ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Вып. 7 1968

ВЫРОЖДЕННЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ КОШИ ДЛЯ БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В. А. Какичев

В данном сообщении систематически используются без дополнительных ссылок результаты и обозначения из работы автора [1].

Уравнение

$$\alpha\varphi + \beta S_t\varphi + \gamma S_\omega\varphi + \delta S_\varphi = f(t\ \omega),\ \ (t,\omega) \in C x \Gamma \tag{0.1}$$

в работе [2] было названо нормальным, если

$$\Delta = (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \neq 0,$$

где α, β, γ, δ — функции точек остова $C \times \Gamma$ бицилиндрической области $D^+ \times \Delta^+$ ($C = \partial D^+$, $\Gamma = \partial\Delta^+$, $(0, 0) \in D^+ \times \Delta^+$), удовлетворяющие на нем условию Гельдера, S_t (S_ω) — одномерный сингулярный оператор с ядром Коши $1/2\pi i\,(t_1 - t)$, $t_1, t \in C$ $(1/2\pi i\,(\omega_1 - \omega)$, $\omega_1, \omega \in \Gamma)$, а $S = S_t S_\omega = S_\omega S_t$ — двумерный сингулярный оператор.

Ниже будет дано в замкнутом виде решение шести сингулярных интегральных уравнений вида (0.1), вырожденных в том смысле, что $\Delta \equiv 0$ на $C \times \Gamma$. Это следующие уравнения:

$$a(I \pm S)\varphi + b(S_\omega \pm S_t)\varphi = f; \tag{0.2}$$

$$a(I \pm S_\omega)\varphi + b(S_t \pm S)\varphi = f; \tag{0.3}$$

$$a(I \pm S_t)\varphi + b(S_\omega \pm S)\varphi = f, \tag{0.4}$$

где $I_\varphi \equiv \varphi$, a, b, и $f \in H$, т. е. удовлетворяют на $C \times \Gamma$ условию Гельдера. Все результаты, относящиеся к уравнениям (0.4), очевидно, могут быть получены простой перефразировкой соответствующих результатов, относящихся к уравнениям (0.3), поэтому исследованию подлежат только уравнения (0.2) и (0.3).

Вырожденные уравнения (0.2) — (0.4) будем называть нормальными, если $b^2 - a^2 \neq 0$. Ниже рассматриваются только нормальные вырожденные уравнения, и это дает возможность, не ограничивая общности, предположить, что $b^2 - a^2 = 1$.

Полагая

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{\varphi(t,\omega)\, dt d\omega}{(t - z)(\omega - w)} \equiv K(\varphi) \tag{0.5}$$

и используя формулы Сохоцкого для таких интегралов (см., например [3]) найдем, что верхнее (нижнее) уравнение (0.2) равносильно [2] вырожденной краевой задаче линейного сопряжения [1]:

$$\begin{gathered} \Phi^{++}(t,\omega) = G_1(t,\omega)\Phi^{--}(t,\omega) + g_1(t,\omega); \\ (\Phi^{+-}(t,\omega) = G_2(t,\omega)\Phi^{-+}(t,\omega) + g_2(t,\omega)), \end{gathered} \tag{0.6}$$

где

$$\begin{gathered}G_1=\frac{b-a}{b+a}=(b-a)^2\in H,\ g_1=\frac{f}{2(b+a)}=\frac{f}{2}(b-a)\in H;\\ \left(G_2=\frac{b+a}{b-a}=(b+a)^2\in H,\ g_2=\frac{f}{2(b-a)}=\frac{f}{2}(b+a)\in H\right).\end{gathered}\tag{0.7}$$

При этом в силу (0.5) надо отыскивать решения задачи (0.6) исчезающие во всех бесконечно удаленных точках, т. е. решения класса H^{++} и H_0^{--} $(H_0^{\pm\mp})$.

