ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Вып. 7 1968

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛАХ

До Хонг Тан

Оперативным узлом неэрмитовости называется совокупность двух гильбертовых пространств H, E и трех операторов A, Γ, J, связанных соотношением

$$\frac{1}{i}(A - A^*) = \Gamma J \Gamma^*.$$

При этом предполагается, что оператор A действует из H в H, оператор J ($J = J^*$, $J^2 = I$) действует из E в E, а линейный ограниченный оператор Γ действует из E в H. Понятие операторного узла было введено М. С. Бродским и М. С. Лившицем. Операторные узлы играют важную роль в теории несамосопряженных операторов и открытых систем [1,2].

Два операторных узла будем называть эквивалентными, если они содержат один и тот же оператор A. Следовательно, для эквивалентных узлов имеет место равенство

$$\Gamma_1 J_1 \Gamma_1^* = \Gamma_2 J_2 \Gamma_2^*. \tag{1}$$

Так как в этом равенстве отсутствует оператор A, то в дальнейшем вместо эквивалентных узлов достаточно рассмотреть соответствующие им триады (E, J, Γ). При этом две триады называются эквивалентными, если для них выполняется равенство (1).

В настоящей заметке мы опишем класс всех эквивалентных триад, докажем единственность (в некотором смысле) минимальной триады этого класса и введем группу типов триад.

§ 1. Описание всех эквивалентных триад

Определение. Операцию, переводящую триаду $L = (E, J, \Gamma)$ в триаду $(E \dotplus E', J \dotplus J', \Gamma \dotplus O)$, где E' — произвольное пространство, а J' — произвольный оператор, удовлетворяющий условиям $J' = J'^*$, $J'^2 = I$, будем называть тривиальным удлинением, а обратную к ней операцию — тривиальным сокращением.

Определение. Операция, переводящая триаду L в $(E \dotplus E' \dotplus E', J \dotplus J' \dotplus (-J'), \Gamma \dotplus \Gamma' \dotplus \Gamma')$, называется нейтральным удлинением, а обратная к ней операция — нейтральным сокращением. В частности, если $\Gamma' = O$, то эти операции назовем тривиально нейтральным удлинением и сокращением.

Определение. Операцию, переводящую триаду L в $(UE, UJU^{-1}, \Gamma U^{-1})$, где U — изометрический оператор, будем называть обыкновенной операцией изометрии. Специальной операцией изометрии назовем операцию, которая переводит триаду $(E_1 \dotplus E_2, I \dotplus (-I), \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2)$ в $(E_1 \dotplus E_2, I \dotplus (-I), \Gamma_1 U_1 \dotplus \Gamma_2 U_2)$, где U_k — унитарные операторы в пространствах E_k ($k = 1, 2$) соответственно. В дальнейшем для краткости изложения обе эти операции назовем операциями изометрии.

Заметим, что все приведенные выше операции преобразуют триаду в эквивалентные ей триады.

Теорема 1. *Пусть* $L_k = (E_k,\ J_k,\ \Gamma_k)$ $(k = 1,\ 2)$ — *две эквивалентные триады. Тогда с помощью операций изометрии, удлинения и сокращения из одной триады можно получить другую.*

Доказательство. В результате удлинения триады L_1 получим триаду $(E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} E_2,\ J_1 \dot{+} (-J_2) \dot{+} J_2,\ \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2 \dot{+} \Gamma_2)$. Теорема будет доказана, если мы приведем триаду $L_3 = (E\ ,J\ ,\Gamma)$, где $E = E_1 \dot{+} E_2$, $J = J_1 \dot{+} \dot{+} (-J_2)$, $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$, к тривиальному виду (0, 0, 0) при помощи указанных операций. Используя спектральное расположение оператора J, триаду L_3 можно представить в виде

$$L_4 = (E_+ \dot{+} E_-,\ I \dot{+} (-I),\ \Gamma_+ \dot{+} \Gamma_-),$$

где E_+ и E_- — собственные подпространства оператора J, принадлежащие соответственно собственным значениям $+1$ и -1, а $\Gamma_\pm = \Gamma|_{E_\pm}$.

