ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вып. 7 1968

О ПРИВЕДЕНИИ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ В КРУГЕ

К. М. Фишман

Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$ ($\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 \leqslant R < \infty$) всех однозначных аналитических функций в круге $\{z : |z| < R\}$ ($\{z : |z| \leqslant R\}$) с обычной принятой топологией [1, 2, 3]. В каждом из этих пространств система $\{z^n\}_0^\infty$ является естественным базисом. Через $\mathfrak{A}$ обозначим любое из пространств $\mathfrak{A}_R$ или $\overline{\mathfrak{A}}_R$.

В настоящей работе выделяется класс треугольных матриц $\{D\}$, приводимых к чисто диагональному виду J, т. е. $T^{-1}DT = J$, где T — изоморфизм пространства $\mathfrak{A}$ и J — диагональная матрица, $J = [\delta_{ik}\alpha_k]$, δ_{ik} — символ Кронекера.

Пусть $D = [d_{ik}]$ произвольная бесконечная матрица. Обозначим через $\mathfrak{D}(D)$ совокупность всех $f(z) = \sum\limits_0^\infty \beta_n z^n \in \mathfrak{A}$, для которых сходятся ряды $\sum\limits_k d_{nk}\beta_k = \gamma_n$ $(n = 0, 1, \dots)$ и $\sum\limits_n \gamma_n z^n \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}(D)$ есть линейное подпространство $\mathfrak{A}$. С матрицей $[d_{ik}]$ сопоставим линейный оператор D, отображающий $\mathfrak{D}(D)$ в $\mathfrak{A}$:

$$Df = D\left(\sum_0^\infty \beta_n z^n\right) = \sum_0^\infty \gamma_n z^n = g \quad (f \in \mathfrak{D}(D)). \tag{1}$$

Как известно [4, 5, 6], матрица $D = [d_{ik}]$ линейно непрерывно отображает $\mathfrak{A}_R$ в $\mathfrak{A}_R$ ($\overline{\mathfrak{A}}_R$ в $\overline{\mathfrak{A}}_R$) тогда и только тогда, когда для каждого $\rho < R$ $(r > R)$ существуют $r < R$ $(\rho > R)$ и $C > 0$ такие, что имеет место оценка

$$|d_{ik}| \leqslant C \frac{r^k}{\rho^i} \quad (i, k = 0, 1, \dots). \tag{2}$$

Определение. Линейные операторы (матрицы) D_1 и D_2 линейно эквивалентны в пространстве $\mathfrak{A}$, если существует изоморфизм T пространства такой, что

$$T\mathfrak{D}(D_2) = \mathfrak{D}(D_1) \tag{3}$$

и

$$TD_2 f = D_1 Tf \quad (f \in \mathfrak{D}(D_2)). \tag{4}$$

Обозначим через $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ пространство всех линейных непрерывных отображений пространства $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ и $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A})$. Введем теперь некоторые подклассы $L_i(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ $(L_i(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, $i = 1, 2, 3$, линейных непрерывных операторов.

Линейный оператор $D[d_{ik}]$ принадлежит $L_1(\mathfrak{A}_R)$ $(L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, если для каждого $\rho < R$ $(r > R)$ существуют $r < \rho$ $(\rho > r)$ и $C > 0$ такие, что имеет место оценка (2).

Линейный оператор $D = [d_{ik}]$ принадлежит $L_2(\mathfrak{A}_R)$ $(L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, если для каждого $r = \rho < R$ $(\rho = r > R)$ существует $C > 0$ так, что имеет место оценка (2).

Линейный оператор $D = [d_{ik}]$ принадлежит $L_3(\mathfrak{A}_R)$ $(L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, если для каждого $\rho < R$ $(r > R)$ и $\varepsilon > 0$ существуют $r < R$, $r < \rho + \varepsilon$ $(\rho > R$, $\rho > r - \varepsilon)$ и $C > 0$ такие, что имеет место (2). Очевидно, имеют место включения

$$L_1(\mathfrak{A}_R) \subset L_2(\mathfrak{A}_R) \subset L_3(\mathfrak{A}_R) \subset L_4(\mathfrak{A}_R) = L\mathfrak{A}_R,$$
$$L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R) \subset L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R) \subset L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R) \subset L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R) = L(\overline{\mathfrak{A}}_R).$$

Так, например, любой линейный непрерывный оператор $D \in L(\mathfrak{A}_R, \mathfrak{A}_{R+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, принадлежит $L_1(\mathfrak{A}_R)$. Оператор неопределенного интегрирования $Df(z) = \int\limits_0^z f(\xi)\,d\xi$ принадлежит классу $L_2(\mathfrak{A}_R)$, но не принадлежит классу $L_1(\mathfrak{A}_R)$. Оператор дифференцирования $Df(z) = f'(z)$ принадлежит классу $L_3(\mathfrak{A}_R)$, но не принадлежит классу $L_2(\mathfrak{A}_R)$. Линейный оператор $Df(z) = f(pz)$, $p > 1$ принадлежит классу $L_4(\mathfrak{A}_\infty)$, но не принадлежит классу $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$.