Аналогично верхнее (нижнее) уравнение (0,3) равносильно задаче линейного сопряжения

$$\Phi^{++}=G_3\Phi^{-+}+g_1\,(\Phi^{+-}=G_3\Phi^{--}+g_3),\tag{0.8}$$

а верхнее (нижнее) уравнение (0.4) — задаче

$$\Phi^{++}=G_3\Phi^{+-}+g_1\,(\Phi^{-+}=G_3\Phi^{--}+g_3),\tag{0.9}$$

где $G_3=-G_1$, $g_3=-g_1$ и, как и в задаче (0.6), надо брать только решения, исчезающие в бесконечно удаленных точках.

Обратно, например, задаче (0.6) соответствует уравнение вида (0.2) в следующей форме:

$$\begin{gathered}(1-G_1)(I+S)\varphi+(1+G_1)(S_\omega+S_t)\varphi=4g_1,\\ ((1-G_2)(I-S)\varphi+(1+G_2)(S_\omega-S_t)\varphi=4g_2).\end{gathered}$$

Наконец, положим

$$\begin{gathered}l_k=\operatorname{Ind}_C G_k,\ \lambda_k=\operatorname{Ind}_\Gamma G_k,\ G_{k0}=t^{-l_k}\omega^{-\lambda_k}G_k;\\ \gamma_{k0}=K(\ln G_{k0}),\ k=1,2,3.\end{gathered}\tag{0.10}$$

§ 1. Решение уравнений (0.2)

Однородная (0.6) задача $(g_k(t,\omega)\equiv 0,\ k=1,2)$ разрешима при выполнении следующего необходимого и достаточного условия:

$$\ln G_{10}=S(\ln G_{10})\,(\ln G_{20}=-S(\ln G_{20})).\tag{1.1}$$

Это условие будем предполагать всегда выполненным.

Вырожденная неоднородная задача (0.6) имеет решение только при выполнении необходимого и достаточного условия

$$\frac{g_1}{\chi_1^{++}}=S\left(\frac{g_1}{\chi_1^{++}}\right)\left(\frac{g_2}{\chi_2^{+-}}=-S\left(\frac{g_2}{\chi_2^{+-}}\right)\right),\tag{1.2}$$

где (см. [1])

$$\begin{gathered}\chi_1^{++}(t,\omega)=e^{\gamma_{10}^{++}(t,\omega)}=Z_1(t,\omega)\sqrt{G_1(t,\omega)},\\ (\chi_2^{+-}(t,\omega)=\omega^{-\lambda_2}e^{-\gamma_{20}^{+-}(t,\omega)}=Z_2(t,\omega)\sqrt{G_2(t,\omega)})\end{gathered}\tag{1.3}$$

и

$$\begin{gathered}Z_1(t,\omega)=\sqrt{t^{-l_1}\omega^{-\lambda_1}e^{S_t(\ln G_{10})}},\\ (Z_2(t,\omega)=\sqrt{\omega^{\lambda_2}t^{-l_2}e^{S_t(\ln G_{20})}}),\end{gathered}\tag{1.4}$$

так как из (1.1) и (0.10) следует

$$\gamma_{10}^{++}(t,\omega)=\frac{1}{4}(J+S_t+S_\omega+S)(\ln G_{10})=\frac{1}{2}(J+S_t)(\ln G_{10})$$

$$\left(\gamma_{20}^{+-}(t,\omega)=-\frac{1}{4}(J+S_t-S_\omega-S)(\ln G_{20})=-\frac{1}{2}(J+S_t)(\ln G_{20})\right)$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln G_{k0}} = \sqrt{\frac{G_k(t, \omega)}{t^{l_k}\omega^{\lambda_k}}}, \quad k = 1, 2.$$

Аналогично найдем, что

$$\chi_1^{--}(t, \omega) = t^{-l_1}\omega^{-\lambda_1}e^{\overline{\gamma_{10}}^{--}(t, \omega)} = Z_1(t, \omega)/\sqrt{G_1(t, \omega)},$$
$$\left(\chi_2^{-+}(t, \omega) = t^{-l_2}e^{\overline{\gamma_{20}}^{-+}(t, \omega)} = Z_2(t, \omega)/\sqrt{G_2(t, \omega)}\right) \tag{1.5}$$

и, следовательно,

$$Z_1(t, \omega) = (b + a)\chi_1^{++} = (b - a)\chi_1^{--},$$
$$(Z_2(t, \omega) = (b + a)\chi_2^{-+} = (b - a)\chi_2^{+-}). \tag{1.6}$$

Используя (1.6), найдем, что

$$\frac{g_1}{\chi_1^{++}} = \frac{f}{2Z_1}\left(\frac{g_2}{\chi_2^{+-}} = \frac{f}{2Z_2}\right),$$

и, значит, условие (1.2) можно записать так:

$$\frac{f}{Z_1} = S\left(\frac{f}{Z_1}\right)\left(\frac{f}{Z_2} = S\left(\frac{f}{Z_2}\right)\right). \tag{1.7}$$

Положим

$$\Psi_k(z, w) = K\left(\frac{f}{2Z_k}\right), \quad k = 1,2. \tag{1.8}$$

Условие (1.7) равносильно тому, что

$$\frac{g_1}{\chi_1^{++}} = \frac{f}{2Z1} = \Psi_1^{++}(t, \omega) + \Psi_1^{--}(t, \omega),$$
$$\left(\frac{g_2}{\chi_2^{+-}} = \frac{f}{2Z_2} = \Psi_2^{-+}(t, \omega) + \Psi_2^{+-}(t, \omega)\right), \tag{1.9}$$

или, что то же самое, $\Psi_1^{\pm\mp}(z, w) = 0$ $(\Psi_2^{\pm\pm}(z, w) = 0$. Последнее утверждение можно записать и так:

$$\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_1}\frac{t^{s-1}}{\omega^\sigma}dtd\omega = \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_1}\frac{\omega^{\sigma-1}}{t^s}dtd\omega = 0,$$
$$\left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_2}\frac{dtd\omega}{t^s\omega^\sigma} = \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_2}t^{s-1}\omega^{\sigma-1}dtd\omega = 0\right), \tag{1.10}$$
$$s, \sigma = 1, 2, \ldots$$

т. е. условия (1.7) и (1.10) равносильны.

Допустим, что выполняются условия (1.1) и (1.10), тогда при $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ $(l_2 \geqslant 0,\ \lambda_2 \leqslant 0)$ совокупность всех решений задачи (0.6) в классе H^{++}, H_0^{--} $(H_0^{\pm\mp})$ дает формула

$$\Phi_{s\sigma}^{\pm\pm}(z, w) = \chi_1^{\pm\pm}[\pm\Psi_1^{\pm\pm} + z^{s-1}\omega^{\sigma-1}], \quad \begin{matrix} s = 1, \ldots, l_1 \\ \sigma = 1, \ldots, \lambda_1 \end{matrix}$$
$$\left(\Phi_{s\sigma}^{\pm\pm}(z\ w) = \chi_2^{\pm\mp}\left[\mp\Psi_2^{\mp\mp} + z^{s-1}w^{\sigma-1}\right], \quad \begin{matrix} s = 1, \ldots, l_2 \\ \sigma = 1, \ldots, -\lambda_2 \end{matrix}\right). \tag{1.11}$$

Совокупность решений исходного верхнего (нижнего) уравнения (0.2) получим по формуле

$$\varphi_{s\sigma}(t,\ \omega) = \Phi_{s\sigma}^{++}(t,\ \omega) + \Phi_{s\sigma}^{--}(t,\ \omega),$$
$$(\varphi_{s\sigma}(t,\ \omega) = -\Phi_{s\sigma}^{+-}(t,\ \omega) - \Phi_{s\sigma}^{-+}(t,\ \omega)).$$

Так как в силу (1.3) — (1.5)

$$\chi_1^{++} + \chi_1^{--} = 2bZ_1\,(\chi_2^{+-} + \chi_2^{-+} = 2bZ_2)$$

и в силу (1.1) — (1.6)

$$\chi_1^{++}\Psi_1^{++} - \chi_1^{--}\Psi_1^{--} = -\frac{af}{2} + \frac{bZ_1}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_1}\right),$$
$$\left(\chi_2^{+-}\Psi_2^{+-} - \chi_2^{-+}\Psi_2^{-+} = -\frac{af}{2} - \frac{bZ_2}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_2}\right)\right),$$

