ЧЕБЫШЕВСКИЕ ЦЕНТРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $C[a, b]$

В. Н. Замятин, М. И. Кадец

Пусть X — банахово пространство; V — его ограниченное подмножество. Рассмотрим множество всех замкнутых шаров, содержащих V:

$$V \subset U(r, x); \quad U(r, x) = \{z : \| x - z \| \leqslant r\}.$$

Нижняя грань радиусов этих шаров называется чебышевским радиусом и обозначается r_V. Если существует шар радиуса r_V, содержащий V, то его центр x_V называется чебышевским центром множества V.

А. Л. Гаркави [1] показал, что если B-пространство ортогонально дополняемо в своем втором сопряженном, то каждое ограниченное множество $V \subset X$ имеет чебышевский центр. Пространствами этого типа являются, например, пространство L и все сопряженные B-пространства. В [1] приведен также пример B-пространства, в котором даже не каждое компактное множество имеет чебышевский центр.

Чебышевский центр, вообще говоря, не единственен. Совокупность чебышевских центров множества V будем обозначать T_V. Множество T_V — ограниченное, замкнутое, выпуклое. Если пространство X равномерно выпуклое в каждом направлении, то для каждого V множество T_V состоит не более чем из одной точки [1].

Пусть T — множество чебышевских центров множества V. Если для любой последовательности множеств V_n, сходящейся к V в смысле Хаусдорфа [2, стр. 167], последовательность множеств чебышевских центров T_n сходится к T, то говорят, что T сильно устойчиво [3].

П. К. Белобров [3] показал, что в равномерно выпуклом пространстве чебышевский центр любого ограниченного множества сильно устойчив. В [3] также приведен пример, который показывает, что даже в конечномерном пространстве множество чебышевских центров может оказаться неустойчивым.

В этой заметке мы установим существование чебышеских центров для каждого ограниченного подмножества V пространства $C[a, b]$, а также устойчивость множеств T_V.

Пусть V — ограниченное множество пространства $C[a, b]$. Рассмотрим две функции

$$m(t) = \inf_{x \in V} x(t); \quad M(t) = \sup_{x \in V} x(t)$$

и с их помощью определим необходимые для дальнейшего функции

$$n(t) = \varliminf_{\tau \to t} m(\tau); \quad N(t) = \varlimsup_{\tau \to t} M(\tau).$$

Очевидно, функции $M(t)$ и $n(t)$ полунепрерывны снизу, а $N(t)$ и $m(t)$ — сверху: для любого $x \in V$ справедливо неравенство

$$n(t) \leqslant x(t) \leqslant N(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1}$$

Рассмотрим разность $N(t) - n(t)$. Так как она полунепрерывна сверху, то существует точка $t_0 \in [a, b]$, в котором эта разность достигает наибольшего значения:

$$\max_t \{N(t) - n(t)\} = N(t_0) - n(t_0) = 2r \geqslant 0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Для любой функции* $z(t) \in C[a, b]$

$$\sup_{x \in V} \|x - z\| \geqslant r, \tag{3}$$

где r определено равенством (2).

Доказательство. Задавшись $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точки t_0, столь малую, что колебание функции $z(t)$ в ней меньше, чем $\varepsilon/2$. Согласно (2),

$$N(t_0) - z(t_0) \geqslant r, \text{ или } z(t_0) - n(t_0) \geqslant r. \tag{4}$$

Допустим, не ограничивая общности, что выполнено первое из неравенств (4). Так как функция $M(t)$ полунепрерывна снизу, то из определения $N(t)$ получается, что в любой окрестности произвольной точки графика функции $N(t)$ найдется точка графика $M(t)$ и, следовательно, точка графика одной из функций $x(t) \in V$. Значит, найдутся функция $x(t) \in V$ и точка $t_1 \in [a, b]$ такие, что

$$|t_1 - t_0| < \delta \quad |x(t_1) - N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Так как, кроме того,

$$|z(t_1) - z(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

то из (4_1), (5) и (6) получаем

$$x(t_1) - z(t_1) \geqslant r - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает (3).

