ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Вып. 7 1968

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ III

А. Ф. Гришин

Здесь мы перенесем результаты первой части на случай функций субгармонических в верхней полуплоскости Z_+. Будем рассматривать случай, когда $\rho > 0$.

Вначале введем некоторые обозначения.

Пусть мера μ, распределенная в замкнутой верхней полуплоскости, имеет формальный порядок $\rho(r)$. Через $\mu(t, \theta_1, \theta_2)$ обозначим меру сектора $|z| \leqslant t$, $\theta_1 \leqslant \arg z < \theta_2$, а

$$\bar{s}(\theta_1, \theta_2) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r, \theta_1, \theta_2)}{\tilde{r}}.$$

Обозначим $D_\varphi = \{z\colon\ y > 0,\ \sin\theta \leqslant \sin\varphi\}$; D_φ^+ — правая, а D_φ^- — левая части D_φ, $C_\varphi(z, a) = C(z, a) \cap D_\varphi$, $C^+(z, a) = C(z, a) \cap Z_+$.

Введем функцию плотности для меры μ:

$$\Phi(\alpha, \sin\varphi) = \varlimsup_{z\to\infty} \frac{\mu(C_\varphi(z, \alpha r))}{\tilde{r}}.$$

Эта функция — неубывающая по обоим аргументам. В случае области Z_+ нам пришлось вводить более сложную функцию плотности, чем в случае области Z. Отметим, что полученные для этой области результаты также имеют более сложную формулировку, что объясняется более сложной геометрией области Z_+.

В дальнейшем большой интерес будет представлять случай, когда интеграл

$$\frac{1}{\sin\theta}\int_0^1 \ln\frac{e}{t}\,d\Phi(t\sin\theta,\ \sin\theta) \tag{3.1}$$

ограничен для $0 < \sin\theta \leqslant 1$ и стремится к нулю при $\sin\theta \to 0$. Мы будем называть это условие условием (3.1). Очевидно, что оно является аналогом условия (1.1).

§ 1. Некоторые свойства функций плотности

Лемма 5. *Пусть функция $\Phi(t, \sin\theta)$ удовлетворяет условию (3.1). Тогда существует мажоранта $\Phi_1(t, \sin\theta)$ функции $\Phi(t, \sin\theta)$, удовлетворяющая условию (3.1) и условию*

$$\frac{t}{\Phi_1(t, \sin\theta)} \underset{t\to 0}{\to} 0 \tag{3.2}$$

при каждом фиксированном θ.

Достаточно взять $\Phi_1(t, \sin\theta) = \Phi(t, \sin\theta) + t^{1/2}(t + \sin\theta)^{3/4}$.

Лемма 6. *Если функция* $\Phi(t, \sin\theta)$ *удовлетворяет условию* (3.1), то

$$\lim_{\sin\theta\to 0}\frac{\Phi(\sin\theta, \sin\theta)}{\sin\theta}=0. \qquad (3.3)$$

Действительно,

$$\frac{1}{\sin\theta}\int_0^1 \ln\frac{e}{t}\,d\Phi(t\sin\theta, \sin\theta)>\frac{1}{\sin\theta}\int_0^1 d\Phi(t\sin\theta, \sin\theta)=\frac{\Phi(\sin\theta, \sin\theta)}{\sin\theta}.$$

Лемма 7. *Если* $\Phi(\alpha, \sin\theta)$, *функция плотности меры* μ, *удовлетворяет условию* (3,1), *то* $\Phi(\alpha, 0)=0$.

Имеем

$$\frac{\Phi(\alpha, 0)}{\alpha}<\frac{\Phi(\alpha, \alpha)}{\alpha}\underset{\alpha\to 0}{\to}0. \qquad (3.4)$$

Далее

$$\mu(C_0(r, \alpha, r))\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\mu\left(C_0\left(r-\alpha r+\frac{2k+1}{n}\alpha r, \frac{\alpha}{n}r\right)\right).$$

Разделив это неравенство на $\tilde r$, и перейдя к верхнему пределу при $r\to\infty$, получим

$$\Phi(\alpha, 0)<n(1+\alpha)^{\rho}\,\Phi\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)n}, 0\right).$$

Теперь из (3.4) следует наше утверждение.

Лемма 8. *Пусть*

$$\Phi_1(t-0, \sin\theta-0)\geqslant\Phi(t+0, \sin\theta+0),$$

где $\Phi(t, \sin\theta)$ — *функция плотности меры* μ.

Тогда функция $\varepsilon_+(r, \alpha, \sin\theta)$, *где*

$$\varepsilon(r, \alpha, \sin\theta)=\sup_{\sin\varphi\leqslant\sin\theta}\left[\frac{\mu(C_\varphi(z, \alpha r)}{\tilde r}-\Phi_1(\alpha, \sin\varphi)\right],$$

равномерно относительно α ***стремится к нулю при*** $r\to\infty$ ***и является неубывающей по последнему аргументу.***

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 1. Из нее следует, что функция

$$\varepsilon(r, \sin\theta)=\sup_{t\geqslant r}\sup_{\alpha}\varepsilon_+(t, \alpha, \sin\theta)$$

стремится к нулю при $r\to\infty$ и является монотонной по обоим аргументам.

Лемма 9. *Из условия* (3.3) *следует, что функции* $\overline{S}(0, \theta)$ *и* $\overline{S}(\pi-\theta, \pi+0)$ *стремятся к нулю при* $\theta\to 0$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\Phi(2\sin\theta, \sin\theta)}{\sin\theta}\leqslant 2\,\frac{\Phi(2\sin\theta, 2\sin\theta)}{2\sin\theta}\underset{\sin\theta\to 0}{\to}0 \qquad (3.5)$$

Область $D(\delta, t)=\left\{z;\ y\geqslant 0,\ \frac{1}{2}t\leqslant|z|\leqslant t,\ \theta\leqslant\delta\right\}$ покрывается кругами $C(r_j e^{i\delta}, 2\sin\delta r_j)$, $\frac{1}{2}t\leqslant r_j\leqslant t$, в количестве, не превосходящем

$\frac{A}{\sin\delta}$, где A — абсолютная константа. Отсюда, в силу (3.5), следует, что функция

$$\varphi(\delta) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu(D(\delta, t))}{\widetilde{t}}$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$. Далее имеем

$$\overline{S}(0, \delta) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu(t, 0, \delta)}{\widetilde{t}} \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu\left(\frac{t}{2}, 0, \delta\right)}{\widetilde{t}} + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu(D(\delta, t))}{\widetilde{t}} = \frac{1}{2^\rho}\overline{S}(0, \delta) + \varphi(\delta),$$

или

$$\overline{S}(0, \delta) \leqslant \frac{\varphi(\delta)}{1-2^{-\rho}},$$

и наша лемма доказана.

§ 2. Конечные меры в Z_+

Далее наша задача состоит в оценках интегралов по различным мерам, расположенным в Z_+, с ядром $\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|$, причем при $\sin\varphi = 0$ это ядро понимается как предел при $\sin\varphi \to 0$. Предварительно докажем одно свойство ядра.

Лемма 10. *Пусть* $\zeta - z = \alpha r e^{i\psi}$, $z = re^{i\theta}$, $\arg\zeta = \varphi$, $\varphi \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right| \geqslant \begin{cases} \frac{2}{\sin\theta-\alpha}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta-\alpha}, & \alpha < \sin\theta \\ -\frac{4\sin\theta}{\alpha^2}, & \alpha \geqslant \sin\theta \end{cases}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right| = \frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{\alpha}{-\alpha e^{i\psi}+2i(\sin\theta+\alpha\sin\psi)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2\alpha\cos(\theta-\psi)+\alpha^2}}{\sin\theta+\alpha\sin\psi}\ln\frac{\alpha^2}{\alpha^2+4\alpha\sin\theta\sin\psi+4\sin^2\theta} >$$

$$> \frac{1}{\sin\theta+\alpha\sin\psi}\ln\frac{\alpha^2}{\alpha^2+4\alpha\sin\theta\sin\psi+4\sin^2\theta}.$$

Исследуя знак производной полученной функции по переменной $\sin\psi$, можно показать, что эта функция возрастающая. Поэтому она оценивается снизу своим значением при $\sin\psi = -1$, если $\alpha < \sin\theta$, и пределом при $\sin\psi \to -\frac{\sin\theta}{\alpha}$, если $\alpha \geqslant \sin\theta$. Отсюда и вытекает нужная оценка. Теперь мы докажем такую теорему.

Теорема 6. *Пусть μ — мера в замкнутой верхней полуплоскости, такая, что*

$$\int_{Z_+} d\mu(\zeta) = S,$$

a

$$u(z) = \int_{Z_+} \frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right| d\mu(\zeta).$$

Тогда существует абсолютная постоянная B, такая, что вне множества кругов $C_j = C(z_j, a_j)$,

$$\frac{1}{r}\sum_{|z_j|\leqslant r} a_j < \frac{1}{M},$$

выполняется неравенство

$$u(z) > -BMS.$$

Доказательство. Для каждой точки $z \in Z_+$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ строим множество кругов $C(z, \alpha r)$, для которых выполняется неравенство $\mu(C(z, \alpha r)) > \alpha NS$.

Круг, для которого α принимает максимальное значение, обозначим C_z. Объединение открытых кругов C_z назовем A. Множество A распадается на не более чем счетное число связных компонент A_i. Пусть $G = C(g_i, R_i)$ — круг наименьшего радиуса, содержащий A_i; $l_r = \sum_{|g_i|<r} R_i$.

Тогда, как и в теореме 3, получим, что

$$\frac{1}{r} l_r \leqslant \frac{2}{N-2}.$$

Пусть теперь $z \overline{\in} A$. Тогда $\mu(C(z, \alpha r)) \leqslant \alpha NS$. Обозначим $\mu_z(t) = \mu(C(z, t\, r))$. Тогда, применяя лемму 10, найдем:

$$u(z) = \int \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta) \geqslant 2\int_0^{\sin\theta} \frac{1}{2\sin\theta - t} \ln\frac{t}{2\sin\theta - t}\, d\mu_z(t) -$$

$$-4\int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{t^2}\, d\mu_z(t) \geqslant 2NS \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sin\theta - t} \ln\frac{t}{2\sin\theta - t}\, dt -$$

$$-4NS\int_{\sin\theta}^{\frac{1}{N}} \frac{\sin\theta}{t^2}\, dt = 2NS\int_0^1 \frac{1}{1-t}\ln\frac{t}{2-t}\, dt -$$

$$-4NS(1 - N\sin\theta) \geqslant B'NS.$$

Взяв $N = 2M + 2$, мы получим утверждение нашей теоремы.

Эта теорема является аналогом обобщенной теоремы Картана для случая верхней плоскости. Подобную теорему для круга доказал Н. В. Говоров.

Теорема Говорова. *Пусть $f(z)$ — голоморфная и ограниченная функция в круге $C(0, 1)$ и $|f(0)| \geqslant 1$. Тогда вне множества кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $\frac{1}{N}$, $N > 1$, выполняется неравенство*

$$\ln|f(z)| > -BN \sup \ln|f(z)|.$$

Связь между указанными теоремами становится хорошо заметной, если взять в качестве $f(z)$ функцию

$$f(z) = \frac{B(z)}{B(0)},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке для круга. Тогда теорема Говорова даст оценку снизу функции $B(z)$ через корни этой функции.

Теорема 7. *Пусть в замкнутом полукольце $C^{+}(0, R) \setminus C(0, 1)$ распределена конечная мера μ, $\mu(C^{+}(0, R)) = S$. Тогда вне множества кругов со сколь угодно малой суммой радиусов функция*

$$u(z) = \int\limits_{C^{+}(0, R)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta)$$

равномерно непрерывна.

Доказательство. Взяв некоторое число $N > 4$, выделим исключительное множество A и погрузим его во множество кругов C_1 способом, указанным в теореме 6. Меру μ представим в виде суммы мер $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_2 — часть меры μ, которая расположена на множестве A, а $\mu_1 = \mu - \mu_2$. Из определения μ_1 следует, что для любых z и α выполняется неравенство $\mu_1(C(z, \alpha r)) < \alpha NS$. Меру μ_1 в свою очередь представим в виде суммы $\mu_1 = \mu_3 + \mu_4$, где μ_3 — часть меры μ_1, которая распределена на вещественной оси. Имеем $\mu_3(t + ht) - \mu_3(t) \leqslant \mu_1(C(t, ht) < hNS$. Из этого неравенства следует, что функция $\mu_3(t)$ удовлетворяет условию Липшица и, значит, абсолютно непрерывна. Поэтому $d\mu_3(t) = \varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ определена почти всюду, измерима и ограничена.

По теореме Лузина, по всякому $\eta > 0$ можно найти открытое множество E_η, $\operatorname{mes} E_\eta < \eta$, вне которого функция $\varphi(t)$ будет непрерывна.

Пусть

$$\varphi_\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \overline{\in} E_\eta \\ \varphi(\alpha) + t\dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} & t \in (\alpha, \beta) \subset E_\eta \end{cases}$$

где $\{(\alpha, \beta)\}$ — система непересекающихся интервалов, на которые распадается множество E_η. Функция φ_η непрерывна на сегменте $[-R, R]$. Представим меру μ_3 в виде $\mu_3 = \mu_5 + \nu_6$, где μ_5 — мера с плотностью φ_η. Определим меру μ_6 равной $|\nu_6|$. Очевидно что $\mu_6([-R, R]) < S$ при достаточно малом η. Далее будем обозначать $\mu_i = |\nu_i|$.

Построенная по мере μ_5 функция

$$u_5(z) = \int\limits_{[-R, R] \setminus E_\eta} \frac{2yt\,\varphi_\eta(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt = \int\limits_{C^{+}(0, R)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu_5(\zeta)$$

непрерывна в замкнутом полукруге $C^{+}(0, R)$, а значит и равномерно непрерывна. В дальнейшем выражение $u_i(z)$ будет обозначать функцию, построенную по заряду ν_i.

Утроим каждый интервал множества E_η и вокруг полученного интервала как на диаметре опишем круг. Полученное множество назовем C_2.

Введем меру $\mu_{6,\alpha}$ — часть меры μ_6, которая расположена на интервалах длины меньше α. В силу конечности меры μ_6 мера $\mu_{6,\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Поэтому существует такая функция $\gamma(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \to 0$, что мера $\mu_\gamma(\sigma) = \int \gamma(\alpha)\,\mu_{6,\alpha}(\sigma)\,d\alpha$, где σ — интервал на вещественной оси, конечна и $\mu_\gamma([-R, R]) < 2S$. Для меры μ_γ с тем же коэффициентом N произведем выделение исключительного множества кругов C_3.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем α_1 такое, что $\gamma(\alpha_1) > \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $\mu_{6,\alpha_1} = \mu_7$, $\mu_6 = \mu_7 + \mu_8$. Если точка t принадлежит тому интервалу множества E_η, длина которого больше α_1, а точка $z \overline{\in} C_2$, то $|t - z| > \alpha_1$, и, значит, функция $u_8(z)$ равномерно непрерывна вне множества C_2.

Из того, что точка $z \overline{\in} C_3$ следует, что

$$\mu_\gamma(C(z, \alpha r)) \leqslant 2\alpha NS,$$

а следовательно,

$$\mu_7(C(z, \alpha r)) < \frac{2}{\gamma(\alpha_1)}\alpha NS < 2\varepsilon\alpha NS.$$

Теперь из оценок, проведенных в теореме 6, вытекает, что вне множества C_3 выполняется неравенство

$$u_7(z) > -2BM\varepsilon S.$$

На этом рассмотрение меры μ_3 заканчивается.

Введем меру $\mu_{4,\varphi}$ — часть меры μ_4, которая расположена на множестве D_φ. Так как мера μ_4 конечна и распределена в открытом полукруге $C^+(0, R)$, то мера $\mu_{4,\varphi} \to 0$ при $\sin\varphi \to 0$. Поэтому существует такая функция $\gamma(\varphi) \uparrow \infty$ при $\sin\varphi \to 0$, что мера μ_γ

$$\mu_\gamma(D) = \int \mu_{4,\varphi}(D)\,\gamma(\varphi)\,d\varphi$$

конечна, примем $\mu_\gamma(C^+(0, R)) < 2\mu_4(C^+(0, R))$. Снова для меры μ_γ производим выделение с коэффициентом N исключительного множества кругов C_4. Оценим функцию $u_4(z)$. Найдем такое φ_1, что $\gamma(\varphi_1) > \frac{1}{\varepsilon}$. Обозначим $\mu_{4,\varphi_1} = \mu_9$, $\mu_4 = \mu_9 + \mu_{10}$. Для меры μ_{10}, как это следует из рассуждений теоремы 6 для z, лежащих вне C_1, выполняется соотношение

$$\int\limits_{C(z,\alpha r)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu_{10}(\zeta) \underset{\alpha\to 0}{\rightrightarrows} 0.$$

Поэтому функция $u_{10}(z)$ равномерно непрерывна вне множества C_1.

Если точка $z \bar{\in} C_4$, то

$$\mu_\gamma(C(z, \alpha r)) < 2\alpha NS,$$

а значит,

$$\mu_9(C(z, \alpha r)) < 2\varepsilon\alpha NS.$$

Из данного неравенства следует, что при $z \bar{\in} C_4$ выполняется неравенство

$$u_9(z) > -2B\varepsilon MS.$$

На этом рассмотрение меры μ_9 и мер μ_4 и μ_1 заканчивается.

Рассмотрим теперь меру μ_2. Обозначим через $\mu_{2,\alpha}$ ту часть меры μ_2, которая расположена на множествах A_i, диаметр которых меньше α. В силу конечности меры μ_2 мера $\mu_{2,\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Поэтому существует функция $\gamma(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \to 0$ такая, что для меры μ_γ

$$\mu_\gamma(D) = \int \mu_{2,\alpha}(D)\,\gamma(\alpha)\,d\alpha$$

выполняется неравенство

$$\mu_\gamma(C^+(0, R)) < 2\mu_2(C^+(0, R)).$$

Для меры μ_γ произведем выделение с коэффициентом N исключительного множества кругов C_5. А через C_6 обозначим множество кругов, которое получается так. Из каждой точки множества A_i, входящего в C_1, описываем круг, радиус которого равен диаметру A_i. Объединение таких кругов назовем A_i'. A_i' погрузим в круг наименьшего радиуса G_i'. Тогда $C_6 = \bigcup G_i'$.

Пусть $\gamma(\alpha_1) > \frac{1}{\varepsilon}$. Обозначим $\mu_{2,\alpha_1} = \mu_{11}$, $\mu_2 = \mu_{11} + \mu_{12}$. Пусть $\zeta \in A_i$, причем диаметр A_i больше, чем α_1, а $z \bar{\in} C_6$, тогда $|z-\zeta| > \alpha_1$ и, следовательно, функция $u_{12}(z)$ равномерно непрерывна вне множества C_6.

Если $z \bar{\in} C_5$, то $\mu_\gamma(C(z, \alpha r)) < 2\alpha NS$, а значит,

$$\mu_{11}(C(z, \alpha r)) < 2\varepsilon\alpha NS.$$

Поэтому

$$u_{11}(z) > -2\varepsilon BMS.$$

Из приведенных рассуждений следует, что функция $u(z)$ равномерно непрерывна вне множества кругов $C = \bigcup_{i=1}^{6} C_i$, причем сумму радиусов кругов этого множества можно сделать меньше наперед заданного положительного числа за счет соответствующего выбора чисел N и η. Наша теорема доказана.

Следствием теоремы 7 является

Теорема 8. *Пусть μ — локально конечная мера, расположенная в замкнутой верхней полуплоскости. Тогда по любому $\delta > 0$ можно найти множество кругов C с суммой радиусов, не превышающей δ, такое, что вне этого множества функция*

$$u_R(z) = \int\limits_{C^+(0,\,R)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta)$$

равномерно непрерывна при любом R.

Доказательство. Разобьем Z_+ кольцами K_n:

$$n \leqslant |z| < n+1 \text{ и } K_{-n}: \frac{1}{n+1} \leqslant |z| < \frac{1}{n}.$$

Выберем исключительное множество кругов C_n, с суммой радиусов не превосходящей $2^{-n-1}\delta$, так, чтобы вне этого множества функция

$$u_n(z) + u_{-n}(z) = \int\limits_{K_{-n}\bigcup K_n} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta)$$

была равномерно непрерывной. Множество $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \bigcup C\left(0,\ \frac{1}{2}\delta\right)$ будет искомым. Более легко доказывается

Тоорема 9. *Пусть μ — локально конечная мера в плоскости Z. Тогда существуют множества кругов со сколь угодно малой суммой радиусов, вне которых каждая из функций*

$$u_R(z) = \int\limits_{C(0,\,R)} \ln\frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta)$$

равномерно непрерывна.

Эта теорема без доказательства была использована в теореме 1. Она легко следует из теоремы 3.6, [2], которая является аналогом теоремы 7.

Заканчивая рассмотрение конечных мер, отметим, что из доказанного легко следует

Теорема 10. *Пусть μ — конечная мера в $C^+(0,\ R)$, $\mu([-R,\ R]) = 0$, а*

$$u(z) = \int\limits_{C^+(0,\,R)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta).$$

Тогда функция $u(z)$ имеет почти всюду на вещественной оси нулевые нормальные предельные значения.

Аналогичная теорема для случая круга принадлежит Лиувиллю. Нашу теорему при желании с помощью конформного отображения можно свести к теореме Лиувилля.

§ 3. Меры положительного порядка в полуплоскости

Теорема 11. *Пусть мера* μ *имеет минимальный тип относительно уточненного порядка* $\rho(r)$. *Тогда функция*

$$v_h(z) = \frac{1}{r} \int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4} r\right)} \frac{1}{\sin\varphi} \left[\ln\left|\frac{z+hz-\zeta}{z+hz-\bar\zeta}\right| - \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| \right] d\mu(\zeta)$$

равномерно стремится к нулю при $h \to 0$ *вне множества кругов нулевой линейной плотности.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu(C(0,\ r))}{r^{\rho(r)}} = 0.$$

Поэтому существует такой уточненный порядок $\rho_1(r)$, что выполняются соотношения

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{r^{\rho(r)}} = 0,\quad \lim_{r\to\infty} \frac{\mu(C(0,\ r))}{r^{\rho_1(r)}} = 0. \tag{3.7}$$

Для каждой точки z, $|z| > 1$, строим множество кругов $C(z,\ \alpha r)$ таких, что $\frac{\mu(C(z,\ \alpha r))}{r^{\rho_1(r)}} \geqslant \alpha$.

Круг с максимальным α обозначим через C_z. Объединение открытых кругов C_z назовем A. Мнвжество A содержит не более чем счетное число связных компонент A_i. Пусть $G_i = C(g_i,\ R_i)$ — круг наименьшего радиуса, содержащий A_i. Оценим линейную плотность множества кругов G_i. Для этого в каждой компоненте A_i выберем обобщенную цепочку $C_{i,k}$ такую, что $2R_i \leqslant \sum_k d_{C_{i,k}}$.

Тогда получим

$$l_r = \sum_{|g_i|\leqslant r} R_i \leqslant \frac{1}{2} \sum d_{C_{i,k}} = \sum \alpha_{i,k} |z_{i,k}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \frac{\mu(C_{i,k})}{|z_{i,k}|^{\rho_1(|z_{i,k}|)-1}} \leqslant \int\limits_0^{r+l_r} \frac{d\nu(t)}{t^{\rho_1(t)-1}},$$

где $\nu(t)$ — мера, сосредоточенная в точках $|z_{j,l}|$, причем

$$d\nu(|z_{j,l}|) = \sum_{|z_{i,k}|=|z_{j,l}|} \mu(C_{i,k}).$$

Очевидно, что $\nu(t) \leqslant 2\mu(C(0,\ 2t))$. Поэтому из условия (3.6) и леммы 2 следует, что линейная плотность кругов равна нулю. Теперь тем же методом, что и в теореме 6, получаются оценки вне множества A:

$$v_z(z) = \int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4} r\right)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta) > -Br^{\rho_1(r)};$$

$$v_z(z+hz) = \int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4} r\right)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z+hz-\zeta}{z+hz-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta) > -Br^{\rho_1(r)}.$$

Из этих оценок и из (3.6) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует r_ε такое, что при $r > r_\varepsilon$ выполняется неравенство $|v_h(z)| < \varepsilon$. Если еще дополнительно выбросить некоторое множество кругов с конечной суммой радиусов (см. теорему 8), то вне полученного множества при любом R функция $v_h(z)$, $|z| \leqslant R$ будет равномерно стремиться к нулю при $h \to 0$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 12. *Пусть μ — мера в Z_+, имеющая формальный порядок $\rho(r)$, причем $\overline{S}(0, \theta) \to 0$ и $\overline{S}(\pi - \theta, \pi + 0) \to 0$ при $\theta \to 0$. Тогда мера μ принадлежит классу a'.*

Доказательство. Пусть $S_1 = \overline{S}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Выберем последовательность $\theta_n \downarrow 0$, так чтобы $\bar{S}(0, \theta_n) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^n} S_1$. Внутри угла $[\theta_{n+1}, \theta_n)$ выбрасываем конечную часть меры так, чтобы для оставшейся меры μ_2 выполнялось неравенство

$$\frac{\mu_2(r, \theta_{n+1}, \theta_n)}{\tilde{r}} < 2\overline{S}(\theta_{n+1}\theta_n).$$

В результате таких операций мы вибросим меру, которая за исключением конечной части целиком распределена в D_φ при любом $\sin\varphi > 0$ и поэтому имеет минимальный тип. Обозначим через μ_3 такую меру: $d\mu_3(\zeta) = 2^n d\mu_2(\zeta)$, когда $\arg\zeta \in [\theta_{n+1}, \theta_n)$. Аналогичные операции произведем с углом $\left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$. Получим три меры. Первая μ_1 — это мера, которую мы выбрасывали. Она имеет минимальный тип. Втория μ_2 — это мера, которая оставалась, причем $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Третья мера μ_3. Она имеет формальный порядок $\rho(r)$, причем $d\mu_3(\zeta) = f(\varphi)\, d\mu_2(\zeta)$, где $f(\varphi) \uparrow \infty$ при $\sin\varphi \to 0$. Для функции $v_h(z, \mu_1)$ утверждение нашей теоремы следует из теоремы 11. Рассмотрим $v_h(z, \mu_2)$.

Произведем с коэффициентом N выделение исключительного множества кругов C для меры μ_3. Верхняя линейная плотность множества кругов C будет равна $O\left(\frac{1}{N}\right)$. Оценим $v_h(z, \mu_2)$ вне кругов C. Выберем $\varepsilon > 0$. Найдем $\sin\psi$, $\sin\psi < \varepsilon$ так, что при $\sin\varphi < \sin\psi$ будет выполняться неравенство $f(\varphi) > \varepsilon^{-1}$. Оценим теперь $v_h(z, \mu_2)$ вне множества кругов C при $\sin\theta < \sin^3\psi$. Для этого интеграл, определяющий $v_h(z, \mu_2)$, разобьем на два: по множеству D_1 — части круга $C\left(z, \frac{1}{4}r\right)$, для которой выполняется неравенство $\sin\varphi < \sin\psi$, и по множеству $D_2 = C\left(z, \frac{1}{4}r\right) \setminus D_1$. Мы получим, что

$$\tilde{r} v_h(z, \mu_2) \leqslant -\varepsilon \int_{D_1} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu_3(\zeta) + \int_{D_2} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left(1 + \frac{2|z|\sin\theta}{|z-\zeta|}\right) d\mu_2(\zeta) < \varepsilon BM\tilde{r} + \frac{2\sin\theta}{\sin\psi(\sin\psi - \sin\theta)} \mu_2\left(C\left(z, \frac{1}{4}r\right)\right) < \varepsilon K_1 \tilde{r}.$$

Первый интеграл оценивался так же, как и в теореме 6. Оценка второго интеграла очевидна.

Пусть теперь $\sin\theta > \sin^3\psi$. Тогда

$$\tilde{r}v_h(z, \mu_2) \leqslant -\varepsilon\int\limits_{D_1}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\mu_3(\zeta) +$$
$$+\int\limits_{D_2}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|1+\frac{2ihz|\zeta|\sin\varphi}{(z+hz-\bar\zeta)(z-\zeta)}\right|d\mu_2(\zeta) \leqslant \varepsilon BM\tilde{r} +$$
$$+\frac{1}{\sin\psi}\int\ln\left(1+\frac{2|h||z|}{|z-\zeta|}\right)d\mu_2(\zeta).$$

Оставшийся интеграл вне множества C оценивался в теореме 1. Он равномерно стремится к нулю при $h\to 0$. Тем самым теорема 12 доказана.

Отметим, что условия теоремы 12 не являются необходимыми. Достаточно рассмотреть меру, сосредоточенную в точках e^{n^2}, $d\mu(e^{n^2}) = \tilde{e}^{n^2}$.

Однако условия теоремы точны. Например, если мы возьмем меру μ, распределенную на ветви параболы $y = +\sqrt{x}$, причем $\mu(C(0, r)) = \tilde{r}$, то эта мера не принадлежит классу a'.

Теорема 13. *Если функция плотности $\Phi(t, \sin\theta)$ меры μ удовлетворяет условию (3.1), то мера μ принадлежит классу $б'$.*

Доказательство. Возьмем функцию $\Phi_1(t, \sin\theta)$, удовлетворяющую условиям (3.1), (3.2), (3.5). Далее для каждой точки z строим множество кругов $C(z, \alpha r)$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{\mu(C_\varphi(z, \alpha r))}{\tilde{r}} \geqslant 2\Phi_1(\alpha, \sin\varphi), \quad \sin\varphi \geqslant \sin\psi.$$

Круг, для которого α принимает наибольшее значение $\alpha_{z,\psi}$, обозначим $C_{z\psi}$, а $\varphi_{z,\psi}$ — какое-либо значение φ, для которого выполняется написанное выше неравенство при $\alpha = \alpha_{z,\psi}$. Для таких кругов получается, что

$$\Phi_1(\alpha, \sin\varphi) + \varepsilon(r, \sin\varphi) \geqslant \frac{\mu(C_\varphi(z, \alpha r))}{\tilde{r}} \geqslant 2\Phi_1(\alpha, \sin\varphi);$$
$$\Phi_1(\alpha, \sin\varphi) \leqslant \varepsilon(r, \sin\varphi) \leqslant \varepsilon(r, 1), \quad \alpha \leqslant \Phi^{-1}_{1, \sin\varphi}(\varepsilon(r, 1)),$$

где $\Phi^{-1}_{1, \sin\varphi}(t)$ — функция обратная $\Phi_1(t, \sin\varphi)$ при фиксированном φ. Из полученного неравенства следует, что для любого $\sin\psi > 0$ величина $\alpha_{z,\psi}\to 0$ при $z\to\infty$. Далее из условия (3.2) следует, что отношение

$$\Phi^{-1}_{1, \sin\varphi}\left(\frac{\mu(C_{\varphi, z, \psi})}{\tilde{r}}\right) : \frac{\mu(C_{\varphi, z, \psi})}{\tilde{r}}, \quad C_{\varphi, z, \psi} = C_{z,\psi}\cap D_\varphi \tag{3.8}$$

стремится к нулю при $z\to\infty$ и $\sin\varphi \geqslant \sin\psi$. Значит, существует такая функция $\theta(r)$, $\theta(r)\downarrow 0$ при $r\to\infty$, что отношение (3.8) стремится к нулю при $z\to\infty$, $\sin\varphi \geqslant \sin\theta(r)$. Для доказательства этого возьмем угол $\alpha_1 : \left\{\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$. Найдем такое r_1, что отношение (3.8) при $\psi\in\alpha_1$ и $r \geqslant r_1$ не превосходит единицы. Возьмем угол $\alpha_n : \left\{\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\pi\right\}$. Найдем число $r_n \geqslant 2r_{n-1}$ такое, что отношение (3.8) при $\psi\in\alpha_n$ и $r \geqslant r_n$ не превосходит $\frac{1}{n}$. Функция $\theta(r) = \begin{cases}\frac{\pi}{4}, & 0 \leqslant r < r_2\\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\pi, & r_n \leqslant r < r_{n+1}, \ n \geqslant 2\end{cases}$ искомая.