Подпространства $E_\pm$ допускают разложения

$$E_\pm = E'_\pm \dot{+} \overset{\circ}{E}_\pm,$$

где символами $\overset{\circ}{E}_\pm$ обозначаются подпространства, на которых операторы $\Gamma_\pm$ соответственно обращаются в нуль. Таким образом, триада L_4 имеет вид

$$(E'_+ \dot{+} \overset{\circ}{E}_+ \dot{+} E'_- \dot{+} \overset{\circ}{E}_-,\ I \dot{+} I \dot{+} (-I) \dot{+} (-I),\ \Gamma'_+ \dot{+} 0 \dot{+} \Gamma'_- \dot{+} 0),$$

где $\Gamma'_\pm = \Gamma_\pm|_{E'_\pm}$. Отсюда в результате тривиального сокращения получим триаду

$$L_5 = (E'_+ \dot{+} E'_-,\ I \dot{+} (-I),\ \Gamma'_+ \dot{+} \Gamma'_-).$$

При этом, как легко видеть, $E'_\pm = \overline{\Gamma'^*_\pm H}$.

Из эквивалентности триад L_1 и L_2 вытекает, что для триады L_3 имеет место равенство $\Gamma J \Gamma^* = 0$. Отсюда, учитывая эквивалентность триад L_3 и L_5,

$$\Gamma'_+ \Gamma'^*_+ = \Gamma'_- \Gamma'^*_-. \tag{2}$$

На основании (2) получим соотношение

$$\|\Gamma'^*_+ \psi\|^2 = (\Gamma'^*_+ \psi,\ \Gamma'^*_+ \psi) = (\Gamma'_+ \Gamma'^*_+ \psi,\ \psi) =$$
$$= (\Gamma'_- \Gamma'^*_- \psi,\ \psi) = (\Gamma'^*_- \psi,\ \Gamma'^*_- \psi) = \|\Gamma'^*_- \psi\|^2,\ (\psi \in H).$$

Оператор U, сопоставляющий с вектором $\Gamma'^*_- \psi$ вектор $\Gamma'_+ \psi$, изометрично отображает $\Gamma'^*_+ H$ на $\Gamma'^*_- H$. Доопределяя оператор U на всем E'_+ по непрерывности, получим изометрический оператор, который снова обозначим через U. Таким образом, оператор Γ^*_- допускает представление в виде $\Gamma'^*_- = U \Gamma'^*_+$, где U — изометрический оператор, отображающий E'_+ на E'_-. Отсюда

$$\Gamma'_+ = \Gamma'_- U. \tag{3}$$

Подставляя (3) в триаду L_5, получим

$$(E'_+ \dot{+} E'_-,\ I \dot{+} (-I),\ \Gamma'_- U \dot{+} \Gamma'_-).$$

Из этой триады с помощью специальной операции изометрии и операции нейтрального сокращения получим тривиальную триаду (0, 0, 0). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что если $\Gamma J \Gamma^* = 0$, то для приведения триады $(E,\ J,\ \Gamma)$ к тривиальному виду операция удлинения оказывается излишней. Если, кроме того, $\dim E_+ = \dim E_- < \infty$, то операция тривиального сокращения также оказывается излишней.

§ 2. Единственность минимальной триады

Лемма. *Пусть имеется триада (E, J, Γ) с конечномерным пространством E. Обозначим через m, s и n — число положительных, равных нулю и отрицательных среди собственных значений оператора $\Gamma J \Gamma^*$ в ΓE, а через p и q — размерность подпространств ΓE_+ и ΓE_- соответственно. Тогда имеют место неравенства*

$$p \geqslant m + s, \quad q \geqslant n + s. \tag{4}$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. что $m + s > p$. Разложим подпространства $\Gamma J \Gamma^* H$ и ΓE на ортогональные суммы

$$\Gamma J \Gamma^* H = H_m \oplus H_n, \quad \Gamma E = H_m \oplus H_n \oplus H_s,$$

где H_m, H_n и H_s — собственные подпространства, принадлежащие положительным, отрицательным и нулевым собственным значениям оператора $\Gamma J \Gamma^*$ в ΓE. Из соотношения

$$(\Gamma^* \xi, \ E_+) = (\xi, \ \Gamma E_+) \quad (\xi \in H)$$

и предположения $m + s > p$ следует существование отличного от нуля вектора $\xi \in H_m \oplus H_s$ такого, что вектор $\eta = \Gamma^* \xi$ принадлежит E_-. Далее, из равенства

$$(\Gamma^* \xi, \ E) = (\xi, \ \Gamma E) \quad (\xi \in H)$$

вытекает, что вектор η также отличен от нуля.

Рассмотрим теперь следующее соотношение:

$$(\Gamma J \Gamma^* \xi, \ \xi) = (J\eta, \ \eta) = -(\eta, \ \eta) < 0.$$

С другой стороны имеем

$$(\Gamma J \Gamma^* \xi, \ \xi) \geqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает первую часть леммы. Аналогичным образом доказывается ее вторая часть.

Следствие. *Пересечение $\Gamma E_+ \cap \Gamma E_- = H_0$ пусто тогда и только тогда, когда $p = m$, $q = n$.*

Доказательство. Пусть $p = m$, $q = n$. Тогда из (4) следует, что $s = 0$. Отсюда

$$\dim \Gamma E = m + n = p + q = \dim \Gamma E_+ + \dim \Gamma E_-.$$

Следовательно, $H_0 = \{0\}$.

Пусть теперь $p > m$, $q \geqslant n$. Если $s = 0$, то

$$\dim \Gamma E = m + n < p + q = \dim \Gamma E_+ + \dim \Gamma E_-.$$

Если же $s \neq 0$, то из (4) следует, что

$$\dim \Gamma E = m + n + s < m + n + 2s \leqslant p + q = \dim \Gamma E_+ + \dim \Gamma E_-.$$

Следовательно, в обоих случаях $H_0 \neq \{0\}$.

Определение. Операцию, переводящую триаду (E, J, Γ) в $(E, J, \Gamma V)$, где V является J-унитарным оператором в E, будем называть J-вращением.

Определение. Пусть $L = (E, J, \Gamma)$ — произвольная триада. Введем следующие обозначения:

$$\dim \Gamma E_+ = p, \ \dim E_+ - \dim \Gamma E_+ = s_1,$$
$$\dim \Gamma E_- = q, \ \dim E_- - \dim \Gamma E_- = s_2.$$

Совокупность чисел $(p, s_1; q, s_2)$ будем называть индексом триады L.

Определение. Пусть $L=(E, J, \Gamma)$ — некоторая триада с конечномерным пространством E. Через K обозначим класс всех триад, полученных из L с помощью операций изометрии, нейтрального удлинения и сокращения. Минимальной триадой этого класса будем называть ту триаду $(\tilde{E}, \tilde{J}, \tilde{\Gamma})$ из K, у которой размерности пространств $\tilde{E}$, $\tilde{\Gamma}\tilde{E}_+$ и $\tilde{\Gamma}\tilde{E}_-$ минимальны.

Это определение равносильно следующему: триада называется минимальной, если она абсолютно несократима, т. е.

1) она не допускает никаких нейтральных сокращений;

2) после любого тривиально-нейтрального удлинения и операции изометрии она также не допускает нетривиально-нейтрального сокращения.

Ясно, что минимальная триада получается из исходной неоднозначно. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Минимальная триада определяется из исходной с точностью до изометрии и J-вращения.*

Доказательство. 1. Покажем сначала, что если триада является минимальной, то

$$\dim \Gamma E_+ = m, \ \dim \Gamma E_- = n, \tag{5}$$

где m и n — число положительных и отрицательных собственных значений оператора $\Gamma J \Gamma^*$.

Допустим противное, т. е. что условие (5) не выполняется. Тогда из следствия леммы вытекает существование отличного от нуля вектора $h\in H_0=\Gamma E_+\cap \Gamma E_-$. Этому вектору отвечают векторы $a_1\in E_+'$ и $a_2\in E_-$, причем

$$\Gamma a_1=\Gamma a_2 = h.$$

Если $|a_1|=|a_2|$, то после операции изометрии рассматриваемая триада допускает нетривиально-нейтральное сокращение. При этом полученная триада имеет индекс $(p-1,\ s_1;\ q-1,\ s_2)$.

Если же $|a_1|<|a_2|$, то сначала совершим тривиально-нейтральное удлинение: к E_+ прибавим одномерное пространство с ортом b_1, а к E_- — одномерное пространство с ортом b_2 и доопределим операторы Γ и J на этих пространствах следующим образом:

$$\Gamma b_1=\Gamma b_2=0;\ J b_1=b_1,\ J b_2=-b_2.$$

Тогда вектор $a_1'=a_1+b_1\sqrt{|a_2|^2-|a_1|^2}$ обладает свойствами

$$|a_1'|=|a_2|;\quad \Gamma a_1'=\Gamma a_2=h.$$

Поэтому после операции изометрии можно совершать сокращение. Тогда получим триаду с индексом $(p,\ s_1;\ q-1,\ s_2+1)$.

Аналогичным образом можно поступить, если $|a_1|>|a_2|$ и получить триаду с индексом $(p-1,\ s_1+1;\ q,\ s_2)$.

Следовательно, триада не может быть минимальной, если не выполнено условие (5). Вместе с этим получен один из способов приведения произвольной триады к минимальной.

2. Найдем теперь индекс минимальной триады. Заметим, что число

$$\dim E_+ - \dim E_- = (p+s_1)-(q+s_2)=r \tag{6}$$

является инвариантным относительно операций изометрии, нейтрального удлинения и сокращения. