Вып. 7 1968

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ, ИМЕЮЩИМИ КОНЕЧНУЮ МАКСИМАЛЬНУЮ ПЛОТНОСТЬ

А. А. Кондратюк

Пойа [1] ввел понятия максимальной и минимальной плотностей последовательностей и дал важные их приложения (см. также [2]).

Мы рассматриваем класс целых функций $f(z)$ конечного порядка ρ с положительными нулями, причем на их максимальную и минимальную плотности наложены некоторые ограничения. В этом классе находятся точные оценки сверху и снизу для индикаторов

$$h(\varphi; f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\varphi})|$$

и нижних индикаторов

$$\underline{h}(\varphi; f) = \underline{\lim}_{r\to\infty}\, r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\varphi})|,$$

где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок (см. [3]), $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$. Будем предполагать $\rho > 0$, так как случай $\rho = 0$ рассмотрен в § 3 статьи [6].

Постановка задачи принадлежит Б. Я. Левину. При ограничениях, наложенных на верхнюю и нижнюю плотности нулей, аналогичную задачу решил А. А. Гольдберг [4—8]. Эта же задача, где в определении верхней и нижней плотностей нулей бралась функция числа нулей Р. Неванлинны $N(r) = \int_0^r n(t)\, d\ln t$, решена автором [9, 10].

Автор выражает глубокую признательность А. А. Гольдбергу, Б. Я. Левину и И. В. Островскому за ценные указания, а также участникам семинара при кафедре теории функций Львовского университета, сделавшим полезные замечания.

§ 1. Максимальная и минимальная $\rho(r)$ — плотности последовательностей

Пойа [1] рассматривал последовательности Λ неотрицательных чисел λ_n, удовлетворяющих условию

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \gamma, \quad \gamma > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В этом параграфе мы покажем, как переносятся основные результаты Пойа [1] на более широкий класс последовательностей. Утверждение теоремы 2 является обобщением соответствующего результата Пойа [1].

Будем рассматривать последовательности Λ, члены λ_n которых удовлетворяют условию

$$\lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n \geqslant 0, \quad \lambda_n \to \infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Запись $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ означает, что последовательность Λ_1 является подпоследовательностью последовательности Λ_2.

Пусть $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Обозначим $r^{\rho(r)} = V(r)$. Функцию $V(r)$ можно представить в виде $V(r) = r^\rho L(r)$, где $L(r)$ — медленно возрастающая функция. При $r \to \infty$ выполняется $V(r) \to \infty$. Можно считать [3], что $t = V(r)$ — строго монотонно возрастающая функция на $[0, \infty]$. Следовательно, существует однозначная обратная функция $r = V^{-1}(t)$, которая также стремится к бесконечности при $t \to \infty$.

Верхней $\rho(r)$-плотностью последовательности Λ по базису $\xi \in [0, 1)$ назовем величину

$$D(\xi) = D_\Lambda(\xi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - \xi^\rho V(r)}, \tag{1. 1}$$

нижней $\rho(r)$-плотностью по базису $\xi \in [0, 1)$ — величину

$$d(\xi) = d_\Lambda(\xi) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - \xi^\rho V(r)}, \tag{1. 2}$$

где $n(r) = n_\Lambda(r)$ — число членов последовательности Λ, попадающих в промежуток $[0, r]$.

Заметим, что определения (1. 1) и (1. 2) эквивалентны определениям

$$D(\xi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - V(r\xi)};$$

$$d(\xi) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - V(r\xi)}.$$

Это вытекает из равенства

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r) - V(r\xi)}{V(r)(1 - \xi^\rho)} = \lim_{r\to\infty} \frac{L(r) - \xi^\rho L(r\xi)}{L(r)(1 - \xi^\rho)} = 1.$$

Максимальной $\rho(r)$-плотностью последовательности назовем величину

$$D = \sup_{0<\xi<1} D(\xi), \tag{1. 3}$$

минимальной $\rho(r)$-плотностью — величину

$$d = \inf_{0<\xi<1} d(\xi). \tag{1. 4}$$

Всюду далее будем предполагать $D < \infty$.

Докажем, что

$$D = \lim_{\xi\to 1} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - \xi^\rho V(r)}, \tag{1. 5}$$

$$d = \lim_{\xi\to 1} \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\xi)}{V(r) - \xi^\rho V(r)}. \tag{1. 6}$$

Пойа доказал это при $\rho(r) \equiv 1$ (см. также [2]). Для $\rho(r) \not\equiv 1$ доказательство этого факта сводится к случаю $\rho(r) \equiv 1$, что видно из следующей теоремы.

Теорема 1. *Если последовательность Λ_ρ состоит из членов $\lambda_n' = V(\lambda_n)$, $\lambda_n \in \Lambda$, то величины $D_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right)$ и $d_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right)$ будут для нее соответственно верхней и нижней 1 — плотностями по базису $\xi \in [0, 1)$.*

Доказательство. Легко проверить, что $n_\Lambda(r) = n_{\Lambda_\rho}(V(r))$. Тогда

$$\frac{n_{\Lambda_\rho}(V(r)) - n_{\Lambda_\rho}(V(r)\xi)}{V(r) - \xi V(r)} = \frac{n_\Lambda(r) - n_\Lambda\{V^{-1}(\xi V(r))\}}{V(r) - \xi V(r)} =$$

$$= \frac{n_\Lambda(r) - n_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}} r\right)}{V(r) - \xi V(r)} + \frac{1}{1-\xi}\,\frac{n_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}} r\right) - n_\Lambda\{V^{-1}(\xi V(r))\}}{V(r)}. \tag{1.7}$$

Покажем, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}} r\right) - n_\Lambda\{V^{-1}(\xi V(r))\}}{V(r)} = 0. \tag{1.8}$$

Для $\xi = 0$ это равенство очевидно. Пусть $\xi > 0$. В силу известных свойств медленно возрастающих функций для всякого η, $2^{-\rho} < \eta < 1$ найдется такое r_0, что для всех $r > r_0$ неравенства

$$\eta < \frac{L(r)}{L(\alpha r)} < \frac{1}{\eta} \tag{1.9}$$

выполняются равномерно на промежутке $\frac{\xi^{\frac{1}{\rho}}}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\xi^{\frac{1}{\rho}}$.