то вся совокупность линейно независимых решений верхнего (нижнего) уравнения (0.2) при $l_1 \geqslant 0,\ \lambda_1 \geqslant 0\ (l_2 \geqslant 0,\ \lambda_2 \leqslant 0)$ дается формулами

$$\begin{gathered}\varphi_{s\sigma}(t,\ \omega) = -\frac{af}{2} + \frac{bZ_1}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_1}\right) + bZ_1 t^{s-1}\omega^{\sigma-1},\ \begin{matrix} s = 1,\ \ldots,\ l_1, \\ \sigma = 1,\ \ldots,\ \lambda_1, \end{matrix} \\ \left(\varphi_{s\sigma}(t,\ \omega) = -\frac{af}{2} - \frac{bZ_2}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_2}\right) + bZ_2 t^{s-1}\omega^{\sigma-1},\ \begin{matrix} s = 1,\ \ldots,\ l_2, \\ \sigma = 1,\ \ldots,\ -\lambda_2 \end{matrix}\right).\end{gathered} \tag{1.12}$$

Пусть теперь по-прежнему выполняются условия (1.1) и (1.10), но $l_1 < 0,\ \lambda_1 \geqslant 0\ (l_2 < 0,\ \lambda_2 \leqslant 0)$. Тогда решение задачи (0.6) дает формула

$$\Phi^{\pm\pm} = \pm\chi_1^{\pm\pm}\Psi_1^{\pm\pm}\ (\Phi^{\pm\mp} = \pm\chi_2^{\pm\mp}\Psi_2^{\pm\mp})$$

при выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости

$$\begin{gathered}\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_1} t^{s-1}\omega^{\sigma-1}\,dt\,d\omega = 0,\ \begin{matrix} s = 1,\ 2,\ \ldots,\ -l_1, \\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots \end{matrix} \\ \left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_2}\frac{t^{s-1}}{\omega^{\sigma}}\,dt\,d\omega = 0,\ \begin{matrix} s = 1,\ 2,\ \ldots,\ -l_2, \\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots \end{matrix}\right).\end{gathered} \tag{1,13}$$

При выполнении условий (1.1), (1.10) и (1.13) единственное решение верхнего (нижнего) уравнения (0.2) дается формулой

$$\varphi = -\frac{af}{2} + \frac{bZ_1}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_1}\right)\left(\varphi = -\frac{af}{2} - \frac{bZ_2}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_2}\right)\right). \tag{1.14}$$

Далее, если $l_1 \geqslant 0,\ \lambda_1 < 0\ (l_2 \geqslant 0,\ \lambda_2 < 0)$, то при выполнении условий (1.1), (1.10) и условий

$$\begin{gathered}\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_1} t^{s-1}\omega^{\sigma-1}\,dt\,d\omega = 0,\ \begin{matrix} s = 1,\ 2,\ \ldots, \\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ -\lambda_1, \end{matrix} \\ \left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_2}\frac{\omega^{\sigma-1}}{t^{s}}\,dt\,d\omega = 0,\ \begin{matrix} s = 1,\ 2,\ \ldots \\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ -\lambda_2 \end{matrix}\right)\end{gathered} \tag{1.15}$$

единственное решение верхнего (нижнего) уравнения (0.2) также определяется формулой (1.14).

Подведем итог.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* a *и* b *уравнения* (0.2), *удовлетворяют условию* (1.1). *Тогда*

1.1°. *Однородное верхнее (нижнее) уравнение* (0.2) *при* $l_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$ ($l_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$) *имеет* $\chi_1 = l_1\lambda_1$ ($\chi_2 = -l_2\lambda_2$) *линейно независимых решений*

$$\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = b(t, \omega) Z_1(t, \omega) t^{s-1}\omega^{\sigma-1}, \quad s = 1, \ldots, l_1, \quad \sigma = 1, \ldots, \lambda_1.$$

$$(\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = b(t, \omega) Z_2(t, \omega) t^{s-1}\omega^{\sigma-1}, \quad s = 1, \ldots, l_2, \quad \sigma = 1, \ldots -\lambda_2).$$

а при всех остальных значениях l_1 и λ_1 (l_2 и λ_2) *оно неразрешимо, т. е. имеет только тривиальные решения.*

1.2°. *Неоднородное верхнее (нижнее) уравнение* (0.2) *при* $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ ($l_2 \geqslant 0$, $\lambda_2 \leqslant 0$) *разрешимо, если его правая часть* f *удовлетворяет счетному множеству необходимых и достаточных условий разрешимости* (1.10); *оно имеет* $\varkappa_1$ ($\varkappa_2$) *линейно независимых решений, определяемых по формуле* (1.12).

1.3°. *Если* а) $l_1 < 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ ($l_2 < 0$, $\lambda_2 \leqslant 0$), б) $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 < 0$ ($l_2 \geqslant 0$, $\lambda_2 > 0$), в) $l_1 < 0$, $\lambda_1 < 0$ ($l_2 < 0$, $\lambda_2 > 0$), *то неоднородное верхнее (нижнее) уравнение* (0.2) *имеет единственное решение* (1.14) *лишь в том случае, когда* f *удовлетворяет соответственно необходимым и достаточным условиям* (1.10) *и* (1.13) *в случае* а) *условиям* (1.10) *и* (1.15) *в случае* б) *и условиям* (1.10), (1.13) и (1.15) *в случае* в).

§ 2. Решение уравнений (0.3)

Однородная задача (0.8) разрешима при выполнении необходимого и достаточного условия

$$\ln G_{30} = S_\omega(\ln G_{30}) \; (\ln G_{30} = -S_\omega(\ln G_{30})). \tag{2.1}$$

Неоднородная задача (0.8) может иметь решения только при выполнении необходимых и достаточных условий (2.1) и условий*

$$\frac{g_1}{\chi_3^{++}} = S_\omega\left(\frac{g_1}{\chi_3^{++}}\right) \left(\frac{g_3}{\chi_3^{+-}} = -S_\omega\left(\frac{g_3}{\chi_3^{+-}}\right)\right), \tag{2.2}$$

где, как видно из (0.10) и (2.2),

$$\chi_3^{++}(t, \omega) = e^{\overset{++}{\gamma_{30}}(t, \omega)} = \sqrt{t^{-l_3\omega-\lambda_3 e^{S_t(\ln G_{30})}} G_3(t, \omega)} \equiv \equiv Z_3(t, \omega)\sqrt{G_3(t, \omega)}; \tag{2.3}$$

$$(\chi_3^{+-}(t, \omega) = e^{-\overset{+-}{\gamma_{30}}(t, \omega)} = Z_3(t, \omega)\sqrt{G_3(t, \omega)}).$$

Аналогично найдем, что

$$\chi_3^{-+}(t, \omega) = t^{-l_3\omega-\lambda_3 e^{-\overset{-+}{\gamma_{30}}(t, \omega)}} = Z_3(t, \omega)/\sqrt{G_3(t, \omega)} \tag{2.4}$$

$$(\chi_3^{--}(t, \omega) = t^{-l_3\omega-\lambda_3 e^{-\overset{--}{\gamma_{30}}(t, \omega)}} = Z_3(t, \omega)/\sqrt{G_3(t, \omega)}),$$

где

$$iZ_3(t, \omega) = (b + a)\chi_3^{++} = (b - a)\chi_3^{+-}, \tag{2.5}$$

$$(iZ_3(t, \omega) = (b + a)\chi_3^{-+} = (b - a)\chi_3^{--}).$$

Как и в § 1, используя (2.3) и (2.5), условие (2.2) можем записать так:

$$\frac{f}{Z_3} = S_\omega\left(\frac{f}{Z_3}\right) \left(\frac{f}{Z_3} = -S_\omega\left(\frac{f}{Z_3}\right)\right) \tag{2.6}$$

---

* Надо иметь в виду, что $\chi_3^{\pm\pm}$ и $\chi_3^{\pm\mp}$ не имеют ничего общего друг с другом и относятся к разным задачам, хотя функция $G_3(t, \omega)$ у них общая и, следовательно, функция $Z_3(t, \omega)$ одна и та же.