Часть меры μ, распределенной на множестве $D = \{z : \sin\theta \leqslant \sin\theta(r)\}$, обозначим μ_1. Для любого $\sin\psi > 0$ мера μ_1, за исключением конечной части, распределена в области D_ψ. Поэтому, в силу леммы 9, мера μ_1

имеет минимальный тип. По теореме 11 функция $v_h(z, \mu_1) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$ вне множества кругов нулевой линейной плотности. Осталось оценить функцию $v_h(z, \mu_2)$, $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Мы это будем делать вне множества A — объединения открытых кругов $C_z = C_{z, \theta(r)}$. Множество A состоит не более чем из счетного числа связных компонент A_i. Погрузим компоненту A_i в круг наименьшего радиуса $G_i = C(g_i, R_i)$. В каждой компоненте A_i выберем обобщенную цепочку $C_{i,k} = C_{z_{i,k}} = C(z_{i,k}, \alpha_{z_{i,k}} |z_{i,k}|)$ такую, что

$$2R_i \leqslant \sum_k d_{C_{i,k}}.$$

Пусть $\varphi_{i,k} = \varphi_{z_{i,k}, \theta(|z_{i,k}|)}$. Тогда мы получим, что

$$\sum_{|g_i| < r} R_i \leqslant \sum |z_{i,k}| \alpha_{i,k} \leqslant \sum |z_{i,k}| \Phi^{-1}_{1, \sin \varphi_{i,k}} \left(\frac{\mu(C_{\varphi_{i,k} z_{i,k}})}{|\tilde{z}_{i,k}|} \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_2 + \eta \sum_{|z_{i,k}| < r_\eta} |z_{i,k}| \frac{\mu(C_{\varphi_{i,k}, z_{i,k}})}{|\tilde{z}_{i,k}|} \leqslant K_2 + \eta \sum |z_{i,k}| \frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|},$$

где $C_{\varphi, z} = C_z \cap D_\varphi$, а r_η — такое число, что при $r > r_\eta$ отношение (3.8) при $\sin \psi \geqslant \sin \theta(r)$ меньше η, а K_2 — начальный отрезок суммы. Далее обычными рассуждениями показывается, что линейная плотность кругов G_i равна нулю. Пусть теперь $z \bar{\in} A$. Тогда, как и в теореме 6, получим при $\theta \geqslant \frac{1}{4}\theta(r)$:

$$v_h(z, \mu_2) \leqslant -\frac{1}{r} \int_{C\left(z, \frac{1}{4} r\right)} \frac{1}{\sin \varphi} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\mu_2(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{r} \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{\sin \theta - t} \ln \frac{t}{2\sin \theta - t} d\mu_z(t) + \frac{4}{r} \int_{\sin \theta}^{\frac{1}{4}} \frac{\sin \theta}{t^2} d\mu_z(t) \leqslant$$

$$\leqslant -2 \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{\sin \theta - t} \ln \frac{t}{2 \sin \theta - t} d\Phi_1(t, 4 \sin \theta) +$$

$$+4 \int_{\sin \theta}^{\frac{1}{4}} \frac{\sin \theta}{t^2} d\Phi_1(t, 4t) \leqslant -\frac{2}{\sin \theta} \int_0^1 \frac{1}{1-u} \ln \frac{u}{2-u} d\Phi_1(u \sin \theta, 4 \sin \theta) +$$

$$+ 4 \sin \theta \left. \frac{\Phi_1(t, 4t)}{t^2} \right|_{\sin \theta}^{\frac{1}{4}} + 8 \sin \theta \int_{\sin \theta}^{\frac{1}{4}} \frac{\Phi_1(t, 4t)}{t^3} dt.$$

Так как $4 \sin \theta \geqslant 4 \sin \frac{1}{4} \theta(r) > \sin \theta(r)$, то $\mu_z(t) \leqslant 2\tilde{r} \Phi_1(t, 4 \sin \theta)$ при $t \in [0, \sin \theta]$. Если $t \geqslant \sin \theta$, то $4t > \sin \theta(r)$ и $\mu_z(t) \leqslant 2\tilde{r}\Phi_1(t, 4t)$. Поэтому написанные выше оценки верны.

Отношение функций $-\frac{1}{1-u} \ln \frac{u}{2-u}$ и $\ln \frac{e}{u}$ ограничено на интервале (0.1) и поэтому, в силу условия (3.1), первый интеграл стремится к нулю при $\sin \theta \to 0$. Второй интеграл оценим так:

$$\sin\theta\int\limits_{\sin\theta}^{\frac{1}{4}}\frac{\Phi_1(t,\ 4t)}{t^3}\,dt\leqslant\sin\theta\int\limits_{\sin\theta}^{\sin^{\frac{1}{4}}\theta}\frac{\Phi_1(t,\ 4t)}{t}\frac{dt}{t^2}+\sin^{-\frac{1}{4}}\theta\int\limits_{\sin^{\frac{1}{4}}\theta}^{\frac{1}{4}}\Phi_1(t,\ 4t)\,dt.$$

Из соотношения (3.3) следует, что второй интеграл также стремится к нулю при $\sin\theta\to 0$. Пусть теперь $\theta<\frac{1}{4}\theta(r)$. Тогда

$$v_h(z,\ \mu_2)\leqslant-\frac{1}{r}\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\mu_2(\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{r}\int\limits_{\sin\theta}^{\frac{1}{4}}\frac{\sin\theta}{t^2}\,d\mu_z(t)\leqslant 4\int\limits_{\sin\theta}^{\frac{1}{4}}\frac{\sin\theta}{t^2}\,d\Phi_1(t,\ 4t),$$

ибо если $4t<\sin\theta(r)$, то круг $C(z,\ tr)$ полностью содержится во множестве D и, следовательно, $\mu_z(t)=0$. Если же $4t\geqslant\sin\theta(r)$, то $\mu_z(t)\leqslant\leqslant r\Phi_1(t,\ 4t)$. Далее оценка проводится так же, как и выше.

Тем самым мы провели оценки $v_h(z,\ \mu_2)$ сверху. Аналогичным образом оценивается эта функция снизу. Из сказанного следует, что $v_h(z,\ \mu_2)\rightrightarrows 0$ при $\sin\theta\to 0$ и $h\to 0$ вне множества A. Докажем теперь, что вне этого множества $v_h(z,\ \mu_2)\rightrightarrows 0$ пи $h\to 0$. Выберем $\varepsilon>0$. Найдем такие $\sin\psi$ и h_0, что при $\sin\theta<\sin\psi$ и $|h|<h_0$ вне множества A будет выполняться неравенство $|v_h(z,\ \mu_2)|<\varepsilon$.

Пусть теперь $\sin\theta>\sin\psi$. Тогда

$$v_h(z,\ \mu_2)=\int\limits_{C\left(z,\ \frac{\sin\psi}{2}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|1+\frac{2ihz\,|\zeta|\sin\varphi}{(z+hz-\bar\zeta)(z-\zeta)}\right|\times$$

$$\times\,d\mu_2(\zeta)+\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)\setminus C\left(z,\ \frac{\sin\psi}{2}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|1+\frac{2ihz\,|\zeta|\sin\varphi}{(z+hz-\bar\zeta)(z-\zeta)}\right|d\mu_2(\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\sin\psi}\int\limits_{C\left(z,\ \frac{\sin\psi}{2}r\right)}\ln\left(1+\frac{2\,|h|\,r}{|z-\zeta|}\right)d\mu_2(\zeta)+\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)\setminus C\left(z,\ \frac{\sin\psi}{2}r\right)}\frac{8\,|h|\,|\zeta|\,d\mu_2(\zeta)}{r\sin\theta\sin\psi}$$

при $|h|<\frac{1}{2}\sin\psi$. Первый интеграл оценивается способом, указанным в теореме 1.

Мы получили для функции $v_h(z,\ \mu_2)$ оценку сверху. Оценка снизу получается аналогично. Поэтому вне множества A функция $v_h(z,\ \mu_2)\rightrightarrows 0$ при $h\to 0$. Вне объединения множества A и исключительного множества для меры μ_1 функция $v_h(z,\ \mu)\rightrightarrows 0$ при $h\to 0$. Наша теорема доказана.

Мы не будем детально исследовать точность полученной теоремы, как это делали для случая области Z. Отметим лишь, что для меры μ, сосредоточенной в точках $\alpha_{n,k}$, $\mu(\alpha_{n,k})=1$, $\alpha_{n,k}=e^{n^2}\left(1+\frac{k}{e^{n^2}}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ $[e^{n^2}]$, $n=1,\ 2\ \ldots,$ интеграл (3.1) ограничен, $\Phi(\alpha,\ \sin\theta)\leqslant 2\alpha$, и теорема 13 не верна.

Следующую теорему можно рассматривать как распространение результата Хеймана [8] на случай произвольного уточненного порядка и ее усиление, заключающееся в том, что исключительные кольца заменяются исключительными кружками.