Следовательно, уравнение

$$\frac{L(r)}{L(\alpha r)} = \frac{\alpha^\rho}{\xi} \tag{1.10}$$

имеет хотя бы одно решение $\alpha = \alpha(r)$. Но уравнение (1.10) эквивалентно уравнению $\xi r^\rho L(r) = \alpha^\rho r^\rho L(\alpha r)$ или $V^{-1}(\xi V(r)) = \alpha r$, откуда

$$\alpha(r) = \frac{V^{-1}(\xi V(r))}{r}.$$

Таким образом, при $r > r_0$ уравнение (1.10) определяет однозначную и непрерывную функцию $\alpha(r)$, причем из (1.9) и (1.10) следует, что $(r > r_0)$

$$\eta < \frac{\alpha^\rho(r)}{\xi} < \frac{1}{\eta}, \qquad \text{или} \qquad \eta^{\frac{1}{\rho}} < \frac{\alpha(r)}{\xi^{\frac{1}{\rho}}} < \eta^{-\frac{1}{\rho}}$$

Следовательно, $(r > r_0)$

$$\frac{\left| n\left(\xi^{\frac{1}{\rho}} r\right) - n\{V^{-1}(\xi V(r))\}\right|}{V(r)} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\eta^2)\,\frac{n\left(r\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right) - n\left(r(\xi\eta)^{\frac{1}{\rho}}\right)}{V\left(r\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)(1-\eta^2)}\;\frac{V\left(r\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)}{V(r)}.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\left| n\left(\xi^{\frac{1}{\rho}} r\right) - n\{V^{-1}(\xi V(r))\}\right|}{V(r)} \leqslant (1-\eta^2)\frac{\xi}{\eta} D.$$

Так как η можно взять произвольно близко к единице, то из последнего неравенства вытекает (1. 8). Переходя в (1. 7) к верхнему и нижнему пределам при $r \to \infty$ и используя соотношение (1. 8), получим

$$D_{\Lambda_\rho}(\xi) = D_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right), \quad d_{\Lambda_\rho}(\xi) = d_\Lambda\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Теорема 2. *Функции* $D(\xi)$ *и* $d(\xi)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$d \leqslant d(\xi) \leqslant d(0) \leqslant D(0) \leqslant D(\xi) \leqslant D. \tag{1. 11}$$

Функции $(1-\xi)D\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right)$ *и* $(1-\xi)d\left(\xi^{\frac{1}{\rho}}\right)$ *невозрастающие и обе они удовлетворяют условию* $\mathrm{Lip}\,1$ *при* $0 \leqslant \xi < 1$.

Доказательство. Пусть $\rho(r) \equiv 1$. Для $0 \leqslant \xi < \eta < 1$ справедливо тождество (см. [1])

$$(1-\xi)\frac{n(r)-n(r\xi)}{r(1-\xi)} = (1-\eta)\frac{n(r)-n(r\eta)}{r(1-\eta)} + \\ + (\eta-\xi)\frac{n(r\eta)-n\left(r\eta\cdot\frac{\xi}{\eta}\right)}{r\eta\left(1-\frac{\xi}{\eta}\right)}. \tag{1. 12}$$

Полагая в нем $\xi = 0$ и переходя к верхнему, а затем нижнему пределам, получаем (1. 11). Учитывая, что второе слагаемое в правой части (1. 12) положительно, находим

$$(1-\xi)D(\xi) \geqslant (1-\eta)D(\eta),$$

а также в силу свойств верхнего и нижнего пределов

$$(\eta-\xi)d\left(\frac{\xi}{\eta}\right) + (1-\eta)D(\eta) \leqslant (1-\xi)D(\xi) \leqslant \\ \leqslant (1-\eta)D(\eta) + (\eta-\xi)D\left(\frac{\xi}{\eta}\right),$$

откуда

$$(\eta-\xi)d\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \leqslant (1-\xi)D(\xi) - (1-\eta)D(\eta) \leqslant \\ \leqslant (\eta-\xi)D\left(\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Так как $D\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \leqslant D$, то отсюда следует утверждение теоремы 2 для функции $D(\xi)$ при $\rho(r) \equiv 1$. Свойства $d(\xi)$ получаются из тождества (1. 12) аналогично. Чтобы убедиться в справедливости теоремы 2 для $\rho(r) \not\equiv 1$, достаточно сослаться на теорему 1.

Если $D = d = \delta$, то последовательность Λ называется измеримой. В этом случае в силу (1. 11) $D(0) = d(0)$, т. е. существует предел $\lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}n(r) = \delta$. Наоборот, если существует этот предел, то для любого $\xi \in [0, 1)$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)-n(r\xi)}{V(r)-\xi^\rho V(r)} = \\ = \frac{1}{1-\xi^\rho}\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{n(r)}{V(r)} - \frac{V(r\xi)}{V(r)}\,\frac{n(r\xi)}{V(r\xi)}\right\} = \delta$$

и $D = d = \delta$. Число δ называется $\rho(r)$-плотностью последовательности Λ.

Суммой двух последовательностей Λ, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ и Λ' $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \lambda_3' \leqslant \ldots$ называется последовательность $\Lambda'' = \Lambda + \Lambda_1$, $\lambda_1'' \leqslant \lambda_2'' \leqslant \lambda_3'' \leqslant \ldots$, состоящая из всех чисел λ_k и λ_k', причем если число $\lambda_k = \lambda_m'$ входило в последовательность Λ ν раз, а в последовательность Λ' μ раз, то оно входит в последовательность Λ'' ровно $\nu + \mu$ раз. Сложение коммутативно и ассоциативно. Разностью $\Lambda'' = \Lambda - \Lambda'$ последовательности Λ и ее подпоследовательности Λ' называется такая последовательность Λ'', что $\Lambda' + \Lambda'' = \Lambda$. Легко проверить, что

$$n_{\Lambda+\Lambda'}(r) = n_\Lambda(r) + n_{\Lambda'}(r). \tag{1.13}$$

Сформулируем теперь теорему 3.

Теорема 3. (*Теорема Пойа* [1] *об измеримом ядре и измеримой оболочке*). *Если максимальная $\rho(r)$-плотность последовательности Λ равна $D < \infty$, а минимальная — d, $0 \leqslant d \leqslant D$, то существует измеримая последовательность $\Lambda' \subset \Lambda$, $\rho(r)$ — плотность которой равна d, и измеримая последовательность $\Lambda'' \supset \Lambda$, $\rho(r)$-плотность которой равна D.*

Эта теорема доказана Пойя при $\rho(r) \equiv 1$ и дополнительном условии $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \gamma > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Используя теорему 2 и повторяя с незначительными изменениями доказательство Пойя, мы получим теорему 3 при $\rho(r) \equiv 1$ без этого дополнительного условия. На основании теоремы 1 общий случай $\rho(r) \not\equiv 1$ сводится к случаю $\rho(r) \equiv 1$.

Последовательности Λ' и Λ'' называются соответственно измеримым ядром и измеримой оболочкой.

Следствие. В условиях теоремы 3 справедливы равенства

$$D_{\Lambda-\Lambda'} = D_{\Lambda''-\Lambda} = D - d, \quad d_{\Lambda-\Lambda'} = d_{\Lambda''-\Lambda} = 0. \tag{1.14}$$

Действительно, в силу (1.13) $n_{\Lambda-\Lambda'} = n_\Lambda - n_{\Lambda'}$, $n_{\Lambda''-\Lambda} = n_{\Lambda''} - n_\Lambda$. Разделив эти равенства на $V(r)$, перейдя к верхнему и нижнему пределам и учитывая равенства

$$\overline{\lim}(\varphi + \psi) = \overline{\lim}\,\varphi + \lim\psi,$$
$$\underline{\lim}(\varphi + \psi) = \underline{\lim}\,\varphi + \lim\psi,$$

если $\lim\psi$ существует, получаем (1.13).

§ 2. Точные оценки для индикаторов целых функций нецелого порядка с положительными нулями

1°. Предварительные замечания. Формулировки результатов.

Всюду в этом параграфе будем предполагать $\rho \neq [\rho]$. Максимальной (минимальной) плотностью нулей целой функции $f(z)$ порядка ρ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$, будем называть максимальную (минимальную) $\rho(r)$-плотность последовательности модулей ее нулей. Через $G(\rho(r), D, d)$, $0 \leqslant d \leqslant D < \infty$, обозначим класс целых функций $f(z)$ конечного порядка ρ, нули которых положительны, причем минимальная плотность нулей относительно $\rho(r)$ не меньше числа d, а максимальная не превосходит числа D. Через $E(u) = E(u, p)$ обозначим первычный множитель Вейерштрасса рода $p = [\rho]$. Положим

$$a^+ = \max(a, 0), \quad a^- = \max(-a, 0).$$

Теорема 4. *Для всякой целой функции $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$ нецелого порядка ρ выполняются неравенства*

$$\rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \left\{ d \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| - D \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \right\} dt \leqslant \underline{h}(\varphi; f) \leqslant$$

$$\leqslant h(\varphi; f) \leqslant \rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \left\{ D \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| - d \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \right\} dt \qquad (2.1)$$

для всех $0 < \varphi < 2\pi$, причем правое неравенство справедливо и при $\varphi = 0$. При этом существуют функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из класса $G(\rho(r), D, d)$ такие, что

$$h(\varphi; f_1) = \rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \left\{ D \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| - d \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \right\} dt \qquad (2.2)$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$ и

$$\underline{h}(\varphi; f_2) = \rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \left\{ d \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| - D \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \right\} dt \qquad (2.3)$$

для всех $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Теорема 5. *Для всякой целой функции $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$ нецелого порядка ρ выполняются неравенства*

$$h(\varphi; f) \geqslant \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left\{ \frac{D+d}{2} \cos \rho(\varphi - \pi) - (-1)^p \frac{D-d}{2} |\cos \rho(\varphi - \pi)| \right\}, \qquad (2.4)$$

$$\underline{h}(\varphi; f) \leqslant \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left\{ \frac{D+d}{2} \cos \rho(\varphi - \pi) + (-1)^p \frac{D-d}{2} |\cos \rho(\varphi - \pi)| \right\} \qquad (2.4')$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$, $p = [\rho]$.

Для фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ можно указать целые функции $f_3(z)$ и $f_4(z)$ с положительными нулями, имеющими плотность δ, $d \leqslant \delta \leqslant D$, такие, что

$$h(\varphi; f_3) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left\{ \frac{D+d}{2} \cos \rho(\varphi - \pi) - (-1)^p \frac{D-d}{2} |\cos \rho(\varphi - \pi)| \right\} \qquad (2.5)$$

и

$$\underline{h}(\varphi; f_4) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left\{ \frac{D+d}{2} \cos \rho(\varphi - \pi) + (-1)^p \frac{D-d}{2} |\cos \rho(\varphi - \pi)| \right\}. \qquad (2.5')$$

Обозначим далее

$$m(\varphi, \rho, D, d) = \rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \left\{ D \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| - d \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \right\} dt,$$

$$m(\varphi, \rho, D, 0) = m(\varphi, D), \quad m(\varphi, \rho, d, D) = \boldsymbol{m}(\varphi).$$

Следствие 1. *Функции из класса $G(\rho(r), D, d)$ удовлетворяют условию А. Ф. Леонтьева* [11]

$$\inf_{0<\varphi<2\pi} h(\varphi; f) > -\infty. \qquad (2.6)$$

Более того, при $\rho = \frac{1}{2}$ мы можем найти значение

$$C = \inf_{f \in G(\rho(r), D, d)} C_f, \quad \text{где } C_f = \inf_{0<\varphi<2\pi} h(\varphi; f).$$

Действительно, можно показать, что в этом случае $m(0) = \inf\limits_{0<\varphi<2\pi} m(\varphi)$. Но

$$m(0) = \frac{d}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left|1-\frac{1}{t}\right| dt + \frac{D}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left|1-\frac{1}{t}\right| dt =$$

$$= d\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)} + \text{v. p.}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)} = 2(d-D)\ln(\sqrt{2}+1) = C.$$

И. Ф. Красичков [12] показал, что для выполнения условия (2.6), где $f(z)$ — произвольная целая функция конечного порядка ρ необходимо и достаточно, чтобы последовательность нулей функции $f(z)$ имела конечный индекс концентрации, который в случае, когда $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$, определяется как

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\rho(x)}} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(x)}{\sigma} d\sigma,$$

где $n_\sigma(x)$ — число нулей функции $f(z)$ на отрезке $[x-\sigma x,\ x+\sigma x]$. Отсюда и из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Последовательности нулей целых функций из класса $G(\rho(r), D, d)$ обладают конечным индексом концентрации.*

Этот факт впервые отмечен И. Ф. Красичковым в [12]. Кроме того, там же указывается, что неравенство $I < \infty$ не влечет за собой, вообще говоря, неравенства $D < \infty$.