Разложим нижнетреугольную матрицу $D = [d_{ik}]$ на сумму диагональной матрицы $J = [\delta_{ik} d_{ik}] = [\delta_{ik}\alpha_i]$, $\alpha_i = d_{ii}$ и субдиагональной матрицы $A = [a_{ik}]$, $a_{ik} = \begin{cases} d_{ik} & i > k \\ 0 & i \leqslant k \end{cases}$

$$D = J + A \tag{5}$$

Теорема 1. *Нижнетреугольная матрица $D = J + A$ линейно эквивалентна J в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$ при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$

$$\sup_{i \geqslant 0,\, s \geqslant 1} \frac{\theta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} = M < \infty; \tag{I, 1}$$

2) $A \in L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и*

$$\sup_{i \geqslant 0,\, s \geqslant 1} |\alpha_{i+s} - \alpha_i|^{-1} = M < \infty; \tag{I, 2}$$

3) $A \in L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и при некотором* η, $\eta > 1$

$$\sup_{i \geqslant 0,\, s \geqslant 1} \eta^{i+s} |\alpha_{i+s} - \alpha_i|^{-1} = M < \infty; \tag{I, 3}$$

4) $A \in L_4(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и для любого* $\eta > 0$

$$\sup_{i \geqslant 0,\, s \geqslant 1} \eta^{i+s} |\alpha_{i+s} - \alpha_i|^{-1} = M < \infty. \tag{I, 4}$$

Доказательство. Рассмотрим еще нижнетреугольную матрицу $J + B$, $B = [b_{ik}]$, $b_{ik} = 0$ $(i \leqslant k)$, B принадлежит тому же подклассу, что и A. Построим изоморфизм $T = [t_{ik}]$ пространства $\overline{\mathfrak{A}}_0$, удовлетворяющий условию

$$T(J + A) = (J + B)T \tag{6}$$

или в матричной записи

$$t_{ik}\alpha_k + \sum_{j > k} t_{ij} a_{jk} = \alpha_i t_{ik} + \sum_{j < i} b_{ij} t_{jk} \quad (i, k = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

В уравнении (7) участвуют только те элементы матрицы T, которые расположены не ниже и не левее элемента t_{ik}, поэтому в силу однородности уравнений (7) относительно t_{ik} можно положить

$$t_{ik} = 0 \quad (k > i). \tag{8}$$

Тогда (7) принимает вид

$$t_{ik}\alpha_k + \sum_{k<j\leqslant i} t_{ij}a_{jk} = t_{ik}\alpha_i + \sum_{k\leqslant j<i} b^{ij}t_{jk} \quad (i \geqslant k). \tag{9}$$

Положив в (9) $i = k$ убеждаемся, что

$$t_{ii} = 1 \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{10}$$

согласуется с системой (9).

Из условий теоремы следует $\alpha_i \neq \alpha_k$ $(i \neq k)$, так что из (9) получим

$$t_{ik} = \frac{1}{\alpha_i - \alpha_k}\Big[\sum_{k<j\leqslant i} t_{ij}a_{jk} - \sum_{k\leqslant j<i} b_{ij}t_{jk}\Big] \quad (i > k). \tag{11}$$

Формула (11) позволяет вычислить t_{ik} при $i - k = s$, $s \geqslant 1$, если известны все t_{ik} при $0 \leqslant i - k < s$.

Элементы матриц $[a_{ik}]$ и $[b_{ik}]$ удовлетворяют оценкам

$$|a_{ik}| \leqslant C_1 \frac{r_1^k}{\rho_1^i} \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{12}$$

и

$$|b_{ik}| \leqslant C_1 \frac{r_1^k}{\rho_1^i} \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{13}$$

где взаимосвязь величин C_1, r_1, ρ_1 зависит еще от принадлежности A и B к тому или иному подклассу $L_i(\overline{\mathfrak{A}}_c)$.

