Оценка (1) точна во всем классе Σ. Установим более точные индивидуальные оценки. Обозначим через U, S единичные шар, сферу пространства E^n.

Возьмем сжатие $A \in \sum$. Пусть R_k — левый операторный модуль оператора A^k ($k = 0, 1, \ldots$), L_k — подпространство неподвижных векторов оператора R_k. Заметим, что $\|A^k\| = \|R_k\| = \rho(R_k)$ и что $L_k(0)$ тогда и только тогда, когда $\rho(R_k) < 1$. Определению $q(A)$ можно придать следующую форму: $q(A) = \min\{k \in N : L_k = (0)\}$.

Выберем фазовый множитель T_k оператора A^k так, чтобы равенство $A^k x = T_k x$ выполнялось для всех $x \in L_k$. Для оператора A^k имеет место полярное разложение [4]: $A^k = R_k T_k$. При $k = 0$ имеем $R_0 = T_0 = I$, $L_0 = E^n$.

Лемма. *Подпространства L_k образуют цепочку $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_{q(A)} = (0)$, в которой все включения строгие.*

Доказательство. Поскольку R_k является единичным оператором на L_k и строгим сжатием на ортогональном дополнении $L_k^\perp$, то $S \cap A^k U = S \cap R_k U = S \cap L_k$. Отсюда

$$L_k = \operatorname{Lin}(S \cap A^k U). \tag{2}$$

Поскольку A — сжатие, то $L_{k+1} \subset L_k$. Покажем, что

$$L_{k+1} \subset A L_k. \tag{3}$$

В силу (2) достаточно проверить включение $S \cap A^{k+1} U \subset A(S \cap A^k U)$. Если $x = A^{k+1} y$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$, то $\|A^k y\| = 1$, поэтому $x = A(A^k y) \in A(S \cap A^k U)$.

Предположим, что $L_{k+1} = L_k \neq (0)$. Тогда из (3) следует, что $L_k \subset A L_k$, а согласно размерности, — что $A L_k = L_k$. В таком случае $A^k | L_k = T_k | L_k$ является изометрией. Следовательно,

$$\rho(A) \geqslant \rho(A | L_k) = \rho(A^k | L_k)^{\frac{1}{k}} = 1,$$

что невозможно для $A \in \sum$.

Теорема. *Для любого* $k=0, 1, \ldots, q(A)$ *выполняются неравенства*

$$q(A) \leqslant k + \dim L_k. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку в цепочке $L_k \supset L_{k-1} \supset \ldots \supset L_{q(A)} = (0)$ все включения строгие, то $\dim L_k \geqslant q(A) - k$.

Замечание 1. Неравенства (4) можно переписать в виде $q(A) \leqslant n + k - \mathrm{rg}(I - R_k)$.

Замечание 2. При $k=0$ неравенства (4) содержат неравенство В. Птака $q(A) \leqslant n$.

Замечание 3. Покажем, что неравенства (4) являются точными. Возьмем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Пусть R — ортопроектор на линейную оболочку $L_1 = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_m)$, а оператор T циклически переставляет базисные векторы. Положим $A = RT$. Тогда $\|A^m\| = 1$, $A^{m+1} = 0$ и, следовательно, $q(A) = m + 1$. Оператор R_k является ортопроектором на подпространство $\mathrm{Lin}(e_k, \ldots, e_m)$, поэтому $\dim L_k = m - k + 1$.

Список литературы: 1. *Ptak V.* Norms and spectral radius of matrices, — «Czech. Math J.». 1962, N 12, p. 555—557. 2. *Flanders H.* On the norm and spectral radius.— «Linear and Multilinear Algebra», 1974, № 2. p. 239—240. 3. *Wimmer Harold K.* Spektralradius und spektralnorm. Czech.— «Math. J.», 1974, № 24, p. 501—502. 4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967. 567 с.

Поступила 20 октября 1975 г.