2°. Доказательство теоремы 4.

Всюду далее будем предполагать $0 < \varphi < 2\pi$. Справедливость результатов для $h(\varphi; f)$ при $\varphi = 0$ будет следовать по непрерывности. Не уменьшая общности, можем считать (см. [4]), что функция $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$ при нецелом ρ представима в виде

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_k}, p\right), \quad \lambda_1 > 0, \quad p = [\rho].$$

Отсюда (см., например, [4])

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{re^{i\varphi}}{\lambda_k}\right)\right| =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{re^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(t) = \int\limits_0^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt). \quad (2.7)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Можно считать, что неравенство $n(r) \leqslant (D+\varepsilon)V(r)$ справедливо для всех $r > 0$, чего можно добиться, разделив функцию $f(z)$ на подходящий многочлен. Это не повлияет на индикатор.

Мы будем использовать одно свойство уточненного порядка $\rho(r)$, доказанное в [4, стр. 171]: можно считать, что для всех $0 < r < \infty$ выполняется неравенство

$$\frac{(rt)^{\rho(rt)}}{r^{\rho(r)}} \leqslant \begin{cases} t^{\rho+\sigma} & \text{при} \quad 1 \leqslant t < \infty, \\ t^{\rho-\sigma} & \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $0<\sigma<\min(\rho-p, p+1-\rho)$, $p=[\rho]$. Известно [3], что первичный множитель Вейерштрасса рода p удовлетворяет следующим неравенствам:

$$|\ln|E(ue^{i\varphi})|| \leqslant Cu^{p+1} \quad \text{при} \quad 0<u\leqslant\frac{1}{2},$$

$$|\ln|E(ue^{i\varphi})|| \leqslant Cu^{p} \quad \text{при} \quad u\geqslant 2,$$

если $p>0$ и

$$|\ln|E(ue^{i\varphi})|| \leqslant \ln(1+|u|) \quad \text{для} \quad p=0, \quad u\geqslant 2.$$

Здесь $C=C(p)$ — некоторая постоянная.

Для всякого $\varepsilon>0$ найдутся такие числа $a=a(\varepsilon)<\frac{1}{2}$, $A=A(\varepsilon)>2$ и $r_0=r_0(\varepsilon)$, что при $r>r_0$ выполняются неравенства

$$\left|\int_0^a \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}V(r), \tag{2.8}$$

$$\left|\int_A^\infty \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt)\right| < \frac{\varepsilon}{2}V(r). \tag{2.8'}$$

Действительно,

$$\left|\int_0^a \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt)\right| \leqslant C\int_0^a \frac{1}{t^p}\,dn(rt) =$$

$$= C\left\{\frac{n(ra)}{a^p}+p\int_0^a \frac{n(rt)}{t^{p+1}}\,dt\right\} \leqslant C(D+\varepsilon)V(r)\left\{a^{\rho-\sigma-p}+\right.$$

$$\left.+p\int_0^a \frac{t^{\rho-\sigma}}{t^{p+1}}\,dt\right\} = a^{\rho-\sigma-p}C(D+\varepsilon)V(r)\left(1+\frac{p}{\rho-\sigma-p}\right).$$

Отсюда следует неравенство (2.8) для $p>0$. В случае, когда $p=0$ это неравенство доказывается аналогично. Неравенство (2.8′) доказывается сходными выкладками. Тогда из (2.7) и свойств аддитивности интеграла Римана — Стильтьеса для непрерывной функции следует, что для $r>r_0$ выполняется равенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \int_0^a \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt) +$$

$$+\int_a^A+\int_A^\infty \leqslant \int_a^A \ln^+\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dn(rt) + \varepsilon V(r). \tag{2.9}$$

Для некоторого $\xi<1$ положим $t_k=\frac{a}{\xi^k}$ и оценим интеграл в правой части (2.9) суммой Дарбу — Стильтьеса:

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} M_k\{n(rt_k)-n(\xi rt_k)\}+\tilde{M}(A-t_{m-1})+$$

$$+\varepsilon V(r) \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_k\{n(rt_k)-n(\xi rt_k)\}+\varepsilon V(r), \tag{2.10}$$

где

$$M_k = \max_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right|, \quad t_{k-1} = \xi t_k,$$

$$\tilde{M} = \max_{t_{m-1} \leqslant t \leqslant A} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right|,$$

а m — такое целое число, что $\frac{a}{\xi^{m-1}} \leqslant A < \frac{a}{\xi^m}$. Разделим неравенство (2.10) на $V(r)$ и перейдем к верхнему пределу, когда $r \to \infty$. Тогда

$$h(\varphi; f) \leqslant \overline{\lim_{r \to \infty}} \sum_{k=1}^{m} M_k \frac{n(rt_k) - n(r\xi t_k)}{V(rt_k)(1-\xi^\rho)} \frac{V(rt_k)}{V(r)}(1-\xi^\rho) +$$

$$+ \varepsilon \leqslant D(\xi) \sum_{k=1}^{m} M_k t_k^\rho (1-\xi^\rho) + \varepsilon \leqslant D(\xi) \{ \sum_{k=1}^{m-1} M_k (t_k^\rho - t_{k-1}^\rho) +$$

$$+ \tilde{M}(A^\rho - t_{m-1}^\rho) + M_m (t_m^\rho - t_{m-1}^\rho) + \varepsilon.$$

Устремляя ξ к единице и учитывая, что $t_m^\rho - t_{m-1}^\rho \to 0$, получаем в силу совпадения в нашем случае интегралов Дарбу — Стильтьеса и Римана — Стильтьеса, что

$$h(\varphi; f) \leqslant D \int_a^A \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt^\rho + \varepsilon,$$

откуда следует

$$h(\varphi; f) \leqslant D\rho \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt.$$

Если $d = 0$, то тем самым доказана правая часть неравенства (2.1). Если $d > 0$, то мы используем теорему 3. Через Λ обозначим последовательность нулей функции $f(z)$. Пусть D_1 — максимальная $\rho(r)$-плотность этой последовательности, $D_1 \leqslant D$, d_1 — минимальная $\rho(r)$-плотность, $d_1 \geqslant d$. Через Λ' обозначим измеримое ядро последовательности Λ и построим каноническое произведение $g_1(z)$ рода $p = [\rho]$ с нулями во всех точках вида $\lambda'_n \in \Lambda'$. Тогда известно [3], что функция $g_1(z)$ порядка ρ и

$$h(\varphi; g_1) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln |g_1(re^{i\varphi})|}{V(r)} = \rho d_1 \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt.$$

Для функции $g(z) = \frac{f(z)}{g_1(z)}$ последовательностью нулей будет последовательность $\Lambda - \Lambda'$, имеющая на основании следствия из теоремы 4 (равенство (1.14)) максимальную $\rho(r)$-плотность $D_1 - d_1$, и из только что проведенного доказательства следует, что

$$h(\varphi; g) \leqslant \rho(D_1 - d_1) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt.$$

Справедливы равенства

$$h(\varphi; f) = h(\varphi; g_1) + h(\varphi; g), \quad \underline{h}(\varphi; f) = h(\varphi; g_1) + \underline{h}(\varphi; g).$$

Таким образом,

$$h(\varphi; f) \leqslant \rho d_1 \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt +$$

$$+ \rho (D_1 - d_1) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho D_1 \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt - \rho d_1 \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| dt \leqslant m(\varphi, \rho, D, d).$$

Тем самым правая часть неравенства (2.1) доказана. Для доказательства левой части этого неравенства заметим, что $-\underline{\lim}\, F = \overline{\lim}\,(-F)$. Находя оценку сверху для $-\ln|f(re^{i\varphi})|$, как выше, мы получим оценку сверху для $-\underline{h}(\varphi; f)$, т. е. снизу для $\underline{h}(\varphi; f)$. Используя затем теорему 3, получим левую часть неравенства (2.1). Построение примера целой функции $f_1(z)$ с экстремальным индикатором проводится аналогично построению подобных примеров в [3, стр. 331—332; 4—10, 13].

Проинтегрировав в (2.7) по частям, получим

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \int_0^\infty K(t, \varphi)\, n(rt)\, dt,$$

где

$$K(t, \varphi) = -\frac{d}{dt} \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right) \right| = \frac{1}{t^{p+1}} \frac{\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}.$$

Через $\Phi_i(-)$ ($\Phi_i(+)$) обозначим множество тех φ, для которых ядро $K(t, \varphi)$, $0 < t < \infty$, i раз меняет знак на $(0, \infty)$, $i = 0, 1$ и отрицательно (положительно) в окрестности точки $t = 0$. Через $c(\varphi)$ обозначим положительный нуль ядра $K(t, \varphi)$ как функции от t, $c(\varphi) = \cos p\varphi \cos^{-1}(p+1)\varphi$, через $e_0(\varphi)$ — положительный нуль функции $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|$. Известно [4], что $c(\varphi)$ и $e_0(\varphi)$ определены для одних и тех же значений φ, т. е. для $\varphi \in \Phi_1(\pm)$, и справедливо неравенство $e_0(\varphi) < c(\varphi)$. Для простоты выкладок предположим, что $\rho(r) \equiv \rho$.

Пусть $\{p_j\}$ — строго монотонно возрастающая последовательность, такая, что $p_1 > 0$, $p_{j+1}/p_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Построим каноническое произведение $\tilde{f}_1(z)$ рода $p = [\rho]$ с простыми нулями во всех точках вида $\left(\frac{n}{\Delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, $\Delta > 0$, попадающих в интервалы (p_{2k}, p_{2k+1}). Рассмотрим интервал $[r\xi, r]$. В случае, когда каждая точка вида $\left(\frac{n}{\Delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ из этого интервала является нулем функции $\tilde{f}_1(z)$, имеем $n(r) - n(r\xi) = [\Delta r^\rho] - [\Delta(r\xi)^\rho]$, в противном случае число нулей функции $\tilde{f}_1(z)$, попадающих в этот интервал, будет меньшим. Во всяком случае

$$n(r) - n(r\xi) \leqslant \Delta r^\rho - \Delta(r\xi)^\rho + 1, \quad 0 \leqslant \xi < 1. \tag{2.11}$$

Отсюда, в частности, следует, что функция $\tilde{f}_1(z)$ не выше порядка ρ и нормального типа. Нетрудно проверить, что максимальная ρ-плотность последовательности ее нулей равна Δ, а минимальная — нулю. Укажем теперь такую последовательность $r_k = r_k(\varphi) \to \infty$, чтобы

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln|\tilde{f}_1(r_k(\varphi)e^{i\varphi})|}{r_k^{\rho}(\varphi)} \geqslant m(\varphi, \Delta). \tag{2.12}$$

Положим

$$r_k = r_k(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{p_{2k}p_{2k+1}}, & \varphi \in \Phi_0(+); \\ \sqrt{p_{2k-1}p_{2k}}, & \varphi \in \Phi_0(-); \\ p_{2k}e_0^{-1}(\varphi), & \varphi \in \Phi_1(-); \\ p_{2k+1}e_0^{-1}(\varphi), & \varphi \in \Phi_1(+). \end{cases}$$

Запишем

$$\ln|\tilde{f}_1(r_k e^{i\varphi})| = \int\limits_0^{\frac{p_{2k-1}}{r_k}} n(r_k t) K(t, \varphi)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{p_{2k-1}}{r_k}}^{\frac{p_{2k}}{r_k}} + \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} + \int\limits_{\frac{p_{2k+1}}{r_k}}^{\infty} = I_k^{(1)} + I_k^{(2)} + I_k^{(3)} + I_k^{(4)}.$$