Теорема 14. *Пусть в замкнутой области* Z_+ *распределена мера* μ, *такая, что*

$$\int\limits_{Z_+\setminus C(0,\,1)} \frac{d\mu(\zeta)}{|\tilde{\zeta}|} < \infty; \tag{3.9}$$

$$\left(\int\limits_{Z_+\setminus C(0,\,1)} \frac{|\zeta|\, d\mu(\zeta)}{|\tilde{\zeta}|} < \infty \right). \tag{3.10}$$

тогда мера μ *принадлежит классу в′ (г′).*

Доказательство. Существует уточненный порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{r^{\rho(r)}} = 0 \tag{3.11}$$

и такой, что

$$\int\limits_{Z_+\setminus C(0,\,1)} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta|^{\rho_1(|\zeta|)}} < \infty \tag{3.12}$$

$$\left(\int\limits_{Z_+\setminus C(0,\,1)} \frac{|\zeta|\, d\mu(\zeta)}{|\zeta|^{\rho_1(|\zeta|)}} < \infty \right). \tag{3.13}$$

Далее для каждой точки z, $|z| > 1$ области, Z_+ строим множество кругов $C(z,\ \alpha r)$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{\mu(C(z,\ \alpha r))}{r^{\rho_1(r)}} \geqslant \alpha.$$

Круг, для которого α принимает наибольшее значение, обозначим C_z. Объединение открытых кругов C_z назовем A. Множество A состоит не более чем из счетного числа связных компонент A_i. Каждую компоненту A_i поместим в круг наименьшего радиуса $G_i = C(g_i,\ R_i)$. В каждой компоненте выделим такую обобщенную цепочку $C_{i,\,k}$, что

$$2R_i \leqslant \sum_k d_{C_{i,\,k}}.$$

Тогда будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{|g_i|} \leqslant \sum_i \frac{1}{|g_i|} \sum_k |z_{i,\,k}|\, \alpha_{i,\,k} < 2 \sum_{i,\,k} \alpha_{i,\,k} \leqslant 2 \sum_{i,\,k} \frac{\mu(C_{i,\,k})}{|z_{i,\,k}|^{\rho_1(|z_{i,\,k}|)}} =$$

$$= 2\int_1^{\infty} \frac{d\nu(t)}{t^{\rho_1(t)}},$$

где мера $\nu(t)$ сосредоточена только в точках $|z_{j,\,l}|$,

$$d\nu(|z_{j,\,l}|) = \sum_{|z_{i,\,k}| = |z_{j,\,l}|} \mu(C_{i,\,k}).$$

Поэтому $\nu(t) < 2\mu(C(0,\ 2t))$. Из этого неравенства и условия (3.12) следует, что написанный выше интеграл сходится и, значит, множество кругов G_i видно из начала координат под конечным углом. Если же выполняется условие (3.13), то мы получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_i \leqslant \int_1^{\infty} \frac{t\, d\nu(t)}{t^{\rho_1(t)}}$$

и, следовательно, множество кругов G_i имеет конечную сумму радиусов. Оценим теперь $v_h(z)$ вне множества A:

$$\tilde{r}v_h(z) < -\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta).$$

Далее оценка проводится так же, как и в теореме 6. Мы получим $\tilde{r}v_h(z) < Br^{\rho_1(r)}$. Аналогично оценивается v_h снизу. Выберем теперь r_ε так чтобы при $r \geqslant r_\varepsilon$ отношение (3.11) не превосходило $\frac{\varepsilon}{B}$. Тогда при $r \geqslant r_\varepsilon$ мы получим, что $|v_h(z)| \leqslant \varepsilon$. Для окончания доказательства осталось сослаться на теорему 8.

Теперь мы рассмотрим класс мер, сосредоточенных в области Z_+, и удовлетворяющих условию

$$\frac{\mu(C_\varphi(z,\ \alpha r))}{\tilde{r}} \leqslant \Phi(\alpha,\ \sin\varphi) + \varepsilon(r)\sin\varphi, \tag{3.14}$$

где функция $\Phi(\alpha,\ \sin\varphi)$ монотонная по обоим аргументам и удовлетворяет условию (3.1), а $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$.

Дополнительно мы будем требовать, чтобы функция $\Phi(\alpha,\ \sin\varphi)$ удовлетворяла неравенству

$$\Phi(\alpha_1 + \alpha_2,\ \sin\varphi) \leqslant \Phi(\alpha_1,\ \sin\varphi) + \Phi(\alpha_2,\ \sin\varphi) \tag{3.15}$$

Это неравенство требует некой регулярности роста по α функции $\Phi(\alpha,\ \sin\varphi)$ и вызвано, наверное, несовершенной техникой доказательства. Заметим, что функции вида $\Phi(\alpha,\ \sin\varphi) = \delta(\sin\varphi)\,\alpha^\beta(\alpha + \sin\varphi)^{1-\beta}$, $0<\beta\leqslant 1$, $\delta(\sin\varphi) \downarrow 0$ при $\sin\varphi \to 0$, удовлетворяют этому неравенству.

Из неравенства (3.14) и леммы 7 следует, что на вещественной оси мера μ не распределена. Поэтому существует такая монотонно убывающая функция $\theta(r)$, что мера μ_1 — часть меры μ, которая распределена на множестве $D = \{z : \sin\theta \leqslant \sin\theta(r)\}$ удовлетворяет условию (3.9) или, если нужно, (3.10). Очевидно, существует такая монотонная функция $\nu(x) \downarrow 0$ при $x \to 0$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\nu(t) > \sqrt{\varepsilon\left(\frac{1}{3}(\varphi(t))\right)}$, где $\varphi(t)$ — корень уравнения $\sin^2\theta(r) = 2t$, или то же самое, что

$$\nu\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta(r)\right) \geqslant \sqrt{\varepsilon\left(\frac{1}{3}r\right)}; \tag{3.16}$$

2) функция $\frac{t}{\nu(t)}$ — неубывающая.

Обозначим

$$\Phi_1(\alpha,\ \sin\varphi) = 3^{\rho+2}[\Phi(7\alpha - 0,\quad 4\sin\varphi - 0) + \alpha\nu(\sin\varphi)]. \tag{3.17}$$

Функция $\Phi_1(\alpha,\ \sin\varphi)$ непрерывна слева и удовлетворяет условию (3.1). Теперь для каждой точки z, $|z| > 1$, строим множество кругов $C(z,\ \alpha r)$, для которых выполняется неравенство хотя бы при одном значении φ:

$$\frac{\mu_2(C_\varphi(z,\ \alpha r))}{\tilde{r}} \geqslant \Phi_1(\alpha,\ \sin\varphi),\quad \mu_2 = \mu - \mu_1. \tag{3.18}$$

Из непрерывности слева функции $\Phi_1(\alpha,\ \sin\varphi)$ следует, что существует круг C_z, для которого α принимает максимальное значение α_z.

Пусть $\{\varphi\}$ — те значения, для которых выполняется неравенство (3.18) при $\alpha = \alpha_z$. Среди них найдется значение φ_z такое, что $\sin\varphi_z \leqslant \sin\theta + \alpha_z$, $\theta = \arg z$.

Из неравенств (3.14) и (3.18) при $\sin\varphi = \sin\varphi_z$ следует, что

$$\nu(\sin\varphi_z)\,\alpha_z \leqslant \varepsilon(r)\sin\varphi_z. \tag{3.19}$$

Если $\alpha_z \leqslant \frac{1}{2}\sin\theta$, тогда $\sin\theta \geqslant \frac{1}{2}\sin\theta(2r)$, так как на множестве D не распределена мера μ_2. Поэтому

$$\alpha_z \leqslant \varepsilon(r)\frac{\sin\varphi_z}{\nu(\sin\varphi_z)} \leqslant \varepsilon(r)\frac{\sin\theta + \alpha_z}{\nu(\sin\theta + \alpha_z)} \leqslant \\ \leqslant \frac{3}{2}\frac{\varepsilon(r)\sin\theta}{\nu\left(\frac{1}{2}\sin\theta(2r)\right)} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon(r)}\sin\theta. \tag{3.20}$$

Пусть теперь $\alpha_z > \frac{1}{2}\sin\theta$. Тогда

$$\alpha_z \leqslant \varepsilon(r)\frac{\sin\theta + \alpha_z}{\nu(\sin\theta + \alpha_z)} \leqslant \varepsilon(r)\frac{3\alpha_z}{\nu(3\alpha_z)};$$

$$\nu(3\alpha_z) < 3\varepsilon(r), \quad \alpha_z \leqslant \frac{1}{3}\nu^{-1}(3\varepsilon(r)) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{3}\nu^{-1}\left(\sqrt{\varepsilon(r)}\right) \leqslant \frac{1}{3}\sin^2\theta(3r).$$

Из полученного неравенства, вследствие того, что мера μ_2 на множестве D не распределена, следует, что $\sin\theta \geqslant \frac{2}{3}\sin\theta(3r)$. Поэтому

$$\alpha_z \leqslant \frac{1}{3}\sin^2\theta(3r) \leqslant \frac{1}{2}\sin\theta(3r)\sin\theta. \tag{3.21}$$

Из неравенства (3.20) и (3.21) следует, что для величины α_z выполняется неравенство

$$\alpha_z < \varepsilon_1(r)\sin\theta, \quad \varepsilon_1(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0. \tag{3.22}$$

Объединение открытых кругов C_z назовем A. Множество A состоит не более чем из счетного числа компонент A_i. Возьмем какую-нибудь цепочку $K: C_1, C_2, \ldots, C_n$, принадлежащую A_i и кольцу $C\left(0, \frac{3}{2}t\right) \setminus \setminus C\left(0, \frac{1}{2}t\right)$. Пусть

$$\sin\varphi_0 = \min_{|\zeta|e^{i\varphi}\in K} \sin\varphi,$$

а $C_0 = C(z_0, \alpha_0|z_0|)$ — круг, на границе которого лежит точка $|\zeta|e^{i\varphi_0}$. Докажем, что при достаточно больших t выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} d_{C_i} < t\sin\varphi_0. \tag{3.23}$$

В противном случае, в силу неравенства (3.22) нашлась бы цепочка $K': C_1'$, $C_2', \ldots, C_m'$, являющаяся частью цепочки K и содержащая круг C_0, такая, что выполнялось бы неравенство

$$t\sin\varphi_0 < \sum_{i=1}^{m} d_{C_i'} < 2t\sin\varphi_0.$$

Пусть $G' = C(g', \alpha' t)$ — круг наименьшего радиуса, содержащий цепочку K'. Очевидно, что $\alpha' < \sin\varphi_0$. Далее, используя неравенство (3.15) для функции $\Phi_1(\alpha, \sin\varphi)$ и монотонность этой функции по $\sin\varphi$, получим, что

$$\sin\varphi_0 \leqslant \frac{1}{t}\sum d_{\zeta_j'} \leqslant \frac{2}{t}\sum \alpha_j' z_j' < 3\sum \alpha_j' \leqslant$$
$$\leqslant 3\sum \Phi^{-1}_{1, \sin\varphi_0}\left(\frac{\mu(C_j')}{|z_j'|}\right) \leqslant 3\Phi^{-1}_{1, \sin\varphi_0}\left(\frac{2\mu(G')}{\left(\frac{1}{2}t\right)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3\Phi^{-1}_{1, \sin\varphi_0}\left[2\cdot 3^{\rho+1}\left(\Phi(2\sin\varphi_0, 3\sin\varphi_0) + 3\varepsilon\left(\frac{1}{2}t\right)\sin\varphi_0\right]\right..$$

Из этого вытекает такое неравенство

$$\Phi_1\left(\frac{\sin\varphi_0}{3}, \sin\varphi_0\right) < 2\cdot 3^{\rho+1}\left[\Phi(2\sin\varphi_0, 3\sin\varphi_0) + 3\varepsilon\left(\frac{1}{2}t\right)\sin\varphi_0\right],$$

из которого, в силу (3.17), следует, что

$$\nu(\sin\varphi_0) < 6\varepsilon\left(\frac{1}{2}t\right). \tag{3.24}$$

Так как $\sin\varphi_0 \geqslant \frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{3}{2}t\right)$, то из (3.16) следует, что неравенство (3.24) может выполняться лишь при $t \leqslant r_0$, где r_0 — некоторое фиксированное число. Если мы часть меры μ_2, расположенную в кругах C_z, $|z| < \frac{3}{2}r_0$, отнесем к мере μ_1, то для оставшейся меры, которую мы снова обозначим μ_2, неравенство (3.24) уже не будет выполняться, а значит, будет выполняться неравенство (3.23).

Из этого неравенства следует, что каждая компонента A_i ограничена и для круга $G_i = C(g_i, R_i)$, $R_i = \alpha_i|g_i|$, наименьшего радиуса, который содержит A_i, будет выполняться неравенство $\alpha_i < \frac{1}{2}\sin\theta_i$, $\theta_i = \arg g_i$.

Оценим теперь часть меры μ_2, расположенную на множестве A_i. Для этого выберем в компоненте A_i обобщенную цепочку $C_{i,k}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2R_i \leqslant \sum_k d_{\zeta_{i,k}}.$$

Далее получим

$$\alpha_i \leqslant \frac{1}{|g_i|}\sum \alpha_{i,k}|z_{i,k}| \leqslant 2\sum \alpha_{i,k} \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum \Phi^{-1}_{1, \frac{1}{2}\sin\theta_i}\left(\frac{\mu(C_{i,k})}{|z_{i,k}|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\Phi^{-1}_{1, \frac{1}{2}\sin\theta_i}\left(2^{\rho+2}\frac{\mu(G_i)}{|g_i|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\Phi^{-1}_{1, \frac{1}{2}\sin\theta_i}\left(2^{\rho+2}\left(\Phi\left(\alpha_i, \frac{3}{2}\sin\theta_i\right) + \frac{3}{2}\varepsilon(|g_i|)\sin\theta_i\right)\right).$$

Из этого неравенства и (3.17) следует, что

$$\Phi\left(\alpha_i, \frac{3}{2}\sin\theta_i\right) < 2\varepsilon(|g_i|)\sin\theta_i.$$

Поэтому

$$\sigma_i = \frac{\mu(A_i)}{|g_i|} \leqslant \frac{\mu(G_i)}{|g_i|} \leqslant \Phi\left(\alpha_i, \frac{3}{2}\sin\theta_i\right) +$$
$$+ \frac{3}{2}\varepsilon(|g_i|)\sin\theta_i < 4\varepsilon(|g_i|)\sin\theta_i.$$

Рассмотрим теперь при $z \in A_i$ функцию

$$v_i(z) = \frac{1}{\tilde{r}} \int\limits_{A_i} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu_2(\zeta) > \frac{-2}{\tilde{r}\sin\theta_i} \int\limits_{A_i} \ln\left|1 + \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right| d\mu_2(\zeta).$$

Так как при z, $\zeta \in A_i\,|\zeta - \bar{\zeta}| = 2\sin\varphi\,|\zeta| < 9\sin\theta_i\,|z|$, то согласно теореме 5 вне множества кругов $G_{k,i}$ с общей суммой радиусов $\eta_i g_i$ будет выполняться неравенство

$$v_i(z) \geqslant \frac{-2}{\tilde{r}\sin\theta_i}\,\mu(A_i) \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{54\sin\theta_i}{\eta_i t}\right) dt \geqslant$$

$$\geqslant -2^{\rho+2}\frac{\sigma_i}{\sin\theta_i}\left[\frac{54\sin\theta_i}{\gamma_i}\ln\left(1+\frac{\eta_i}{54\sin\theta_i}\right) + \ln\left(1+\frac{54\sin\theta_i}{\eta_i}\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant 2^{\rho+2}\frac{\sigma_i}{\sin\theta_i}\left[1 + \ln\left(1+\frac{54\sin\theta_i}{\eta_i}\right)\right].$$

Возьмем $\eta_i = \sin\theta_i e^{-\frac{\gamma_i \sin\theta_i}{\sigma_i}}$. Тогда мы получим, что

$$v_i(z) > -2^{\rho+2}[\gamma_i + 4\varepsilon(|g_i|)(1+\ln 55)].$$

Такая же оценка при $z \in A_i$, $z + hz \bar{\in} G_{k,i}$, $|h| < \frac{1}{4}$ верна для функции $v_i(z+hz)$. Из этого следует такая оценка для функции $v_{i,h}(z) = v_i(z+hz) - v_i(z)$ при $z \in A_i$ вне множества кругов $G_{k,i}$:

$$|v_{i,h}(z)| < 2^{\rho+2}[\gamma_i + 4\varepsilon(|g_i|)(1+\ln 55)]. \qquad (3.25)$$

Отметим, что для сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \qquad (3.26)$$

хотя бы для одной последовательности $\gamma_i \to 0$ достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ сходился интеграл

$$\int^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon(r)}} \frac{d\mu_2(C(0,\, r))}{\tilde{r}}.$$

Сходимость этого интеграла следует, в частности, из условия

$$\varepsilon(r) = o\left(\frac{1}{\ln\ln r}\right).$$

Для сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i\,|g_i| \qquad (3.27)$$

хотя бы для какой-нибудь последовательности $\gamma_i \to 0$ достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ сходился интеграл

$$\int^{\infty} r e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon(r)}} \frac{d\mu_2(C(0,\, r))}{\tilde{r}}.$$

Сходимость такого интеграла вытекает из условия $\varepsilon(r) = o\left(\frac{1}{\ln r}\right)$.

Заметим, что в обоих интегралах вместо меры μ_2 можно брать только ту ее часть, которая расположена на множество A.

Сходимость ряда (3.26) ((3.27)) означает, что множество кругов $G_{k,i}$ видно из начала координат под конечным углом (имеет конечную сумму радиусов). Покажем, что если $\gamma_i \to 0$ при $g_i \to \infty$, то вне множества кругов $G_{k,i}$ функция $v_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$.

Если $z \bar{\in} A$, то оценка функции $v_h(z)$ проведена в теореме 13. Если же $z \in A_i$, то представим $v_h(z)$ так:

$$v_h(z) = v_{i,h}(z) + v_h(z) - v_{i,h}(z).$$

Для функции $v_{i,h}(z)$ мы уже получили оценку (3.25), из которой следует, что $|v_{i,h}(z)| < \varepsilon$ при $|g_i| > r_\varepsilon$. Теперь еще выбросим множество кругов с конечной суммой радиусов (см. теорему 8), так, чтобы для любого R функция $v_{i,h}(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$, когда $|z| \leqslant R$. Чсо касается функции $v_h(z) - v_{i,h}(z)$, то при $z \in A_i$ для нее годны оценки теоремы 13. К мере μ_i можно применить теорему 14. Тем самым доказана.

Теорема 15. *Если мера μ разлагается в сумму двух мер $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где для меры μ_1 выполнено условие (3.9) ((3.10)), а для меры μ_2 — условие (3.14), причем сходится ряд (3.26) ((3.27)), то мера μ принадлежит классу $в'$ ($г'$).*

Условия теоремы точны, что легко проверяется на мерах, сосредоточенных в точках $e^{n^2 + i\theta_n}$, $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теоремы 12, 13, 15 являются аналогом теоремы 1 для случая полуплоскости. В этих теоремах, в отличие от теоремы 1, ограничения на меру различны в различных частях области Z_+. Чем ближе мы подходим к границе, тем большая регулярность требуется от меры. Теорема 14, являющаяся обобщением теоремы Хеймана [8] на случай произвольного уточненного порядка, более слабая по сравнению с теоремой 15 вследствие того, что условия регулярности, которые нужно требовать на вещественной оси, а они там самые жесткие, переносятся на всю область. Правда, при этом нужно учитывать, что для мер, удовлетворяющих условию (3.9), (3.10), не накладывается дополнительных ограничений на функцию $\varepsilon(r)$ в неравенстве (3.14).

Приведем теперь две теоремы об абсолютно непрерывных мерах, сосредоточенных на границе области Z_+.

Теорема 16. *Если функция $u(t)$ такова, что*

$$\frac{u(t+ht) - u(t)}{\overline{t}} \underset{h\to 0}{\rightrightarrows} 0, \tag{3.28}$$

то функция

$$v_h(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{3}{4}r}^{\frac{5}{4}r}\left[\frac{\operatorname{Im}(z+hz)}{|t-z-hz|^2} - \frac{\operatorname{Im} z}{|t-z|^2}\right]u(t)\,dt \underset{h\to 0}{\rightrightarrows} 0.$$

Доказательство. Из условия (3.28) следует, что $u(t) \leqslant K_3 t$. Далее мы имеем

$$\frac{y}{\pi}\int\limits_{\frac{3}{4}r}^{\frac{5}{4}r}\frac{u(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\frac{3}{4}r-x}{y}}^{\frac{\frac{5}{4}r-x}{y}}\frac{u(x+sy)}{s^2+1}\,ds,$$

$$\frac{y_h}{\pi}\int\limits_{\frac{3}{4}r}^{\frac{5}{4}r}\frac{u(t)\,dt}{(t-x_h)^2+y_h^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\frac{3}{4}r-x_h}{y_h}}^{\frac{\frac{5}{4}r-x_h}{y_h}}\frac{u(x_h+sy_h)}{s^2+1}\,ds$$

где $x_h+iy_h=z+hz$.

Выберем $\varepsilon>0$, и пусть $\frac{x}{y}<\frac{10}{\varepsilon}$. Тогда

$$\left|\frac{\frac{5}{4}r-x_h}{y_h}-\frac{\frac{5}{4}r-x}{y}\right|<\frac{K_3|h|}{\varepsilon^2}$$

$$\left|\frac{\frac{3}{4}r-x_h}{y_h}-\frac{\frac{3}{4}r-x}{y}\right|<\frac{K_3|h|}{\varepsilon^2}$$

$$|x_h+sy_h-x-sy|<\frac{1}{\varepsilon}K_4|h|r.$$

Поэтому в данном случае $v_h(z)\rightrightarrows 0$ при $h\to 0$.

Пусть теперь $\frac{x}{y}>\frac{10}{\varepsilon}$. Имеем, что

$$\int\limits_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{\frac{5}{4}r-x}{y}}\frac{u(x+sy)}{s^2+1}\,ds<K_5\varepsilon r.$$

Аналогично оценивается интеграл по другим хвостам. А при $s\in\left[-\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon}\right]$ выполняется неравенство

$$|x_h+sy_h-x-sy|<r|h|\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

поэтому

$$\frac{1}{r}\int\limits_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{|u(x_h+sy_h)-u(x+sy)|}{s^2+1}\,ds\underset{h\to 0}{\rightrightarrows}0.$$

Далее доказательство очевидно.

