)Б ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА A, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

А. М. Рыбалко

Если целая функция $f(\lambda)$ экспоненциального типа σ *положительна ещественной оси и принадлежит классу* A, т. е. ее корни $\{a_k\}_1^\infty$, ле-ие в верхней полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right| < \infty,$$

на, как известно [1], допускает представление

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda)\,\overline{\varphi}(\lambda),$$

$\varphi(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа $\frac{\sigma}{2}$, имеющая корни ь в верхней полуплоскости, а $\overline{\varphi}(\lambda)$ получается из $\varphi(\lambda)$ заменой коэф-иентов маклореновского разложения комплексно сопряженными чис-и.

При построении континуальных ортогональных систем функций нам адобилась иная факторизация функции $f(\lambda)$. В простейшем случае тановка вопроса такова: рассматривается двухлистная риманова по-хность $\mathfrak{F}$ с линиями перехода $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ и целая функция $f(\lambda)$, адающая указанными выше свойствами; требуется представить $f(\lambda)$ иде произведения

$$f(\lambda) = \omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda),$$

$\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$ — целые функции экспоненциального типа $\frac{\sigma}{2}$ на римано-поверхности $\mathfrak{F}$, вещественные на отрезке $[-1,1]$ и такие, что корни $\lambda)$ — лежат на первом, а корни $\omega_2(\lambda)$ — на втором листе поверхно- $\mathfrak{F}$.

Для получения требуемого представления отобразим риманову по-хность $\mathfrak{F}$ с помощью формулы

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right) \tag{1}$$

плоскость v. При этом четыре полулиста поверхности $\mathfrak{F}$ (верхняя I^+ нижняя I^- половины первого листа и соответствующие половины II^+,

II^- второго листа) отобразятся на двуугольники плоскости v, как это показано на рисунке.

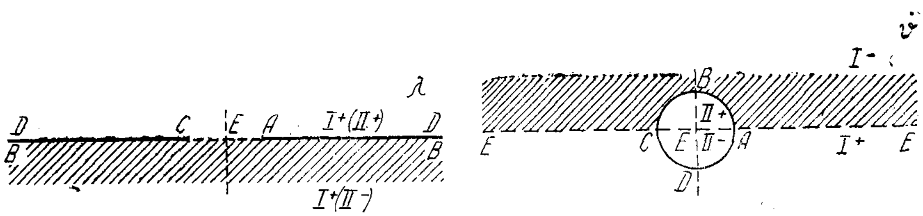
Из формулы (1) следует, что

$$\frac{1+iv}{v+i} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1},\ v = \frac{1}{\lambda} - \frac{i\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda},$$

где радикал положителен в точках верхнего берега разреза $(1, \infty)$.

Исходная функция $f(\lambda)$ допускает представление

$$f(\lambda) = e^{2a\lambda+2c} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{a}_k}\right) e^{\lambda\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{\bar{a}_k}\right)},$$



где a и c — вещественны,

$$\operatorname{Im} a_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right| < \infty .$$

По корням a_k введем числа c_k с помощью формулы

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right),\ |c_k| > 1\ (\operatorname{Im} c_k < 0).$$

Таким образом, точки c_k лежат в области I^+ плоскости v. Замечая, что

$$c_k = \frac{1}{a_k} - \frac{i\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k} = \frac{1}{a_k} - i + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right)$$

и, следовательно,

$$c_k\bar{c}_k = 1 + i\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{\bar{a}_k}\right) + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right) = 1 - 2\operatorname{Im}\frac{1}{a_k} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right),$$

заключаем, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} |c_k|$$

сходится. Кроме того, из

$$c_k + i = \frac{1}{a_k} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right)$$

следует, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(c_k + i)|.$$

Заметим, наконец, что

$$\frac{1}{c_k} = \frac{1}{a_k} + \frac{i\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k} = \frac{1}{a_k} + i + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{c_k} - \bar{c}_k = 2i \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right),$$

а значит ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{c_k} - \bar{c}_k \right|$$

также сходится.