Как и в [4, стр. 175], с учетом неравенства (2.11) при $\xi = 0$ показывается, что выполняется

$$I_k^{(1)} = o(r_k^{\rho}), \quad I_k^{(2)} = o(r_k^{\rho}), \quad I_k^{(4)} = o(r_k^{\rho}).$$

Третий интеграл $I_k^{(3)}$ оценим снизу. Заметим, что при $p_{2k} < r < p_{2k+}$ выполняется $\Delta r^{\rho} + n(p_{2k}) - \Delta p_{2k}^{\rho} - 1 \leqslant n(r) = n(p_{2k}) + [\Delta r^{\rho}] - [\Delta p_{2k}^{\rho}] \leqslant \leqslant \Delta r^{\rho} + n(p_{2k}) - \Delta p_{2k}^{\rho} + 1$. Отсюда

$$I_k^{(3)} \geqslant \Delta r_k^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} t^{\rho} K(t, \varphi)\, dt - \{\Delta p_{2k}^{\rho} -$$

$$- n(p_{2k})\} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} K(t, \varphi)\, dt - \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} |K(t, \varphi)|\, dt. \tag{2.13}$$

Для последнего интеграла в этом неравенстве справедлива оценка

$$\int\limits_{\frac{p_{2^k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} |K(t, \varphi)|\, dt = \left(\frac{r_k}{p_{2k}}\right)^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} \left(\frac{p_{2k}}{r_k}\right)^{\rho} |K(t, \varphi)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r_k}{p_{2k}}\right)^{\rho} \int\limits_0^{\infty} t^{\rho} |K(t, \varphi)|\, dt = o(r_k^{\rho}).$$

Пусть $\varphi \in \Phi_1(-)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} K(t, \varphi)\,dt = \int\limits_{e_0(\varphi)}^{\infty} K(t, \varphi)\,dt = 0.$$

Таким образом, для этих φ выполняется

$$I_k^{(5)} = \{\Delta p_{2k}^{\rho} - n(p_{2k})\} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} K(t, \varphi)\,dt = o(r_k^{\rho}).$$

Пусть теперь $\varphi \in \Phi_0(+) \cup \Phi_1(+)$. Тогда

$$|I_k^{(5)}| \leqslant \Delta p_{2k}^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} |K(t, \varphi)|\,dt \leqslant M(\varphi)\,\Delta p_{2k}^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{1} t^{-p-1}dt + 0(p_{2k}^{\rho}),$$

где $M(\varphi) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} t^{p+1}|K(t, \varphi)|$. При $p \geqslant 1$ получаем оценку $|I_k^{(5)}| \leqslant \leqslant \Delta M(\varphi)\, r_k^{\rho} p_{2k}^{\rho-p} + O(p_{2k}^{\rho})$, а при $p = 0$ — оценку $|I_k^{(5)}| \leqslant \Delta M(\varphi)\, p_{2k}^{\rho} \ln \frac{r_k}{p_{2k}} + O(p_{2k}^{\rho})$. При $\varphi \in \Phi_0(-)$ выполняется $I_k^{(5)} \leqslant 0$. Подставляя в эти неравенства значение $r_k(\varphi)$, $\varphi \in \Phi_0(+) \cup \Phi_1(+)$, имеем $I_k^{(5)} = o(r_k^{\rho})$ и из (2.13) для $I_k^{(3)}$ находим оценку

$$I_k^{(3)} \geqslant \Delta r_k^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{2k}}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}}{r_k}} t^{\rho} K(t, \varphi)\,dt + o(r_k^{\rho}), \quad \varphi \,\overline{\in}\, \Phi_0(-).$$

Из найденных оценок легко получается неравенство (2.12), так как из последних неравенств сразу следует, что

$$\varliminf_{k\to\infty} r_k^{-\rho} I_k^{(3)} \geqslant \begin{cases} \Delta \int\limits_0^{\infty} t^{\rho} K(t, \varphi), & \varphi \in \Phi_0(+); \\ 0, & \varphi \in \Phi_0(-); \\ \Delta \int\limits_0^{e_0(\varphi)} t^{\rho} K(t, \varphi)\,dt, & \varphi \in \Phi_1(+); \\ \Delta \int\limits_{e_0(\varphi)}^{\infty} t^{\rho} K(t, \varphi)\,dt, & \varphi \in \Phi_1(-), \end{cases} \tag{2.12'}$$

а правая часть неравенства (2.12′) после интегрирования по частям дает $m(\varphi, \Delta)$. Объединяя (2.1) при $D = \Delta$, $d = 0$, с (2.12) имеем $h(\varphi; f_1) = m(\varphi, \Delta)$.

Пусть $f_1(z) = \psi(z)\tilde{f}_1(z)$, где $\psi(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса рода $p = [\rho]$ с ρ-плотностью нулей, равной d. Тогда при $\Delta = D - d$ получим

$$h(\varphi;\ f_1) = h(\varphi;\ \psi) + h(\varphi;\ \tilde{f}_1) = \rho d\int\limits_0^\infty t^{\rho-1}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dt +$$
$$+ m(\varphi,\ \rho,\ D-d,\ 0) = m(\varphi,\ \rho,\ D,\ d),$$

т. е. равенство (2.2). При этом из (1.13) вытекает, что $f_1 \in G(\rho, D, d)$. Обозначим последовательность нулей функции $f_1(z)$ через Λ, и пусть Λ'' — измеримая оболочка. Каноническое произведение с нулями из Λ'' обозначим через $\varkappa(z)$, $\tilde{f}_2(z) = f_1^{-1}(z)\varkappa(z)$. Тогда

$$\tilde{f}_2(z) \in G(\rho,\ D-d,\ 0) \quad \text{и} \quad h(\varphi;\ \tilde{f}_2) = h(\varphi;\ \varkappa) - h(\varphi;\ f_1) = m(\varphi,\ D-d).$$

Теперь, чтобы получить функцию $f_2(z)$, для которой бы выполнялось равенство (2.3), достаточно домножить $\tilde{f}_2(z)$ на некоторое каноническое произведение Вейерштрасса рода $p = [\rho]$ с ρ — плотностью нулей, равной d. На основании равенств (1.14) имеем $f_2(z) \in G(\rho, D, d)$. Этим заканчивается доказательство теоремы 5.

3°. Оценки снизу для индикаторов целых функций нецелого порядка. В этом пункте мы докажем теорему 5 Вместо $d(0)$ и $D(0)$ употребим обозначения $d(0; f)$ и $D(0; f)$.

Будем использовать неравенства [8, стр. 414]

$$h(\varphi;\ f) \geqslant \frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} d(0;\ f), \tag{2.14}$$

если $\pi\cos\rho(\varphi-\pi)\operatorname{cosec}\pi\rho > 0$,
и

$$h(\varphi;\ f) \geqslant \frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} D(0;\ f), \tag{2.15}$$

если $\pi\cos\rho(\varphi-\pi)\operatorname{cosec}\pi\rho < 0$, которые справедливы для целых функций нецелого порядка ρ. Они получены в [8] как следствие одного результата И. В. Островского [14 неравенство (1), стр. 24]. Из неравенства (2.14) получаем, что для всякой целой функции $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$ выполняется

$$h(\varphi;\ f) \geqslant \frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} \inf_{f\in G(\rho,\ D,\ d)} d(0;\ f) = \frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} d, \tag{2.14'}$$

если $\pi\cos\rho(\varphi-\pi)\operatorname{cosec}\pi\rho > 0$. Из неравенства (2.15) аналогичным образом находим

$$h(\varphi;\ f) \geqslant \frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} D, \tag{2.15'}$$

если $\pi\cos\rho(\varphi-\pi)\operatorname{cosec}\pi\rho \leqslant 0$. Неравенства (2.14′) и (2.15′) эквивалентны неравенству (2.4). Неравенство (2.4′) может быть получено из следствия 4 статьи [8] или из неравенства (1) статьи [14] аналогичным образом. Функции $f_3(z)$ и $f_4(z)$, для которых бы выполнялись равенства (2.5) и (2.5′) соответственно, можно выбрать среди хорошо известных целых функций с плотностью нулей δ [3, стр. 88; 8, стр. 413].

§ 3. Целые функции целого порядка

Пусть теперь ρ — целое число; $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок; $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Следуя А. А. Гольдбергу [7], мы будем говорить, что $\rho(r)$ принадлежит классу сходимости ($\rho(r) \in C$) или расходимости ($\rho(r)\in\mathfrak{D}$) в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int\limits_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}dt$. Уточненные порядки $\rho_j(r)$, $\rho_j(r)\underset{r\to\infty}{\to}\rho$ и функции $V_j(r)$, $V(r)$, $j=1, 2, 3$ определяются равенствами

$$r^{\rho(r)}=V(r),\ r^{\rho}=r^{\rho_3(r)}=V_3(r),\ \text{при}\ \rho(r)\in\mathfrak{D},$$

$$r^{\rho}\int\limits_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}dt=r^{\rho_1(r)}=V_1(r),$$

при $\rho(r)\in C$

$$r^{\rho}\int\limits_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}dt=r^{\rho_2(r)}=V_2(r).$$

Через $G(\rho(r), D, d)$ обозначим класс целых функций с положительными нулями $\lambda_n\in\Lambda$ целого порядка ρ, максимальная $\rho(r)$-плотность нулей которых не превосходит числа $D<\infty$, а минимальная не меньше числа $d\leqslant D$. Если $f(z)\in G(\rho(r)D, d)$ и $\rho(r)\in C$, то функция $f(z)$ представима в виде [7, стр. 433]

$$f(z)=\exp\{\alpha z^{\rho}+p(z)\}\prod_n E\left(\frac{z}{\lambda_n},\ \rho-1\right),$$

где $\alpha=\alpha(f)$ — постоянная; $P(z)$ — многочислен степени не выше $\rho-1$. Будем рассматривать следующие индикаторы функции $f(z)$:

$$h_j(\varphi; f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,V_j^{-1}(r)\ln|f(re^{i\varphi})|,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Нижеследующая теорема 6 является аналогом следствия 3 из [7].

Теорема 6. *Если $f(z)\in G(\rho(r), D, d)$, то при $\rho(r)\in\mathfrak{D}$*

$$\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi-\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|\leqslant h_1(\varphi; f)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi+\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|, \tag{3.1}$$

а при $\rho(r)\in C$ и $\alpha=0$

$$-\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi-\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|\leqslant h_2(\varphi; f)\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi+\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|, \tag{3.2}$$

при $\rho(r)\in C$ и $\alpha\neq 0$

$$h_3(\varphi; f)=|\alpha|\cos(\rho\varphi+\arg\alpha). \tag{3.3}$$

Существует целая функция $f(z)$ с положительными нулями и с $D(f)=D$, $d(f)=d$, такая, что при

$$h_1(\varphi; f)\equiv\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi+\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|, \tag{3.4}$$

а при $\rho(r)\in C$ и $\alpha=0$*—такая, что*

$$h_2(\varphi; f)\equiv-\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi+\frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi|. \tag{3.5}$$

Нужно еще проверить, что

$$\lim_{s\to\infty}\sup_i \theta^i \frac{1}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}=0. \tag{24}$$

Пусть $\varepsilon>0$. При фиксированном i

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\theta^i}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}=0.$$

Выберем натуральное i_0 так, чтобы $2\theta^{i_0}<\varepsilon$ и находим $s_1(\varepsilon)$ такой, что $\max\limits_i i\theta^i s^{-1}+\theta^{i_0}<\varepsilon$ при $s>s_1(\varepsilon)$. Тогда

$$\sup_{i\geqslant i_0}\frac{\theta^i}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}\leqslant\sup_{i\geqslant i_0}\frac{\theta^i}{s(i+s)^{-1}}=$$

$$=\sup_{i\geqslant i_0}(i\theta^i s^{-1}+\theta^i)\leqslant\max_i\frac{i\theta^i}{s}+\theta^{i_0}<\varepsilon \text{ при } s>s_1(\varepsilon).$$

В силу (24)

$$\sup_{i<i_0}\frac{\theta^i}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}<\varepsilon \text{ при } s>s_2(\varepsilon).$$

Тогда при

$$s>s(\varepsilon)=\max(s_1(\varepsilon),\ s_2(\varepsilon))\quad \sup_i\frac{\theta^i}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}<\varepsilon.$$

Построение субдиагональной матрицы $A=[a_{ik}]$. Выберем сперва некоторую последовательность $\{\eta_k\}$, $0<\eta_k<1$, $\eta_k\to 0$ $(k\to\infty)$ и построим рекуррентно две последовательности $\{\nu_i\}$, ν_i — натуральное и $\{b_i\}$, $0<|b_i|<1$ $(i=2,\ 3,\ \ldots)$. Положим $\nu_0=0$, $b_0=1$, $\nu_1=3$,

$$b_i=\frac{-1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}\ (1\leqslant i\leqslant\nu_1).$$

Выберем $\nu_2>3$ так, чтобы $(b\nu_1)^{\frac{1}{\nu_2}}>1-\eta_2$. Положим

$$b_i=\frac{-b_{\nu_1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}\ (\nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2).$$

Пусть уже выбраны ν_i, $i\leqslant k$ и b_i при $i\leqslant\nu_k$ и $0<|b_{\nu_k}|<1$. Тогда выберем сперва $\nu_{k+1}>\nu_k$ так, чтобы $|b_{\nu_k}|^{\frac{1}{\nu_{k+1}}}>1-\eta_k$ и положим

$$b_i=\frac{-b_{\nu_k}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}(\nu_k+1\leqslant i\leqslant\nu_{k+1}).$$

Определив функцию $\varphi(i)$,

$$\varphi(i)=\begin{cases}0 & i\leqslant\nu_1\\ \nu_k & \nu_k+1\leqslant i\leqslant\nu_{k+1},\end{cases}$$

положим

$$a_{ik}=\delta_{\varphi(i),k}\ (i\geqslant 1,\ k\geqslant 0). \tag{25}$$

Для фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, *можно указать целую функцию* $f(z)$ *с положительными нулями, имеющими* $\rho(r)$-*плотность* δ, $d \leqslant \delta \leqslant D$, *такую, что при* $\rho(r) \in \mathfrak{D}$

$$h_1(\varphi; f) = \frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi - \frac{D-d}{2}|\cos\rho\varphi| \tag{3.6}$$

(*при этом* $\delta = D$, *если* $\cos\rho\varphi < 0$ *и* $\delta = d$, *если* $\cos\rho\varphi > 0$), *а при* $\rho(r) \in C$ *и* $\alpha = 0$ — *такую, что*

$$h_2(\varphi; f) = -\frac{D+d}{2}\cos\rho\varphi - \frac{D-d}{2}\cos\rho\varphi| \tag{3.7}$$

(*при этом* $\delta = D$, *если* $\cos\rho\varphi > 0$ *и* $\delta = d$, *если* $\cos\rho < 0$).

Доказательство теоремы 6 вытекает из следствия 3 статьи [7]. Действительно, правая часть неравенства (5.5″) из [7] перепишется в виде

$$h_1(\varphi; f) \leqslant D(0; f)\cos\rho\varphi, \text{ если } \cos\rho\varphi > 0, \tag{3.8}$$

и

$$h_1(\varphi; f) \leqslant d(0; f)\cos\rho\varphi, \text{ если } \cos\rho\varphi < 0. \tag{3.9}$$

Из неравенств (3.8) и (1.11) вытекает, что для всякой функции $f(z) \in G(\rho(r), D, d)$ выполняется

$$h_1(\varphi; f) \leqslant \sup_{f \in G(\rho(r), D, d)} D(0; f)\cos\rho\varphi = D\cos\rho\varphi,$$

если $\cos\rho\varphi > 0$ и

$$h_1(\varphi; f) \leqslant \cos\rho\varphi \inf_{f \in G(\rho(r), D, d)} d(0; f) = d\cos\rho\varphi,$$

если $\cos\rho\varphi < 0$. Но эти неравенства эквиваленты правой части неравенства (3.2). Остальные неравенства теоремы 6 выводятся из следствия 3 статьи [7] по этому образцу. Примеры функций, для которых выполняются равенства (3.6) и (3.7), имеются в [7]. Чтобы получить примеры функций, для которых выполнялись бы равенства (3.4) и (3.5), надо взять такие среди функций $f(z)$, удовлетворяющих равенствам (5.8″) и (5.9″) из [7], для которых имели бы место равенства $D(0; f) = D(f)$, $d(0; f) = d(f)$. Такие функции существуют (частный случай $d = 0$, см. [6]).

Из замечания в конце [7] следует, что соотношения (3.1), (3.2) и (3.3) останутся справедливыми, если вместо $h_j(\varphi; f)$ поставить нижние индикаторы $\underline{h}_j(\varphi; f)$. При этом существуют примеры, показывающие точность оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Pólya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen Math. z. **29** (1929), 549—640.
2. V. Bernstein. Leçons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
4. А. А. Гольдберг. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями. Сиб. матем. ж., 3 (1962), 170—177.
5. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, I. Матем. сб., **58** (**100**) (1962), 289—334.
6. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, II. Матем. сб., **61** (**103**) (1963), 334—349.
7. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, III. Матем. сб., **65** (**107**) (1964), 414—453.

8. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, IV. Матем. сб.. **66** (**108**) (1965), 412—457.

9. А. А. Кондратюк. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. Литовск. матем. сб., VII, **1** (1967), 79—117.

10. А. А. Кондратюк. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II. Литовск. матем. сб. VIII, **1** (1968) 64—84.

11. А. Ф. Леонтьев. О сходимости последовательности полиномов Дирихле. ДАН ССР, т. **108**, № 1, (1956), 23—26.

12. И. Ф. Красичков. Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сиб. матем. ж., IV (1965), 840—861.

13. М. В. Говоров. Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини. ДАН УРСР, № 2 (1966), 148—150.

14. И. В. Островский. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями. Записки мех.-мат. фак-та ХГУ и ХМО, т. XXVIII, серия 4 (1961), 23—32.

Поступила 27 ноября 1967 г.