Теперь как следствие теорем 11, 14, 16 получена

Теорема 17. *Пусть функция* $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$ *и* $d\nu_2(t)=\frac{u_2(t)}{t}dt$, $|t|\geqslant 1$.

Если функция $u_1(t)$ *удовлетворяет условию (3.28), а мера* $|\nu_2(t)|$

а) имеет минимальный тип,

б) удовлетворяет условию (3.9),

в) удовлетворяют условию (3.10),

то функция $v_h(z)\rightrightarrows 0$ *при* $h\to 0$ *вне множества кругов*

а) нулевой линейной плотности,

б) видимых из начала координат под конечным углом,

в) с конечной суммой радиусов, или, то же самое, — заряд $d\nu(t)=\frac{u(t)}{t}$, $|t|\geqslant 1$ *принадлежит классу б′, в′, г′.*

4. Представление функций конечного порядка субгармонических в верхней полуплоскости

Рассмотрим полукруг $C^+(0, R)$. Пусть L_R — его граница. Функция Грина для полукруга $C^+(0, R)$ и ее нормальная производная имеют вид

$$G_R(z, \zeta) = \ln\left|\frac{(z-\bar\zeta)(R^2 - z\bar\zeta)}{(z-\zeta)(R^2 - z\zeta)}\right|;$$

$$\frac{\partial G_R(z,\zeta)}{\partial n} = \begin{cases} \dfrac{2y}{|z-t|^2} - \dfrac{2yR^2}{|R^2 - tz|^2} = \dfrac{2y(R^2-r^2)(R^2-t^2)}{|z-t|^2|R^2-tz|^2}, & \zeta = t \\ \dfrac{R^2-r^2}{R|Re^{i\varphi}-z|^2} - \dfrac{R^2-r^2}{R|Re^{-i\varphi}-z|^2} = \dfrac{4y(R^2-r^2)\sin\varphi}{|Re^{i\varphi}-z|^2|Re^{-i\varphi}-z|^2}, & \zeta = Re^{i\varphi}. \end{cases}$$

Легко проверяются следующие оценки при $R \geqslant R_0$.

1) $2 \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{1}{2}R$, $\zeta = \xi + i\eta$,

$$G_R(i, \zeta) = \ln\left(1 + \frac{4\eta}{|\zeta - i|^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{4R^2\eta}{|R^2 - \zeta i|^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4\eta}{|\zeta-i|^2}\right) \geqslant \frac{\ln 9}{16}\,\frac{4\eta}{|\zeta - i|^2} \geqslant \frac{\ln 9}{5}\,\frac{\eta}{|\zeta|^2}. \tag{3.29}$$

$$2)\quad \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{\partial G_R(i, t)}{\partial n} \leqslant \frac{2}{1+t^2}, \tag{3.30}$$

причем левое неравенство верно при $|t| \leqslant \frac{R}{2}$, а правое — для всех t.

$$3)\quad \frac{2\sin\varphi}{R^2} < \frac{\partial G_R(i, Re^{i\varphi})}{\partial n} < \frac{4\sin\varphi}{R^2}. \tag{3.31}$$

Пусть $G^1(\alpha, \beta)$ — функция Грина для круга $C(0.1)$. Пусть $w(z)$ — функция, конформно отображающая полукруг $C^+(0, R)$ на круг $C(0, 1)$, а $v(\alpha)$ — функция обратная к $w(z)$. Пусть $e^{is} = w(\zeta)$, $\zeta \neq \pm R$. Тогда имеет место формула

$$\frac{\partial G^1(\alpha, e^{is})}{\partial n} = \lim_{\rho\to 1}\frac{G^1(\alpha, \rho e^{is})}{1-\rho} =$$
$$= \lim_{\rho\to 1}\frac{G^1(w(z), w(\zeta_\rho))}{|\zeta - \zeta_\rho|}\,\frac{|v(e^{is}) - v(\rho e^{is})|}{1-\rho} =$$
$$= \lim_{\rho\to 1}\frac{G_R(z, \zeta_\rho)}{|\zeta - \zeta_\rho|}|v'(e^{is})| = \frac{\partial G_R(z, \zeta)}{\partial n}|v'(e^{is})|. \tag{3.32}$$

Тут мы воспользовались равенством $G^1(w(z), w(\zeta_\rho)) = G_R(z, \zeta_\rho)$ (см. 19, стр. 23]) и аналитичностью функции $v(\alpha)$ в окрестности точки e^{is}. Отметим, что функция $\frac{1}{w'(\zeta)} = v'(e^{is})$ в окрестности точек $\zeta = \pm R$ имеет вид

$$\frac{1}{w'(\zeta)} = C(\zeta \mp R)^{-\frac{1}{2}} + 0(1).$$

Пусть теперь мы имеем ограниченную сверху гармоническую функцию $H(z)$ в области $C^+(0, R)$. Тогда имеет место представление, [20, стр. 111]:

$$H(v(\alpha)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(v(e^{is}))\frac{\partial G^1(\alpha, e^{is})}{\partial n}ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial G^1(\alpha, e^{is})}{\partial n}d\mu_1(e^{is}),$$

це μ_1 — сингулярная мера. Из этого представления, используя формулу (3.32), получаем

$$H(z)=H(v(\alpha))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_R}H(\zeta_\sigma)\frac{\partial G_R(z,\zeta_\sigma)}{\partial n}d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_S}\frac{\partial G_R(z,\zeta_\sigma)}{\partial n}\frac{1}{|w'(\zeta_\sigma)|}d\mu_1(w(\zeta_\sigma)),$$

де $d\sigma$ — элемент длины дуги на L_R, Мера $\mu_1(w(\zeta_\sigma))$ ограничена на L_R, ак как мера $\mu_1(e^{is})$ ограничена на единичной окружности. Введем меру $\mu_2(\sigma)$

$$\mu_2(l_j)=\int\limits_{l_j}\frac{1}{|w'(\zeta_\sigma)|}d\mu_1(w(\zeta_\sigma)),$$

l_j — дуга на L_R.

Мера $\mu_2(\sigma)$ сингулярна и конечна на любой замкнутой дуге, не содержащей точек $\pm R$. Таким образом, мы получили представление

$$H(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_R}\frac{\partial G_R(z,\zeta_\sigma)}{\partial n}H(\zeta_\sigma)\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_R}\frac{\partial G_R(z,\zeta_\sigma)}{\partial n}d\mu_2(\sigma).$$

Рассмотрим теперь субгармоническую в области Z_+ функцию $u(z)$, имеющую формальный порядок $\rho(r)$. Для простоты будем считать, что $u(z)<\tilde{r}$ и величина $u(i)$ конечна. Пишем представление Рисса для функции $u(z)$ в области $C^+(0,R)$:

$$u(z)=-\int\limits_{C^+(0,R)}G_R(z,\zeta)\,d\bar{\mu}_1(\zeta)+h_R(z),\tag{3.33}$$

где $\bar{\mu}_1$ — некоторая мера распределенная в открытой области Z_+, а $h_R(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в области $C^+(0,R)$.

Введем в рассмотрение гармоническую функцию

$$g_R(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_R}\frac{\partial G_R(z,\zeta_\sigma)}{\partial n}|\tilde{\zeta}_\sigma|\,d\sigma.$$

Эта функция является гармонической мажорантой функции $u(z)$, потому что на границе L_R выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,u(z)\leqslant\widetilde{|\zeta|}=g_R(\zeta).$$

Так как $h_R(z)$ наилучшая гармоническая мажоранта $u(z)$, то

$$h_R(z)\leqslant g_R(z).$$

Воспользовавшись (3.30) и (3.31), оценим $g_R(i)$

$$g_R(i)<\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\widetilde{|t|}}{1+t^2}dt+\frac{4}{\pi}R^{\rho(R)-1}<K_6\int\limits_{-R}^{R}\frac{\widetilde{|t|}}{1+t^2}dt.$$

Теперь из равенства (3.33) и неравенства (3.29) следует, что

$$\int\limits_{2<|\zeta|<\frac{1}{2}R} \frac{\sin\theta}{|\zeta|}\, d\bar{\mu}_1(\zeta) \leqslant \frac{5}{\ln 9} \int\limits_{C+(0,\ R)} G_R(i,\ \zeta)\, d\bar{\mu}_1(\zeta) =$$

$$= \frac{5}{\ln 9}\left(h_R(i) - u(i)\right) < K_7 \int\limits_{-R}^{R} \frac{\widetilde{|t|}}{1+t^2}\, dt. \tag{3.34}$$

Если ввести меру $\mu_1(\zeta)$, $d\mu_1(\zeta) = \sin\varphi\, d\bar{\mu}_1(\zeta)$, то из неравенства (3.34) интегрированием по частям легко получить, что

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{d\mu_1(C(0,t))}{t^{q+1}} < \infty,\quad q = [\rho]. \tag{3.35}$$

В теореме 10 утверждается, что функция

$$v(z) = \int\limits_{C+(0,\ R)} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\bar{\mu}_1(\zeta)$$

имеет почти всюду на вещественной оси нулевые нормальные предельные значения. Функция $h_R(z)$ имеет почти всюду некасательные предельные значения при $z \to t$. Поэтому почти всюду на вещественной оси функция $u(z)$ имеет нормальные предельные значения $u(t) = h_R(t)$. В остальных точках по определению положим $h_R(t) = u(t) = \varlimsup\limits_{z\to t} u(z)$.