Теорема 1. *Каждое ограниченное множество V в $C[a, b]$ имеет чебышевский центр. Совокупность T всех чебышевских центров множества V состоит из тех и только тех непрерывных функций $y(t)$, которые удовлетворяют неравенству*

$$N(t) - r \leqslant y(t) \leqslant n(t) + r. \tag{7}$$

Чебышевский радиус r_V равен r.

Доказательство. Так как функции $N(t) - r$ и $n(t) + r$ полунепрерывны сверху и снизу соответственно, то по теореме об отделении полунепрерывных функций с помощью непрерывных (см. [2., стр. 356]) существует непрерывная функция $y(t)$, удовлетворяющая (7). Вычитая (7) из (1), получим

$$-r \leqslant x(t) - y(t) \leqslant r,$$

откуда $\|x - y\| \leqslant r$ для любого $x(t) \in V$. Сопоставляя (3) с последним неравенством, убеждаемся в том, что r является чебышевским радиусом множества V, а каждая непрерывная функция $y(t)$, удовлетворяющая (7), — его чебышевским центром. Пусть теперь дано, что $y_0(t)$ — чебышевский центр множества V. Это означает, что

$$x(\tau) - r \leqslant y_0(\tau) \leqslant x(\tau) + r.$$

Так как $y_0(\tau)$ фиксирована, то в правой части можно перейти к нижней, а в левой — к верхней грани по всем $x(\tau) \in V$

$$M(\tau) - r \leqslant y_0(\tau) \leqslant m(\tau) + r.$$

Благодаря непрерывности $y_0(r)$ можно совершить следующий предельный переход:

$$\overline{\lim_{\tau\to t}} M(\tau) - r \leqslant \lim_{\tau\to t} y_0(\tau) \leqslant \underline{\lim_{\tau\to t}} m(\tau) + r$$

и получить, таким образом, неравенство (7). Теорема доказана полностью.

Пример. Рассмотрим множество V всех непрерывных функций заданных на отрезке $[-1, 1]$ и обладающих следующими свойствами:

1) $\|x\| \leqslant 1$; 2) $x(t) > 0$ при $t > 0$; 3) $x(t) < 0$ при $t < 0$; 4) $x(0) = 0$. Очевидно,

$$M(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \leqslant 0 \\ 1 \text{ при } t > 0 \end{cases}; \quad m(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } t < 0 \\ 0 \text{ при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Тогда

$$N(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ 1 \text{ при } t \geqslant 0 \end{cases}; \quad n(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } t \leqslant 0 \\ 0 \text{ при } t > 0 \end{cases},$$

а чебышевский радиус r_V равен 2. Так как функция $n(t) + r_V$ совпадает с $M(t)$, а $N(t) - r_V$ с $m(t)$, то из теоремы получается, что совокупность чебышевских центров множества V совпадает с самим множеством V.

Следующая лемма является некоторым усилением теоремы об отделении полунепрерывных функций.

Лемма 2. *Пусть на $[a, b]$ даны две функции $u(t)$ и $v(t)$, причем $u(t)$ полунепрерывна сверху, а $v(t)$ — снизу, и $u(t) \leqslant v(t)$. Если $u(t)$ не обращается в $+\infty$, а $v(t)$ в $-\infty$, то какова бы ни была точка t_0 из $[a, b]$ можно найти непрерывные функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, что*

$$u(t) \leqslant y_i(t) \leqslant v(t); \quad (i = 1, 2); \quad y_1(t_0) = v(t_0); \quad y_2(t_0) = u(t_0).$$

Доказательство. Если изменить значение полунепрерывной функции только в одной точке, то это не повлияет на характер ее полунепрерывности. Поэтому функция

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при } t \neq t_0 \\ v(t_0) & \text{при } t = t_0 \end{cases}$$

полунепрерывна сверху, а функция

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) & \text{при } t \neq t_0 \\ u(t_0) & \text{при } t = t_0 \end{cases}$$

полунепрерывна снизу. Согласно теореме об отделении полунепрерывных функций можно найти такие непрерывные функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, что $u_1(t) \leqslant y_1(t) \leqslant v(t)$, а $u(t) \leqslant y_2(t) \leqslant v_1(t)$. Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ требуемые.