Предположим, что для $i - k \leqslant s - 1$ справедлива оценка

$$|t_{ik}| \leqslant C_{s-1}\frac{r^k}{\rho^i} \quad (0 \leqslant i - k \leqslant s - 1;\quad i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{14}$$

Тогда из (11) с учетом (12), (13) имеем для $i - k = s$, в предположении $r < \rho_1$ и $\rho < r_1$:

$$|t_{ik}| \leqslant \frac{1}{|\alpha_i - \alpha_k|}\Big[\sum_{k<j\leqslant i} C_{s-1}\frac{r^j}{\rho^i}C_1\frac{r_1^k}{\rho_1^j} + \sum_{k\leqslant j<i} C_1\frac{r_1^j}{\rho_1^i}C_{s-1}\frac{r^k}{\rho^j}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_{s-1}C_1\frac{r^k}{\rho^i}\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_k|}\Big[\Big(\frac{r_1}{r}\Big)^k \sum_{k<j\leqslant i}\Big(\frac{r}{\rho_1}\Big)^j + \Big(\frac{\rho}{\rho_1}\Big)^i \sum_{k\leqslant j<i}\Big(\frac{r_1}{\rho}\Big)^j\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_{s-1}C_1\frac{r^k}{\rho^i}\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_k|}\left[\Big(\frac{r_1}{r}\Big)^k\Big(\frac{r}{\rho_1}\Big)^{k+1}\frac{1 - \Big(\frac{r}{\rho_1}\Big)^{i-k}}{1 - \frac{r}{\rho_1}} + \right.$$

$$\left. + \Big(\frac{\rho}{\rho_1}\Big)^i\Big(\frac{r_1}{\rho}\Big)^k\frac{\Big(\frac{r_1}{\rho}\Big)^{i-k} - 1}{\frac{r_1}{\rho} - 1}\right] \leqslant C_{s-1}C_1\frac{r^k}{\rho^i}\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_k|}\Big[\Big(\frac{r_1}{\rho_1}\Big)^k\frac{r}{\rho_1 - r} +$$

$$+ \Big(\frac{r_1}{\rho_1}\Big)^i\frac{\rho}{r_1 - \rho}\Big] \leqslant C_{s-1}C_1\frac{r^k}{\rho^i}\max_{k\geqslant 0}\frac{\Big(\frac{r_1}{\rho_1}\Big)^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|}\Big[\frac{r}{\rho_1 - r} +$$

$$+ \Big(\frac{r_1}{\rho_1}\Big)^s\frac{\rho}{r_1 - \rho}\Big] = C_{s-1}\tau_s\frac{r^k}{\rho^i},$$

где

$$\tau_s = C_1\left[\frac{r}{\rho_1 - r} + \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^s \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \cdot \max_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|}. \tag{15}$$

Таким образом, можно положить

$$C_s = \max(C_{s-1},\ C_{s-1}\tau_s). \tag{16}$$

Докажем непрерывность в $\overline{\mathfrak{A}}_0$ построенной так матрицы T в каждом из четырех случаев.

1) Матрицы A и B принадлежат классу $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$. Выбираем произвольно $r_1 > 0$ и находим $\rho_1 > r_1$ и $C_1 > 0$ так, что удовлетворяются неравенства (12) и (13). Положив $\frac{r_1}{\rho_1} = \theta < 1$, имеем, согласно (I, 1),

$$\tau_s \leqslant C_1 M\left[\frac{r}{\rho_1 - r} + \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \leqslant 1, \tag{17}$$

при $r \leqslant r_0 < r_1$ и $\rho < r$, так, что $C_s = C_{s-1} = C_0 = 1$. Этим доказана непрерывность матрицы T.

В случае 2) выбираем r_1 произвольно, положим $\rho_1 = r_1$ и находим соответствующее C_1; согласно условиям имеем для τ_s оценку (17).

Пусть выполняются условия 3) теоремы. Исходя из произвольного $r_1 > 0$, находим $\rho_1 < r_1$ и C_1 так, чтобы выполнялись неравенства (12), (13), причем $\frac{r_1}{\rho_1} < \eta$. Имеем согласно (15):

$$\tau_s \leqslant C_1 \max_{k \geqslant 0,\ s \geqslant 1} \frac{\eta^{k+s}}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|}\left[\frac{\rho}{r_1 - \rho} + \frac{r}{\rho_1 - r}\right] = C_1 M\left[\frac{\rho}{r_1 - r} + \frac{r}{\rho_1 - \rho}\right] \leqslant 1,$$

при $r \leqslant r_0 < \rho_1$, $\rho < r$.

В случае 4) по заданному $r_1 > 0$ находим соответствующие $\rho_1 < r_1$ и C_1 и, положив $\frac{r_1}{\rho_1} = \eta$, приходим к той же оценке (17).

