МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 36

Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1981

УДК 513.88+512 *В. Н. КАЛЮЖНЫЙ*

НЕАРХИМЕДОВ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ГОФФМАНА — ВИЛАНДТА

Теорема Гоффмана — Виландта излагается в монографии [1, гл. 8, задачи 114—118]. Мы установим неархимедов аналог этой теоремы. Необходимые сведения из неархимедова функционального анализа можно найти в книге [2].

Пусть K — поле с нетривиальным ультраметрическим абсолютным значением, E — неархимедово нормированное, n-мерное, линейное пространство над K. Система векторов $x_1, \dots, x_m$ называется ортогональной, если для любых скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выполняется равенство $\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \| = \max \{ |\alpha_j| \| x_j \| : 1 \leqslant j \leqslant m \}$. В дальнейшем будет считаться, что пространство E — евклидово, т. е. обладает ортонормированным базисом. Норма оператора определяется обычным образом и оказывается равной $\|A\| = \|A_\Delta\| = \max\{|a_{ik}| : 1 \leqslant i, \ k \leqslant n\}$, где $A_\Delta = (a_{ik})$ — матрица оператора A в ортонормированном базисе Δ. Оператор T называется унитарным, если $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Матрица называется унитарной, если ее система строк (столбцов) ортонормированна. Матрица унитарного оператора унитарна. Для унитарности матрицы T необходимо и достаточно, чтобы $\|T\| \leqslant 1 = |\det T|$. Множество всех унитарных матриц обозначим U_n. Оператор называется нормальным [3, 4], если он обладает ортонормированным базисом из собственных векторов. Пример жордановой клетки показывает, что унитарный оператор не обязан быть нормальным. Пусть S_n — группа всех подстановок степени n.

Лемма. *Для любой матрицы $C = (c_{ij})$ выполняются равенства*

$$\min\{\max\{|c_{ij}| |t_{ij}| : 1 \leqslant i, j \leqslant n\} : (t_{ij}) \in U_n\} = \\ = \min\{\max\{|c_{i\sigma(i)}| : 1 \leqslant i \leqslant n\} : \sigma \in S_n\}; \tag{1}$$

$$\max\{\max\{|c_{ij}| |t_{ij}| : 1 \leqslant i, t \leqslant n\} : (t_{ij}) \in U_n\} = \\ = \max\{|c_{ij}| : 1 \leqslant i, j \leqslant n\} = \|C\|. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим m_1 (m_2) левую (правую) часть равенства (1). Поскольку для любой $\sigma \in S_n$ матрица-подстановка $(\delta_{\sigma(i)j})$ является унитарной, то $m_1 \leqslant m_2$. С другой стороны, для любой унитарной матрицы (t_{ij}) найдется такая подстановка τ, что $|t_{i\tau(i)}| = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому $\max\{|c_{ij}| |t_{ij}| : 1 \leqslant i, j \leqslant n\} \geqslant \max\{|c_{i\tau(i)}| |t_{i\tau(i)}| : 1 \leqslant i \leqslant n\} = \max\{|c_{i\tau(i)}| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \geqslant m_2$. Отсюда следует, что $m_1 \geqslant m_2$.

Очевидно, левая часть равенства (2) не превосходит $\|C\|$. Пусть $\|C\| = |c_{pq}|$, τ — такая подстановка, что $\tau(q) = p$. Тогда равенство в соотношении (2) достигается на матрице $(\delta_{i\tau(j)})$.

Зафиксируем нормальный оператор A со спектром $\sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Пусть $\mathcal{B}$ — множество нормальных операторов B с заданным спектром $\sigma(B) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Теорема. *Имеют место соотношения* $\min\{\|A - B\| : B \in \mathcal{B}\} = \min\{\max\{|\alpha_i - \beta_{\sigma(i)}| : 1 \leqslant i \leqslant n\} : \sigma \in S_n\}$; $\max\{\|A - B\| : B \in \mathcal{B}\} = \max\{|\alpha_i - \beta_j| : 1 \leqslant i, \ j \leqslant n\}$.

Доказательство. В ортонормированном базисе Δ из собственных векторов оператора A матрицы операторов A, B имеют вид $A_\Delta = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$; $B_\Delta = T^{-1} \operatorname{diag}\{\beta_1, \dots, T\beta_n\}$, где $T =$

$= (t_{ij})$ — некоторая унитарная матрица. Заметим, что $\| A - B \| = \| A_\Delta - B_\Delta \| = \| TA_\Delta - TB_\Delta \| = \max \{ |\beta_i - \alpha_j| \, |t_{ij}| : 1 \leqslant i, \ j \leqslant n \}$. Пользуясь равенством (1), получим $\min \{ \| A - B \| : B \in \mathfrak{B} \} = \min \{ \max \{ |\beta_i - \alpha_j| \, |t_{ij}| : 1 \leqslant i, \ j \leqslant n \} : (t_{ij}) \in U_n \} = \min \{ \max \times \{ |\beta_i - \alpha_{\sigma(i)}| : 1 \leqslant i \leqslant n \} : \sigma \in S_n \}$.

Второе соотношение доказывается аналогично с использованием равенства (2).

Список литературы: 1. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ.—М.: Наука, 1969.—476 с. 2. *A. van Rooij*. Non-archimedean functional analysis.— Marcel Dekker, Inc., New York, 1978. 3. *Калюжный В. Н.* К спектральной теории операторов в конечномерных неархимедово нормированных пространствах.— Математический анализ и теория вероятностей.— К.: Наук. думка, 1978, с. 82—85. 4. *Калюжный В. Н.* Числовая область и области локализации матриц над полем с ультраметрическим абсолютным значением.—Докл. АН УзССР, 1978, № 3, с. 8—9.

Поступила 14 января 1980 г.