Обращаясь к бесконечному произведению, представляющему функцию $f(\lambda)$, заметим, что в силу нашего отображения

$$\left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{a}_k}\right) = \frac{(v - c_k)(v - \bar{c}_k)\left(\frac{1}{v} - c_k\right)\left(\frac{1}{v} - \bar{c}_k\right)}{c_k \bar{c}_k (v + i)(v - i)\left(\frac{1}{v} + i\right)\left(\frac{1}{v} - i\right)} \tag{2}$$

и

$$\frac{c_k + i}{v + i} + \frac{c_k + i}{\frac{1}{v} + i} + \frac{\bar{c}_k - i}{v - i} + \frac{\bar{c}_k - i}{\frac{1}{v} - i} = (c_k - i)(\lambda - i) + (\bar{c}_k - i)(\lambda + i) =$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{\bar{a}_k}\right) + \lambda O\left(\frac{1}{|Q_k|^2}\right) + 2 \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right). \tag{3}$$

Теперь введем функцию

$$\Omega(v) = e^{\frac{A}{v+i} + B} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_k + i}{v + i}\right) e^{\frac{1}{v+i} \operatorname{Re}(c_k + i)},$$

где A и B — вещественные постоянные, подлежащие определению. Написанное бесконечное произведение в каждой компактной части плоскости v, не содержащей точки $v = -i$, сходится абсолютно и равномерно, если предварительно выбросить конечное число множителей, обращающихся в данной области в нуль. Легко видеть, что это бесконечное произведение есть целая функция экспоненциального типа от величины $\frac{2}{v+i}$. А так как

$$\frac{2}{v + i} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} - i,$$

то $\Omega(v)$ — целая функция экспоненциального типа на римановой поверхности $\mathfrak{F}$. Тем же свойством обладают функции

$$\bar{\Omega}(v), \ \Omega\left(\frac{1}{v}\right), \ \bar{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right).$$

Учитывая формулы (2), (3), приходим к выводу, что

$$\Omega(v)\,\bar{\Omega}(v)\,\Omega\left(\frac{1}{v}\right)\bar{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right) =$$

$$= e^{(2A+\alpha)\lambda + 4B + \beta} \prod_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{a}_k}\right) e^{\lambda\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{\bar{a}_k}\right)},$$

где α, β — две новые вещественные постоянные, появляющиеся за счет трех последних членов правой части формулы (3). Отсюда видно, что при надлежащем выборе A и B.

$$\Omega(v)\,\bar{\Omega}(v)\,\Omega\left(\frac{1}{v}\right)\bar{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right) = f(\lambda).$$

Корни функций $\Omega(v)$, $\overline{\Omega}(v)$, $\Omega\left(\frac{1}{v}\right)$, $\overline{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right)$ лежат соответственно в областях I^+, I^-, II^+, II^- плоскости v. Поэтому

$$\varphi(\lambda)=\Omega(v)\,\Omega\left(\frac{1}{v}\right)$$

есть та целая функция экспоненциального типа $\frac{\sigma}{2}$, которая входит в представление функции $f(\lambda)$, упомянутые в самом начале статьи.

Требуемая факторизация получится при

$$\omega_1(\lambda)=\Omega(v)\,\overline{\Omega}(v),\quad \omega_2(\lambda)=\Omega\left(\frac{1}{v}\right)\overline{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right).$$

Докажем это. Прежде всего ясно, что $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$ — целые функции экспоненциального типа на римановой поверхности, из которых первая имеет корни только на листе I, а вторая — только на листе II. Далее, очевидно, что при вещественных v обе функции $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$ положительны. Отсюда следует, что функции $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$ положительны в интервале $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$. Остается проверить, что тип каждой из функций $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$ равен $\frac{\sigma}{2}$ на римановой поверхности $\mathfrak{F}$. Для этого достаточно доказать, что тип $\omega_1(\lambda)$ на римановой поверхности $\mathfrak{F}$ не превосходит $\frac{\sigma}{2}$. С этой целью заметим, что имеют место следующие представления:

$$\omega_1(\lambda)=\varphi(\lambda)\,\frac{\overline{\Omega}(v)}{\Omega\left(\frac{1}{v}\right)},\tag{4}$$

$$\omega_1(\lambda)=\overline{\varphi}(\lambda)\,\frac{\Omega(v)}{\overline{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right)},$$

где о функции $\varphi(\lambda)$ известно, что она целая и притом экспоненциального типа $\frac{\sigma}{2}$. Представлением (4) мы воспользуемся при $\operatorname{Im}v\leqslant 0$, т. е. на полулистах I^+ и II^- римановой поверхности. С помощью элементарных преобразований находим, что

$$h(v)\overset{\text{def}}{=}\frac{\overline{\Omega}(v)}{\Omega\left(\frac{1}{v}\right)}=e^{iA}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{i(v-\overline{c}_k)}{1-c_kv}\,e^{i\operatorname{Re}c_k}.$$

Функция $h(v)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}v\leqslant 0$ голоморфна. Покажем, что она в этой полуплоскости ограничена. Отсюда будет следовать, что $\omega_1(\lambda)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Im}v\leqslant 0$ тип $\leqslant\frac{\sigma}{2}$. Для доказательства заметим, что

$$\frac{i(v-\overline{c}_k)}{1-c_kv}\,e^{i\operatorname{Re}c_k}=\frac{1-\frac{\overline{c}_k}{v}}{1-\frac{1}{c_kv}}\,e^{-\ln[1+i(c_k+i)]+i\operatorname{Re}(c_k+i)}=$$

$$=\left[1+\frac{\frac{1}{c_k}-\overline{c}_k}{v-\frac{1}{c_k}}\right]e^{\operatorname{Im}(c_k+i)+O(|c_k+i|^2)}.$$

Так как ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c_k}-\bar{c}_k\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\{\operatorname{Im}(c_k+i)+O(|c_k+i|^2)\}$$

абсолютно сходятся, то при $\operatorname{Im} v \leqslant 0$, $|v| \geqslant R > 1$ функция $h(v)$ ограничена; значит, она ограничена во всей полуплоскости $\operatorname{Im} v \leqslant 0$. Следовательно, отношение

$$\frac{\Omega(v)}{\bar{\Omega}\left(\frac{1}{v}\right)}$$

ограничено в полуплоскости $\operatorname{Im} v \geqslant 0$. Таким образом, во всей плоскости v, а значит, на всей римановой поверхности $\mathfrak{F}$ функция $\omega_1(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип $\leqslant \frac{\sigma}{2}$. Наше утверждение доказано.

Положим теперь, что некоторая целая функция $F(\lambda)$ экспоненциального типа σ, корни которой, лежащие в верхней полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right| < \infty,$$

положительна на интервалах $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$. У нее, таким образом, может быть конечное (четное) число вещественных корней в интервале $(-1, 1)$. Следовательно,

$$F(\lambda) = P(\lambda) f(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа σ, положительна на всей вещественной оси λ, а $P(\lambda)$ — вещественный многочлен четной степени, все корни которого лежат в интервале $(-1, 1)$. Для $f(\lambda)$ получена вполне определенная факторизация. Аналогичная факторизация возможна для многочлена $P(\lambda)$, что было использовано в статье [2]. Соответствующая лемма там приведена без доказательства*. Это доказательство получается очень просто, если корни $P(\lambda)$ сгруппировать в пары и воспользоваться отображением на плоскость v с помощью приведенной выше формулы.

Пусть α, β — какая-нибудь пара корней многочлена $P(\lambda)$ $(-1 < \alpha, \beta < 1)$. Положим

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right),\quad (|a|>1,\ |b|>1).$$

Мы замечаем, что

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)=\frac{4(v-a)(v-b)\left(\frac{1}{v}-a\right)\left(\frac{1}{v}-b\right)}{(1+a^2)(1+b^2)(v^2+1)\left(\frac{1}{v^2}+1\right)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{2(v-a)(v-b)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}(v^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\{(1+ab)-(a+b)\lambda+$$
$$+i(ab-1)\sqrt{\lambda^2-1}\}=(A+B\lambda)+iC\sqrt{\lambda^2-1},$$

* В формулировке леммы имеется опечатка. На стр. 771, строка 6-я снизу должно быть $\mathfrak{S}$, а не $\mathfrak{S}^*$.

где A, B, C — вещественные постоянные, а радикал определен так же, как и выше. Это выражение имеет корни на первом листе римановой поверхности $\mathfrak{F}$. Сопряженное выражение

$$(A+B\lambda)-iC\sqrt{\lambda^2-1}$$

будет иметь корни на втором листе. Таким образом, доказано следующее утверждение: $F(\lambda)$ *представима в виде*

$$F(\lambda)=\omega(\lambda)\,\omega^*(\lambda),$$

где $\omega(\lambda)$ *и* $\omega^*(\lambda)$ — *целые функции экспоненциального типа* $\frac{\sigma}{2}$ *на римановой поверхности* $\mathfrak{F}$, *вещественные на отрезке* $[-1, 1]$, *причем корни* $\omega(\lambda)$ *лежат на одном листе, а корни* $\omega^*(\lambda)$ — *на втором листе* $\mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.
2. Н. И. Ахиезер. Континуальный аналог многочленов, ортогональных на дуге окружности, ДАН, 141 № 4 (1961).

Поступила 27 ноября 1967 г.