или

$$\frac{g_1}{\chi_3^{++}} = \frac{f}{2Z_3} = \Psi_3^{++} - \Psi_3^{-+},$$
$$\left(\frac{g_3}{\chi_3^{+-}} = \frac{f}{2Z_3} = \Psi_3^{--} - \Psi_3^{+-}\right), \tag{2.7}$$

где

$$\Psi_3(z, w) = K\left(\frac{f}{2Z_3}\right).$$

Условие (2.7) равносильно счетному множеству условий

$$\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3}\frac{\omega^{\sigma-1}}{t^s}\,dtd\omega = \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3} t^{s-1}\omega^{\sigma-1}dtd\omega = 0,$$
$$\left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3}\frac{dtd\omega}{t^s\omega^\sigma} = \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3}\frac{t^{s-1}}{\omega^\sigma}\,dtd\omega = 0\right). \tag{2.8}$$
$$s, \sigma = 1, 2, \ldots,$$

Пусть выполняются условия (2.1) и f удовлетворяет условиям (2.3), тогда вся совокупность линейно независимых решений задачи (10.8) при $l_3 > 0$ и $\lambda_3 \leqslant 0$ ($\lambda_3 \geqslant 0$) может быть записана так:

$$\Phi_{s\sigma}^{\substack{++\\-+}}(z, w) = \chi_3^{\substack{++\\-+}}[\Psi_3^{\substack{++\\-+}} + z^{s-1}w^{\sigma-1}],$$
$$\left(\Phi_{s\sigma}^{\substack{+-\\--}}(z, w) = -\chi_3^{\substack{+-\\--}}\left[\Psi_3^{\substack{+-\\--}} + z^{s-1}\omega^{-\sigma}\right)\right], \tag{2.9}$$
$$s = 1, 2, \ldots, l_3, \quad \sigma = 1, 2, \ldots,$$

а решения верхнего (нижнего) уравнения (0.3) получены по формуле

$$\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = \Phi_{s\sigma}^{++}(t, \omega) - \Phi_{s\sigma}^{-+}(t, \omega),$$
$$(\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = \Phi_{s\sigma}^{--}(t, \omega) - \Phi_{s\sigma}^{+-}(t, \omega)).$$

После несложных преобразований с учетом соотношений (2.1) — (2.7) будем иметь

$$\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = -\frac{bf}{2} + \frac{aZ_3}{2}S_t\left(\frac{f}{Z_3}\right) + bZ_3 t^{s-1}\omega^{\sigma-1},$$
$$\left(\varphi_{s\sigma}(t, \omega) = \frac{af}{2} - \frac{bZ_3}{2}S_t\left(\frac{f}{Z_3}\right) + bZ_3 t^{s-1}\omega^{-\sigma}\right). \tag{2.10}$$
$$s = 1, 2, \ldots, l_3, \quad \sigma = 1, 2, \ldots$$

Если же $l_3 > 0$ и $\lambda_3 > 0$ ($\lambda_3 < 0$), то совокупность решений верхнего (нижнего) уравнения (0.3) дает также формула (2.10) при $s = 1, 2, \ldots, l_3$, $\sigma = \lambda_3, \lambda_3 + 1, \ldots$ ($\sigma = -\lambda_3 + 1, -\lambda_3 + 2, \ldots$), если правая часть f удовлетворяет счетному множеству необходимых и достаточных условий разрешимости

$$\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3}\frac{t^{s-1}}{\omega^\sigma}dtd\omega = 0, \quad \begin{matrix} s = 1, 2, \ldots, \\ \sigma = 1, 2, \ldots, \lambda_3 \end{matrix}$$
$$\left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3} t^{s-1}\omega^{\sigma-1}dtd\omega = 0, \quad \begin{matrix} s = 1, 2, \ldots, \\ \sigma = 1, 2, \ldots, -\lambda_3 \end{matrix}\right) \tag{2.11}$$