Построим таким же образом матрицу $T' = [t'_{ik}]$, удовлетворяющую условиям (8), (10) и условию

$$T'(J + B) = (J + A)T'. \tag{18}$$

Из (6) и (18) заключаем

$$TT'(J + B) = (J + B)TT'. \tag{19}$$

Матрица TT' удовлетворяет условиям (8), (10) и (19); учитывая, что и единичная матрица I этим условиям удовлетворяет и единственность построения такой матрицы, заключаем, что

$$TT' = T'T = I, \tag{20}$$

т. е. $T = [t_{ik}]$ есть линейный изоморфизм пространства $\overline{\mathfrak{A}}_0$. Покажем еще, что матричное соотношение (6) влечет за собой линейную эквивалентность $J + A$ и $J + B$ в определенном выше смысле. Для этого достаточно убедиться, что

$$T\mathfrak{D}(J) = \mathfrak{D}(J). \tag{21}$$

Пусть $f = \sum_k \beta_k z^k \in \mathfrak{D}(J)$, т. е. $f \in \overline{\mathfrak{A}}_0$ и $\sum_k \beta_k \alpha_k z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$. Положим $Tf = \sum_k \gamma_k z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$, где $\gamma_k = \sum_j t_{kj}\beta_j$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$. Осталось убедиться, что

$$\sum_k \gamma_k \alpha_k z^k = \sum_k \left(\sum_j \alpha_k t_{kj}\beta_j\right) z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0. \tag{22}$$

Согласно (6) имеем $JT = TJ + C$, где $C = [c_{ik}] = TA - BT \in L(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, или
$$\alpha_k t_{kj} = \alpha_j t_{kj} + c_{kj}. \tag{23}$$

Подставляя в (22), имеем
$$\sum_k \Big(\sum_j \alpha_k t_{kj}\beta_j\Big) z^k = \sum_k \Big(\sum_j t_{kj}\alpha_j\beta_j\Big) z^k + \sum_k \Big(\sum_j c_{kj}\beta_j\Big) z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0,$$
ибо T и C непрерывные и $\sum\limits_j \alpha_j\beta_j z^j$ и $\sum\limits_j \beta_j z^j \in \overline{\mathfrak{A}}_0$.

Итак, доказано, что $T\mathfrak{D}(J) \subset \mathfrak{D}(J)$. Аналогично доказывается, что $T^{-1}\mathfrak{D}(J) \subset \mathfrak{D}(J)$, откуда приходим к соотношению (21), и
$$T(J + A)f = (J + B)Tf$$
для всех $f \in \mathfrak{D}(J + A) = \mathfrak{D}(J)$.

Покажем теперь, что теорема I теряет силу, если в условии i ($i = 1, 2, 3$), класс $L_i(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ заменить через $L_{i+1}(\overline{\mathfrak{A}}_0)$.

Лемма. *Пусть* $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2 \ldots)$, $a_{ik} = k\alpha_k\delta_{i-1,k}$ $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots)$. *Тогда оператор* $J + A$ *не имеет нетривиальных нулей в* $\overline{\mathfrak{A}}_0$.

Действительно, из
$$(J + A)f = (J + A)\sum_0^\infty \beta_k z^k = \sum_{k=1}^\infty (\beta_k\alpha_k + k\alpha_k\beta_{k-1}) z^k = 0$$
следует
$$\beta_k = -k\beta_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \beta_k = (-1)^k k!\beta_0$$
и
$$f(z) = \beta_0 + \sum_1^\infty (-1)^k k!\beta_0 z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$$
тогда и только тогда, когда $\beta_0 = 0$, т. е. $f(z) = 0$.

Во всех приведенных ниже примерах диагональный оператор $J = [\delta_{ik}\alpha_k]$ имеет нетривиальный нуль, $J1 = 0$, а оператор $A = [a_{ik}] = [k\alpha_k\delta_{i-1,k}]$ и $J + A$ нетривиальных нулей в $\overline{\mathfrak{A}}_0$ не имеет и поэтому не может быть линейно эквивалентен оператору J.

Для получения примеров следует положить соответственно; в случае 1) $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; в случае 2) $\alpha_i = i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ и в случае 3) $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = p^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $p > 1$.

Теорема 2. *Нижнетреугольная матрица* $B = J + A$ *линейно эквивалентна в пространстве* $\mathfrak{A}_R$ $(0 < R \leqslant \infty)$ *диагональной матрице* J *при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\mathfrak{A}_R)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$
$$\sup_i \frac{\theta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} < \infty \quad (s = 1, 2, \ldots)$$
и
$$\lim_{s\to\infty} \sup_i \frac{\theta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} = 0; \tag{II, 1}$$

2) $A \in L_2(\mathfrak{A}_R)$,
$$\sup_i |\alpha_{i+s} - \alpha_i|^{-1} < \infty \quad (s = 1, 2, \ldots)$$
и
$$\lim_{s\to\infty} \sup_i |\alpha_{i+s} - \alpha_i|^{-1} = 0; \tag{II, 2}$$

3) $A \in L_3(\mathfrak{A}_R)$, *существует* $\eta > 1$ *такое, что*

$$\sup_i \frac{\eta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} < \infty \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

и

$$\lim_{s \to \infty} \eta^s \sup_i \frac{\eta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} = 0; \tag{II, 3}$$

4) $A \in L_4(\mathfrak{A}_R)$, *для любого* $\eta > 0$

$$\sup_i \frac{\eta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} < \infty \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\lim_{s \to \infty} \eta^s \sup_i \frac{\eta^i}{|\alpha_{i+s} - \alpha_i|} = 0 \tag{II, 4}$$

Доказательство. Построение T такое же, как в доказательстве теоремы 1. Остается в каждом отдельном случае оценить величину τ_s из (15).

1) Пусть $\rho < R$ произвольное. Выбираем $\rho_1 = \rho_2$, $\rho < \rho_1 < R$, находим соответствующие значения $r_1 = r_2$, $\rho < r_1 < \rho_1$, $C_1 = C_2 > 0$ и фиксируем значение r, $r_1 < r < \rho_1$. Положив $\theta = \frac{r_1}{\rho_1}$, имеем

$$\tau_s \leqslant C_1 \max_k \frac{1}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \left[\theta^k \frac{r}{\rho_1 - r} + \theta^{k+s} \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \leqslant C' \max_k \frac{\theta^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|},$$

где C' от s не зависит. В силу условия (II, 1)

$$C' \max_k \frac{\theta^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \leqslant 1 \text{ при } s \geqslant s_0.$$

Тогда искомое $C = C_{s_0}$.

2) Пусть $\rho < R$ произвольное. Выберем $\rho_1 = \rho_2 = r_1 = r_2$, $\rho < \rho_1 < R$, $C_1 = C_2$ и $\rho < r < \rho_1$. Тогда

$$\tau_s \leqslant C_1 \max_k \frac{1}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \left[\frac{r}{\rho_1 - r} + \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \leqslant C' \max_k \frac{1}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|},$$

где C' от s не зависит. В силу (II, 2) $C' \max\limits_k |\alpha_{k+s} - \alpha_k|^{-1} \leqslant 1$, при $s \geqslant s_0$.

3) Пусть $\rho < R$ произвольное. Выбираем $\rho_1 = \rho_2$, $\rho < \rho_1 < R$ и находим $r_1 = r_2$, $\rho_1 < r_1 < R$ так, чтобы было $\frac{r_1}{\rho_1} < \eta$, фигурирующего в условии (II, 3), и потом соответствующие значения $C_1 = C_2$. Тогда

$$\tau_s \leqslant C_1 \max_k \frac{1}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \left[\eta^k \frac{r}{\rho_1 - r} + \eta^{k+s} \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \eta^s \max_k \frac{\eta^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \left[\frac{r}{\rho_1 - r} + \frac{\rho}{r_1 - \rho}\right] \leqslant C' \eta^s \max_k \frac{\eta^k}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|} \leqslant 1,$$

при $s \geqslant s_0$.

Аналогично поступаем в случае 4).

Приведем соответствующие этому случаю примеры.

Случай 1. Пусть $R > 1$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ Покажем сперва, что $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условию (II, 1). При $\theta < 1$ имеем

$$\sup_i \frac{\theta^i}{\frac{1}{i+1} + \ldots + \frac{1}{i+s}} \leqslant \sup_i \frac{\theta^i}{s \frac{1}{i+s}} = \sup_i \frac{1}{s}(i+s)\theta^i < \infty \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Нужно еще проверить, что

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{i}\theta^{i}\frac{1}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}=0. \tag{24}$$

Пусть $\varepsilon>0$. При фиксированном i

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\theta^{i}}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}=0.$$