Теорема 2. *Множество V имеет единственный чебышевский центр в том и только в том случае, если $M(t)$ и $m(t)$ имеют разве лишь устранимые точки разрыва, причем в точках непрерывности разность $M(t) - m(t)$ постоянна.*

Доказательство. Если $M(t)$ и $m(t)$ имеют неустранимые точки разрыва, то функции $n(t)$ и $N(t)$ также окажутся разрывными. Так как они полунепрерывны «с разных сторон», то

$$N(t) - n(t) \neq \text{const}.$$

То же получится, если $M(t)$ и $m(t)$ непрерывны, но

$$M(t) - m(t) \neq \text{const}.$$

Поэтому найдется точка t_0, в которой

$$n(t_0) + r > N(t_0) - r.$$

В силу леммы 2 можно выбрать две непрерывные функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, для которых выполняются соотношения:

$$N(t) - r \leqslant y_i(t) \leqslant n(t) + r: \quad (i = 1, 2); \quad \begin{matrix} y_1(t_0) = n(t_0) + r \\ y_2(t_0) = N(t_0) - r. \end{matrix}$$

Отсюда получается, что множество V обладает, по крайней мере, двумя чебышевскими центрами.

Обратно, если $m(t)$ и $M(t)$ имеют разве лишь устранимые точки разрыва, причем разность $M(t) - m(t)$ в точках непрерывности постоянна, то $N(t)$ и $n(t)$ непрерывны и их разность $N(t) - n(t) = 2r$. Отсюда $N(t) - r = n(t) + r$ для любого $t \in [a, b]$. Из теоремы 1 вытекает, что чебышевский центр множества V единственен.

Пример. Рассмотрим множество $V_1 = \{x_n(t)\}_{n+1}^{\infty}$ функций, заданных следующим образом. При фиксированном n на каждом отрезке вида $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ положим

$$x_n(t) = \max\left\{\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{g} - 2^{n+1}\left(t - \frac{p}{g}\right)\right\}; \quad \begin{pmatrix} 1 \leqslant p \leqslant 2^n - 1 \\ 2 \leqslant g \leqslant 2^n \end{pmatrix},$$

а на отрезке вида $\left[\frac{p}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{p}{2^n}\right]$ положим

$$x_n(t) = \max\left\{\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{g} + 2^{n+1}\left(t - \frac{p}{g}\right)\right\},$$

причем p и g изменяются в тех же пределах. В остальных точках отрезка $[0, 1]$ положим $x_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Образуем множество $V_2 = \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где $y_n(t) = -x_n(t) + 1$. Пусть $V = V_1 \cup V_2$. Нетрудно заметить, что

$$m(t) = \inf_{z \in V} z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{если } x = \frac{p}{2^n} \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1] \end{cases}$$

$$M(t) = \sup_{z \in V} z(t) = -m(t) + 1.$$

Функция $M(t)$ полунепрерывна снизу, а $m(t)$ — сверху, причем в каждой двоично-рациональной точке интервала $(0,1)$ эти функции имеют устранимый разрыв. Отсюда получается, что $N(t) = 1$, $n(t) = 0$. $r_V = \frac{1}{2}$, а единственным чебышевским центром множества V является функция $x = \frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к доказательству устойчивости множества чебышевских центров. Расстояние между множествами будем понимать в смысле Хаусдорфа.

Лемма 3. *Пусть V_1, V_2 — ограниченные множества пространства $C[a, b]$; $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. Если $\rho(V_1, V_2) \leqslant \varepsilon$, то для любого $t \in [a, b]$*

$$|N_1(t) - N_2(t)| \leqslant \varepsilon, \quad |n_1(t) - n_2(t)| \leqslant \varepsilon \text{ и } |r_1 - r_2| \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Доказательство. Покажем вначале, что $|M_1(t) - M_2(t)| \leqslant \varepsilon$ и $|m_1(t) - m_2(t)| \leqslant \varepsilon$ для любого $t \in [a, b]$. Фиксируя t и $\varepsilon_1 > 0$, найдем такие $x(t) \in V_1$ и $y(t) \in V_2$, для которых

$$0 \leqslant M_1(t) - x(t) \leqslant \varepsilon_1 \text{ и } -\varepsilon \leqslant x(t) - y(t) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда $M_1(t)-y(t)\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1$. Так как, кроме того, $M_2(t)-y(t)\geqslant 0$, то $M_1(t)-M_2(t)\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1$. Ввиду произвольности ε_1:

$$M_1(t)-M_2(t)\leqslant\varepsilon.$$

Меняя ролями $M_1(t)$ и $M_2(t)$, получим обратное неравенство. Следовательно,

$$|M_1(t)-M_2(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Неравенство

$$|m_1(t)-m_2(t)|\leqslant\varepsilon$$

доказывается аналогично. Отсюда и из определения фукций $N(t)$ и $n(t)$ следует, что

$$|N_1(t)-N_2(t)|\leqslant\varepsilon;\quad |n_1(t)-n_2(t)|\leqslant\varepsilon$$

для любого $t\in[a, b]$.

Пусть $\max\limits_t\{N_1(t_0)-n_1(t_0)\}=N_1(t_0)-n_1(t_0)=2r_1$. Полагая $2r'_2=N_2(t_0)-n_2(t_0)$, получаем из (8_1) и (8_2), что $|r_1-r'_2|\leqslant\varepsilon$. Так как, кроме того, $r_2\geqslant r'_2$, то $r_1-r_2\leqslant\varepsilon$. Обратное неравенство получается аналогично. Таким образом,

$$|r_1-r_2|\leqslant\varepsilon \text{ и т. д.}$$

Лемма 4. *Пусть $s(t)$ — функция, полунепрерывная снизу, а $i(t)$ — сверху, причем $i(t)\leqslant s(t)$ для любого $t\in[a, b]$ T — множество всех непрерывных функций, заключенных между $i(t)$ и $s(t)$; $x(t)\in T, x(t)\in C[a, b]$. Тогда*

$$\rho(x, T)=\max\{\max_t\{x(t)-s(t)\};\ \max_t\{i(t)-x(t)\}\}. \tag{10}$$

Доказательство. Предположим, что $\max\limits_t\{x(t)-s(t)\}=x(t_0)-s(t_0)$, а $\max\limits_t\{i(t)-x(t)\}=i(t_1)-x(t_1)$, причем

$$x(t_0)-s(t_0)\geqslant i(t_1)-x(t_1).$$

Покажем вначале, что

$$\inf_{y\in T}\max_t\{x(t)-y(t)\}=x(t_0)-s(t_0). \tag{11}$$

С одной стороны

$$\inf_{y\in T}\max_t\{x(t)-y(t)\}\geqslant\max_t\inf_{y\in T}\{x(t)-y(t)\}=$$
$$=\max_t\{x(t)-\sup_{y\in T}y(t)\}=\max_t\{x(t)-s(t)\}=x(t_0)-s(t_0). \tag{12}$$

Чтобы доказать обратное соотношение, рассмотрим функции

$$x_1(t)=x(t)-x(t_0)+s(t_0)$$

и

$$x_2(t)=x(t)-x(t_1)+i(t_1).$$

Очевидно,

$$\max_t\{x(t)-x_1(t)\}=x(t_0)-s(t_0),$$

а

$$\max_t\{x_2(t)-x(t)\}=i(t_1)-x(t_1)$$

Функция $\max\{x_1(t), i(t)\}$ полунепрерывна сверху, а функция $\min\{x_2(t), s(t)\}$ снизу. Согласно теореме об отделении полунепрерывных функций существует непрерывная функция $y(t)$ такая, что

$$\max\{x_1(t), i(t)\} \leqslant y_0(t) \leqslant \min\{x_2(t), s(t)\}.$$

Из теоремы 1 следует, что $y_0(t) \in T$. Отсюда также получается неравенство

$$\max_t\{x(t) - y_0(t)\} \leqslant \max_t\{x(t) - x_1(t)\} = x(t_0) - s(t_0), \tag{13}$$

тем более

$$\inf_y \max_t\{x(t) - y(t)\} \leqslant x(t_0) - s(t_0). \tag{14}$$

Из (12) и (14) получаем (11).

Покажем теперь, что $\rho(x, T) = x(t_0) - s(t_0)$. Так как $x_1(t_0) = s(t_0) \geqslant i(t_0)$, то $y_0(t_0) = s(t_0)$ и поэтому $x(t_0) - y(t_0) = x(t_0) - s(t_0)$. Из (13) вытекает, что

$$\max_t\{x(t) - y_0(t)\} = x(t_0) - s(t_0). \tag{15}$$

Поскольку $x(t_0) - s(t_0) \geqslant i(t_1) - x(t_1)$ и, кроме того,

$$\max_t\{y_0(t) - x(t)\} \leqslant \max_t\{x_2(t) - x(t)\} = i(t_1) - x(t_1),$$

то из (15) получается

$$\max_t\{x(t) - y_0(t)\} = \max|x(t) - y_0(t)| = x(t_0) - s(t_0),$$

т. е.

$$\rho(x, y_0) = x(t_0) - s(t_0).$$

Но

$$\rho(x, T) \geqslant x(t_0) - s(t_0).$$

Значит

$$\rho(x, T) = x(t_0) - s(t_0) = \max\{\max_t\{x(t) - s(t), \max_t\{i(t) - x(t)\}\}.$$

Случай, когда $i(t_1) - s(t_1) \geqslant x(t_0) - s(t_0)$, рассматривается аналогично. Лемма доказана полностью.

Теорема 3. *Множество T чебышевских центров ограниченного множества $V \subset C[a, b]$ сильно устойчиво.*

Доказательство. Мы докажем насколько большее, а именно покажем, что если хаусдорфово расстояние между двумя множествами V_1 и V_2 не превышает произвольного $\varepsilon > 0$, то хаусдорфово расстояние между множествами T_1 и T_2 из чебышевских центров не превышает 2ε.

Пусть $y_1(t) \in T_1$, но $y_1(t) \in T_2$. Обозначим

$$i_k(t) = N_k(t) - r_k; \quad s_k(t) = n_k(t) + r_k \quad (k = 1, 2).$$

Согласно лемме 4,

$$\rho(y_1, T_2) = \max\{\max_t\{y_1(t) - s_2(t)\}, \max_t\{i_2(t) - y_1(t)\}\}.$$

Допустим, что

$$\rho(y_1, T_2) = \max_t\{y_1(t) - s_2(t)\} = y_1(t_0) - s_2(t_0).$$

Тогда

$$|y_1(t_0) - s_2(t_0)| = y_1(t_0) - s_2(t_0) \leqslant s_1(t_0) - s_2(t_0) = |s_1(t_0) - s_2(t_0)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ввиду производительности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $\rho(T_1, T_2) \leqslant 2\varepsilon$. Случай, когда $\rho(y_1, T_2) = \max\limits_t \{i_2(t) - y_1(t)\}$ доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гаркави. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве. Изв. АН СССР, т. 26, 1962, стр. 87—106.

2. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. ОНТИ, 1937.

3. П. К. Белобров. О чебышевской точке системы множеств. Изв. вузов, серия матем., № 6,55, 1966.

4. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. ГИТТЛ, М., 1957.

Поступила 30 сентября 1967 г.