Если f удовлетворяет условиям (2.8), но $l_3 < 0$, то задача (0.8), а значит и уравнение (0.3), вообще говоря, неразрешимы. Допустим, что при этом $\lambda_3 \leqslant 0$ ($\lambda_3 \geqslant 0$) и функция f удовлетворяет еще условиям

$$\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3} \frac{t^{s-1}}{\omega^{\sigma}} dt d\omega = 0,$$

$$\left(\int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f}{Z_3} t^{s-1}\omega^{\sigma-1} dt d\omega = 0 \right), \tag{2.12}$$

$$s = 1,\ 2,\ \ldots,\ -l_3,\quad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,$$

тогда единственное решение верхнего (нижнего) уравнения (0.3) дает формула

$$\varphi = -\frac{bf}{2} + \frac{aZ_3}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_3}\right) \left(\varphi = \frac{af}{2} - \frac{bZ_3}{2} S_t\left(\frac{f}{Z_3}\right)\right). \tag{2.13}$$

Итак, нами доказана

Теорема 2. *Пусть коэффициенты a и b уравнения* (0.3) *удовлетворяют условию* (2.1), *тогда*

2.1°. *Однородное верхнее (нижнее) уравнение* (0.3) *при* $l_3 > 0$ *имеет счетное множество линейно независимых решений*

$$\varphi_{s\sigma}(t,\omega) = b(t,\omega) Z_3(t,\omega) t^{-1}\omega^{\sigma-1},$$
$$(\varphi_{s\sigma}(t,\omega) = b(t,\omega) Z_3(t,\omega) t^{s-1}\omega^{-\sigma}),$$
$$s = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_3,$$

где $\sigma = 1,\ 2,\ \ldots$ *при* $\lambda_3 \leqslant 0\ (\lambda_3 \geqslant 0)$ и $\sigma = \lambda_3,\ \lambda_3 + 1,\ \ldots\ (\sigma = -\lambda_3 + 1,\ -\lambda_3 + 2,\ \ldots)$ *при* $\lambda_3 > 0\ (\lambda_3 < 0)$; *при* $l_3 < 0$ *это уравнение неразрешимо.*

2.2°. *Неоднородное верхнее (нижнее) уравнение* (0.3), *правая часть* f *которого удовлетворяет необходимым и достаточным условиям* (2.8) *при* $l_3 > 0$ *имеет счетное число линейно независимых решений, определяемых по формуле* (2.10) *при* $\lambda_3 \leqslant 0\ (\lambda_3 \geqslant 0)$; *если же* $\lambda_3 > 0\ (\lambda_3 < 0)$, *то решения определяются по той же формуле* (2.10) *при* $\sigma = \lambda_3,\ \lambda_3 + 1,\ \ldots (\sigma = -\lambda_3 + 1,\ -\lambda_3 + 2,\ \ldots)$ и $s = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_3$.

2.3°. *Если правая часть* f *верхнего (нижнего) уравнения* (0.3) *при* $l_3 < 0$ *удовлетворяет необходимым и достаточным условиям разрешимости* (2.8), *то при* $\lambda_3 \leqslant 0\ (\lambda_3 \geqslant 0)$ *и выполнении необходимых и достаточных условий* (2.12), *а при* $\lambda_3 > 0\ (\lambda_3 < 0)$ *и выполнении необходимых и достаточных условий* (2.11) *и* (2.12), *уравнение* (0.3) *имеет единственное решение, определяемое по формуле* (2.13).

Замечание. Результаты, изложенные выше, с помощью несложных технических приемов распространяются на случай $n > 2$ переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

2. В. А. Какичев. О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для бицилиндрических областей. Изв. вузов МВО, серия матем., № 7 (62), 1967.

3. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Москва, 1963.

Поступила 18 сентября 1967