Тогда $h_R(z)$ представляется в виде

$$h_R(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial G_R(z,\ t)}{\partial n} u(t)\, dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial G_R(z,\ t)}{\partial n}\, d\mu_2(t) +$$

$$+ \frac{R}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\partial G_R(z,\ Re^{i\varphi})}{\partial n} h^+(Re^{i\varphi})\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\partial G_R(z,\ Re^{i\varphi})}{\partial n}\, d\mu_R(\varphi),$$

где $\mu_R(\varphi)$ — некоторая неубывающая функция. Воспользовавшись (3.30) и (3.31), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \frac{u^-(t)}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial G_R(i,\ t)}{\partial n} u^-(t)\, dt \leqslant -h_R(i) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{u^+(t)}{1+t^2}\, dt + \frac{4}{\pi} R^{\rho(R)-1} < K_8 \int\limits_{-R}^{R} \frac{\widetilde{|t|}}{1+t^2}\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{|u(t)|}{1+t^2}\, dt < K_9 \int\limits_{-R}^{R} \frac{\widetilde{|t|}}{1+t^2}\, dt.$$

Аналогично получается

$$\int_{-R}^{R} \frac{d\mu_2(t)}{1+t^2} < K_{10} \int_{-R}^{R} \frac{\overline{|t|}}{1+t^2}\, dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\,|\nu_R(\varphi)|}{R^2} < K_{11} \int_{-R}^{R} \frac{\overline{|t|}}{1+t^2}\, dt,$$

где $d\nu_R(\varphi) = h^+(Re^{i\varphi})\, R\, d\varphi - d\mu_R(\varphi)$.
Из этих оценок следует, что

$$\int_2^{\infty} \frac{|u(t)|}{t^{2+q}}\, dt < \infty, \qquad \int_2^{\infty} \frac{d\mu_2(t)}{t^{2+q}} < \infty,$$

$$\frac{1}{R^{2+q}} \int_2^{\pi} \sin\varphi\, d\,|\nu_R(\varphi)| \underset{R\to 0}{\to} 0. \tag{3.36}$$

Напишем теперь представление для $u(z)$ в виде

$$u(z) = -\int\limits_{C^+(0,\,R)} G_R(z,\ \zeta)\, d\bar{\mu}(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{\partial G_R(z,\ t)}{\partial n} \times$$

$$\times [u(t)\, dt - d\mu_2(t)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial G_R(z,\ Re^{i\varphi})}{\partial n}\, d\nu_R(\varphi) =$$

$$= \int\limits_{C^+(0,2)} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\bar{\mu}_1(\zeta) + \frac{y}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{u(t)\, dt - d\mu_2(t)}{(t-x)^2 + y^2} +$$

$$+ \int\limits_{C^+(0,\,R)\setminus C^+(0,2)} \mathrm{Re}\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} + z\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \cdots + \frac{z^q}{q}\left(\frac{1}{\zeta^q} - \frac{1}{\bar{\zeta}^q}\right)\right] d\bar{\mu}_1(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{2<|t|<R} \mathrm{Im}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \cdots - \frac{z^q}{t^{q+1}}\right] [u(t)\, dt - d\mu_2(t)] +$$

$$+ \int\limits_{C^+(0,2)} \ln\left|\frac{R^2 - z\zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\bar{\mu}_1(\zeta) - \frac{y}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{R^2\,[u(t)\, dt - d\mu_2(t)]}{|R^2 - tz|^2} +$$

$$+ \int\limits_{C^+(0,R)\setminus C^+(0,2)} Re\left[\ln\frac{R^2 - z\zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}} + \frac{z}{R^2}(\zeta - \bar{\zeta}) + \cdots + \frac{z^q}{R^{2q}}(\zeta^q - \bar{\zeta}^q)\right] d\bar{\mu}_1(\zeta) -$$

$$- \int\limits_{2<|t|<R} \mathrm{Im}\left(\frac{R^2}{R^2 t - z t^2} + \frac{z}{R^2} + \cdots + \frac{t^{q-1} z^q}{R^{2q}}\right) [u(t)\, dt - d\mu_2(t)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\pi} Re\left[\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} - \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{-i\varphi} - z} + 2\frac{z}{R}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \cdots +\right.$$

$$\left. + 2\frac{z^q}{R^q}(e^{iq\varphi} - e^{-iq\varphi})\right] d\nu_R(\varphi) + \mathrm{Im}\, P_{q,\,R}(z),$$

где $P_{q,\,R}(z)$ — полином степени q с вещественными коэффициентами.

Пусть z принадлежит некоторому ограниченному множеству. Первые два интеграла не зависят от R, следующие два интеграла в силу условий (3.36) сходятся равномерно при $R \to \infty$. Из этих же условий следует, что остальные интегралы равномерно стремятся к нулю при $R \to \infty$. Следовательно, $P_{q,\,R}(z) \rightrightarrows P_q(z)$ при $R \to \infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим

$$u(z) = \int\limits_{C^+(0,2)} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\bar\mu_1(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int\limits_{-2}^{2} \frac{u(t)\,dt - d\mu_2(t)}{(t-x)^2+y^2} +$$

$$+ \int\limits_{Z^+\setminus C^+(0,2)} \mathrm{Re}\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta} + z\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\bar\zeta}\right) + \cdots + \frac{z^q}{q}\left(\frac{1}{\zeta^q}-\frac{1}{\bar\zeta^q}\right)\right] d\bar\mu_1(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 2} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \cdots - \frac{z^q}{t^{q+1}}\right)[u(t)\,dt - d\mu_2(t)] + \mathrm{Im}P_q(z) =$$

$$= u_0(z) + \int\limits_{Z^+\setminus C^+(0,2)} d_q(z,\zeta)\, d\bar\mu_1(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 2} K_q(z,t)[u(t)\,dt - d\mu_2(t)] +$$

$$+ \mathrm{Im}P_q(z).$$

Заметив, что

$$\lim_{\sin\varphi\to 0} \frac{1}{\sin\varphi} d_q(z, te^{i\varphi}) = -2tK_q(z,t),$$

мы можем записать представление для $u(z)$ в более простой форме:

$$u(z) = u_0(z) + \int\limits_{Z^+\setminus C^+(0,2)} \frac{1}{\sin\varphi} d_q(z,\zeta)\, d\nu_u(\zeta) + \mathrm{Im}P_q(z),$$

где ядро на вещественной оси определяется по непрерывности, а

$$d\nu_u(\zeta) = \begin{cases} \sin\varphi\, d\bar\mu_1(\zeta), & \mathrm{Im}\,\zeta > 0; \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\zeta}\, d\mu_2(\zeta) - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{u(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta, & \mathrm{Im}\,\zeta = 0. \end{cases}$$

Далее мы сравним формальные порядки субгармонической функции $u(z)$ и меры $|\nu_u|$. Пусть $\rho > 1$, а $u(z) < \tilde r$. Тогда из (3.34) и аналогичных неравенств следует оценка

$$|\nu_u|(C(0,r)) < K_{12}\tilde r.$$

Если $\rho \leqslant 1$, то мера $|\nu_u|$ не всегда допускает аналогичную оценку, что видно на примере функции

$$u(z) = \int\limits_1^\infty \ln\left|\frac{z-it}{z+it}\right| \frac{dt}{t^{1/2}}.$$

Функция $u(z)$ отрицательна, а $|\nu_u|(C(0,r)) = 2r^{\frac{1}{2}}$.

В случае наличия оценки снизу и при $\rho \leqslant 1$ удается получить оценку меры $|\nu_u|$. Именно, верна такая

Теорема 18. *Пусть $u(z) < \tilde r$ и пусть существуют такие числа $\alpha > 0$, L, N, что в каждой из областей $D_R = \{z : R < |z| < LR,\ \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| < \frac{\pi}{2} - \alpha\}$ найдется точка z_1, в которой выполняется неравенство $u(z_1) > -N\tilde R$, тогда $|\nu_u|(C(0,r)) < K_{13}\tilde r$.*

Эта теорема является обобщением леммы 11 [1, стр. 175]. Нужная нам оценка для $|\nu_u|$ получится, если написать представление Рисса для функции $u(z)$ в области $D'_R = \{z : R < |z| < LR, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ и применить рассуждения, приведшие к оценкам типа (3.34).

Для субгармонических функций целого порядка имеет место аналог теоремы Линделёфа.

Теорема 19. *Пусть $u(z)$ имеет $\rho(r)$ своим формальным порядком, $\rho > 1$ — целое и*

$$\delta_u(r) = C_\rho + \frac{2}{\rho} \int\limits_{2 \leqslant |\zeta| \leqslant r} \frac{\sin \rho\varphi}{|\zeta|^\rho} d\bar{\mu}_1(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{2 \leqslant |t| < r} \frac{u(t)\,dt - d\mu_2(t)}{t^{\rho+1}},$$

где C_ρ — старший коэффициент соответствующего многочлена. Тогда

$$\frac{\delta_u(r)}{r^{\rho(r)-\rho}} < K_{14}. \tag{3.37}$$

Схема доказательства этой теоремы примерно такая же, как и для случая целых функций [1, стр. 42 и 65]. Соответствующая оценка снизу вытекает из теоремы 6.

Доказательство не изменяется и для случая $\rho = 1$, если мы дополнительно потребуем, чтобы мера $|\nu_u|$ имела формальный порядок $\rho(r)$, что выполняется автоматически при $\rho > 1$.

§ 5. Субгармонические функции в $\mathbf{Z}_+$

Тут с помощью доказанных представлений мы будем изучать субгармонические функции. Рассмотрим функцию $u_h(z)$. Пусть

$$u_h(z) = S_h(z) + R_h(z),$$

где $S_h(z) = \tilde{r}v_h(z)$ — сингулярная часть функции $u_h(z)$, причём функция $u_h(z)$ построена по заряду ν_u, а $R_h(z)$ — регулярная часть функции $u_h(z)$.

Лемма 11. *Пусть*

$$u(z) = u_0(z) + \int\limits_{Z+\setminus C(0,2)} \frac{1}{\sin\varphi} d_q(z, \zeta)\, d\nu_u(\zeta) + \operatorname{Im} P_q(z).$$

Если мера $|\nu_u|$ имеет формальный порядок $\rho(r)$ и $\rho \neq q$, а если $\rho = q$, то для $\delta_u(r)$ выполняется соотношение (38.3), тогда всюду вне полукруга $C^+(0,1)$ имеет место оценка

$$|R_h(z)| < K_{15} |h| \tilde{r}.$$

Оценка $R_h(z)$ для функций субгармонических в Z_+ аналогична оценке для случая области Z и проводится без труда.

Теорема 20. *Если функция $u(z)$ формального порядка $\rho(r)$ принадлежит одному из введенных нами классов, то заряд ν_u также принадлежит этому же классу относительно $\rho(r)$. Наоборот, если заряд ν_u принадлежит одному из классов относительно порядка $\rho(r)$, который одновременно является формальным порядком функции $u(z)$, то относительно этого порядка функция $u(z)$ принадлежит тому же классу.*

Для доказательства первой части теоремы нам достаточно показать, что мера $|\nu_u|$ имеет формальный порядок $\rho(r)$, а затем сослаться на лемму 11. Мы уже отмечали, что это имеет место при $\rho > 1$. По условию функция $u(z)$ принадлежит одному из классов. Из этого следует, что для любого $\eta > 0$ существует множество кругов C_η, с верхней линейной плотностью не превышающей η и число A_η такие, что при $z \in C_\eta$ будет выполняться неравенство $u(z) > -A_\eta \tilde{r}$. Теперь из теоремы 18 следует, что мера $|\nu_u|$ имеет формальный порядок $\rho(r)$.

Вторая часть теоремы следует из леммы 11 при нецелом ρ и леммы 11 и теоремы 19 при целом ρ.

Список литературы, на которую имеются ссылки в настоящей статье, приведен в части I нашей работы, помещенной в выпуске 6 настоящего сборника.

Поступила 27 ноября 1967 г.