Выберем натуральное i_0 так, чтобы $2\theta^{i_0}<\varepsilon$ и находим $s_1(\varepsilon)$ такой, что $\max\limits_{i} i\theta^{i}s^{-1}+\theta^{i_0}<\varepsilon$ при $s>s_1(\varepsilon)$. Тогда

$$\sup_{i\geqslant i_0}\frac{\theta^{i}}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}\leqslant\sup_{i\geqslant i_0}\frac{\theta^{i}}{s(i+s)^{-1}}=$$

$$=\sup_{i\geqslant i_0}(i\theta^{i}s^{-1}+\theta^{i})\leqslant\max_{i}\frac{i\theta^{i}}{s}+\theta^{i_0}<\varepsilon \text{ при } s>s_1(\varepsilon).$$

В силу (24)

$$\sup_{i<i_0}\frac{\theta^{i}}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}<\varepsilon \text{ при } s>s_2(\varepsilon).$$

Тогда при

$$s>s(\varepsilon)=\max(s_1(\varepsilon),\ s_2(\varepsilon))\quad\sup_{i}\frac{\theta^{i}}{\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{i+s}}<\varepsilon.$$

Построение субдиагональной матрицы $A=[a_{ik}]$. Выберем сперва некоторую последовательность $\{\eta_k\}$, $0<\eta_k<1$, $\eta_k\to 0$ $(k\to\infty)$ и построим рекуррентно две последовательности $\{\nu_i\}$, ν_i — натуральное и $\{b_i\}$, $0<|b_i|<1$ $(i=2,\ 3,\ \ldots)$. Положим $\nu_0=0$, $b_0=1$, $\nu_1=3$,

$$b_i=\frac{-1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}\ (1\leqslant i\leqslant\nu_1).$$

Выберем $\nu_2>3$ так, чтобы $(b_{\nu_1})^{\frac{1}{\nu_2}}>1-\eta_1$. Положим

$$b_i=\frac{-b_{\nu_1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}\ (\nu_1+1\leqslant i\leqslant\nu_2).$$

Пусть уже выбраны ν_i, $i\leqslant k$ и b_i при $i\leqslant\nu_k$ и $0<|b_{\nu_k}|<1$. Тогда выберем сперва $\nu_{k+1}>\nu_k$ так, чтобы $|b_{\nu_k}|^{\frac{1}{\nu_{k+1}}}>1-\eta_k$ и положим

$$b_i=\frac{-b_{\nu_k}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}(\nu_k+1\leqslant i\leqslant\nu_{k+1}).$$

Определив функцию $\varphi(i)$,

$$\varphi(i)=\begin{cases}0 & i\leqslant\nu_1\\ \nu_k & \nu_k+1\leqslant i\leqslant\nu_{k+1},\end{cases}$$

положим

$$a_{ik}=b_{\varphi(i),k}\ (i\geqslant 1,\ k\geqslant 0). \tag{25}$$

Отметим, что $\varphi(i) < i$. Покажем, что субдиагональная матрица A принадлежит $L_2(\mathfrak{A}_R)$ и не принадлежит $L_1(\mathfrak{A}_R)$ при $R > 1$. Имеем

$$|a_{i,\varphi(i)}| = 1 \leqslant C\frac{\rho^{\varphi(i)}}{\rho^i} = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-\varphi(i)} \text{ при } \rho > 1 \text{ и } C \geqslant 1.$$

Следовательно, $A \in L_2(\mathfrak{A}_R)$ при $R > 1$. Если A принадлежало бы $L_1(\mathfrak{A}_R)$, то при $\rho > 1$ и некоторых $r < \rho$ и $C > 0$ мы имели бы

$$|a_{i,\varphi(i)}| = 1 \leqslant Cr^{\varphi(i)}\rho^{-i} = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-\varphi(i)}\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\varphi(i)} \leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\varphi(i)} \to 0 \ (i\to\infty),$$

что неверно. Тем самым $A \notin L_1(\mathfrak{A}_R)$ при $R > 1$.

Покажем теперь, что $J + A$ не имеет нетривиальных нулей в $\mathfrak{A}_R$, $R > 1$. Пусть

$$(J + A)f = (J + A)\sum_0^\infty \beta_i z^i = \sum_{i=1}^\infty (\beta_i\alpha_i + \beta_{\varphi(i)})z^i.$$

Отсюда

$$\beta_i = -\frac{\beta_{\varphi(i)}}{\alpha_i} = -\frac{\beta_{\nu_k}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}} \quad (\nu_k + 1 \leqslant i \leqslant \nu_{k+1}).$$

Следовательно, $\beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ или $\{\beta_i\}_0^\infty$ с точностью до множителя совпадает с $\{b_i\}_0^\infty$ и

$$f(z) = 1 - \sum_{k=0}^\infty \sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} b_{\nu_k}\frac{z^i}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}}.$$

Так как

$$\sqrt[i]{\frac{|b_{\nu_k}|}{1+\ldots+\frac{1}{i}}} \leqslant 1 \quad (\nu_k + 1 \leqslant i \leqslant \nu_{k+1})$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[\nu_{k+1}]{|b_{\nu_k}|}}{\sqrt[\nu_{k+1}]{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu_{k+1}}}} = 1,$$

то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\beta_k|} = 1 \text{ и } f(z) \notin \mathfrak{A}_R \text{ при } R > 1.$$

Случай 2. Положим $R > 1$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $a_{ik} = i\delta_{i-1,k}$. Тогда $A \in L_3(\mathfrak{A}_R) \setminus L_2(\mathfrak{A}_R)$, и нетривиальный нуль матрицы $J + A$ имеет вид

$$\sum_k (-1)^k z^k \notin \mathfrak{A}_R.$$

Случай 3). Положим $R = \infty$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = p^i$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, где $p > 1$, $a_{ik} = p^i\delta_{i-1,k}$. Тогда $A \notin L_4(\mathfrak{A}_\infty) \setminus L_3(\mathfrak{A}_\infty)$, и нетривиальный нуль матрицы $J + A$ имеет вид

$$\sum_k (-1)^k z^k \notin \mathfrak{A}_\infty.$$

Для получения аналогичных теорем для верхнетреугольных матриц применим двойственность аналитических пространств [1, 2, 3]. Пространство $\mathfrak{A}'_R$, сопряженное к $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, можно отождествить с пространством $\overline{\mathfrak{A}}_{\frac{1}{R}}$ и $\overline{\mathfrak{A}}'_R$, $0 \leqslant R < \infty$ — с $\mathfrak{A}_{\frac{1}{R}}$. Каждому линейному непрерывному оператору A в $\mathfrak{A}_R$ ($\overline{\mathfrak{A}}_R$) соответствует сопряженный оператор A' в $\mathfrak{A}'_R$ ($\overline{\mathfrak{A}}'_R$), матрица которого получается транспортированием матрицы A (это понятие можно распространить и на некоторые линейные не непрерывные операторы). Оператору J соответствует $J' = J$. Классу $L_i(\mathfrak{A})$ соответствует класс $L_i(\mathfrak{A}')$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Если T есть изоморфизм $\mathfrak{A}$, то T' есть изоморфизм $\mathfrak{A}'$. Из теорем 1 и 2 следует соответственно.

Теорема 3. *Верхнетреугольная матрица $J + A$ (J — диагональная часть матрицы $J + A$) линейно эквивалентна в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$ диагональной матрице J при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\mathfrak{A}_\infty)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$ *удовлетворяется условие* (I, 1);

2) $A \in L_2(\mathfrak{A}_\infty)$ *и удовлетворяется условие* (I, 2);

3) $A \in L_3(\mathfrak{A}_\infty)$ *и при некотором* η, $\eta > 1$ *выполнено условие* (I, 3);

4) $A \in L_4(\mathfrak{A}_\infty)$ *и для любого* $\eta > 0$ *выполнено* (I, 4).

Теорема 4. *Верхнетреугольная матрица $J + A$ линейно эквивалентна в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_R (0 \leqslant R < \infty)$ диагональной матрице J при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$ *выполнено условие* (II, 1);

2) $A \in L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и выполнено условие* (II, 2);

3) $A \in L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и существует* $\eta > 1$ *такое, что выполнено условие* (II, 3);

4) $A \in L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и для каждого* $\eta > 0$ *выполнено условие* (II, 4).

Для нижнетреугольных матриц в пространствах $\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 < R < \infty$ можно применить те же выкладки, что в теореме 2, меняя ролями r и ρ (здесь ρ и C определяются по заданному $r > R$).

Теорема 5. *Нижнетреугольная матрица $J + A$ линейно эквивалентна в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 < R < \infty$ диагональной матрице J при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$ *выполнено условие* (II, 1);

2) $A \in L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и выполнено условие* (II, 2);

3) $A \in L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и существует такое* $\eta > 1$, *при котором выполнено условие* (II, 3),

4) $A \in L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и для любого* $\eta > 1$ *выполнено условие* (II, 4).

Если применить к последней теореме принцип двойственности, будет иметь место

Теорема 6. *Верхнетреугольная матрица $J + A$ линейно эквивалентна в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$ диагональной матрице J при выполнении одного из следующих условий:*

1) $A \in L_1(\mathfrak{A}_R)$ *и для каждого* θ, $0 < \theta < 1$ *выполнено условие* (II, 1);

2) $A \in L_2(\mathfrak{A}_R)$ *и выполнено условие* (II, 2);

3) $A \in L_3(\mathfrak{A}_R)$ *и существует такое* $\eta > 1$, *при котором выполнено условие* (II, 3);

4) $A \in L_4(\mathfrak{A}_R)$ *и для любого* $\eta > 0$ *выполнено условие* (II, 4).

Приведем в заключение одну теорему для пространства l_1, полученную этим же методом.

Теорема 7. *Пусть $J + A$ — нижнетреугольная матрица. Если при некоторых значений θ, γ, $\theta > 0$, $\gamma > 1$ имеет место неравенство*

$$|\alpha_i - \alpha_k| \geqslant \theta (i - k)^\gamma \quad (i > k;\ i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{26}$$

и $A \in L(l_1)$ — любая непрерывная в l_1 матрица, то $J + A$ линейно эквивалентна диагональной матрице J.

Доказательство. Пусть $B = [b_{ik}]$ — субдиагональная матрица, удовлетворяющая также условию (26). Построим матрицу T, так как в доказательстве теоремы 1, исходя из рекурренции,

$$t_{ik} = \frac{1}{\alpha_i - \alpha_k}\Big[\sum_{k<j\leqslant i} t_{ij}a_{jk} - \sum_{k\leqslant j<i} b_{ij}t_{jk}\Big]. \tag{27}$$

Докажем, что для β, $1 < \beta < \gamma$ существует $C \geqslant 1$, так что имеет место оценка

$$|t_{ik}| \leqslant C\frac{1}{(i-k)^{\beta}} \quad (i - k \geqslant 1), \tag{28}$$

что обеспечивает непрерывность оператора T и заодно его непрерывную обратимость.

Пусть (28) верно для $0 \leqslant i - k < s$, $C = C_{s-1} \geqslant 1$. Тогда, учитывая, что

$$\sup_k \sum_{i\geqslant 1} |a_{ik}| = M < \infty, \quad \sup_k \sum_{i\geqslant 1} |b_{ik}| = N < \infty,$$

имеем для $i - k = s$:

$$|t_{k+s,\,k}| \leqslant \frac{1}{|\alpha_{k+s} - \alpha_k|}\Big[\sum_{k<j<k+s} C_{s-1}\frac{1}{(k+s-j)^{\beta}}|a_{jk}| +$$

$$+ |a_{k+s,\,k}| + \sum_{k<j<k+s} C_{s-1}\frac{1}{(j-k)^{\beta}}|b_{k+s,\,j}| +$$

$$+ |b_{k+s,\,k}| \leqslant C_{s-1}\frac{1}{s^{\beta}}\Big[\sum_{k<j<k+s}\frac{|a_{jk}|}{(k+s-j)^{\beta}} + \frac{1}{C_{s-1}}|a_{k+s,\,k}| +$$

$$+ \sum_{k<j<k+s}\frac{b_{k+s,\,j}}{(j-k)^{\beta}} + \frac{1}{C_{s-1}}|b_{k+s,\,k}|\Big]\frac{s^{\beta}}{\theta s^{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{s-1}\frac{1}{s^{\beta}}\frac{1}{\theta s^{\gamma-\beta}}\Big[M\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\beta}} + M + N\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\beta}} + N\Big] = \frac{1}{s^{\beta}}C_{s-1}C\frac{1}{\theta s^{\gamma-\beta}},$$

где C от s не зависит. Таким образом, $C_s = \max(C_{s-1}, C_{s-1}\tau_s)$, где

$$\tau_s = C\frac{1}{\theta s^{\gamma-\beta}} \leqslant 1 \text{ при } s \geqslant s_0,$$

так что искомое значение $C = C_{s_0}$.

Применяя двойственность, можно получить аналогичную теорему для верхнетреугольных матриц в пространстве m.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Маркушевич. О базисе в пространстве аналитических функций. Матем. сборник, 17(59), 211—252, 1945.
2. М. Г. Хапланов. Некоторые свойства аналитических пространств. Доклады АН СССР, 79, № 6, 929—932, 1951.
3. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie. «J. reine u. angew. Math.», 191, № 1—2, 30—49, 1953.
4. М. Г. Хапланов. Линейные преобразования аналитических пространств. Докл. АН СССР, 80, № 1, 21—24, 1951.
5. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. Докл. АН СССР, 127, № 1, 40—43, 1959.
6. К. М. Фишман. Линейные непрерывные и вполне непрерывные отображения аналитических пространств. «Вопросы матем. физики и теории функций», II, Киев, 1964, 134—154.

Поступила 4 ноября 1967 г.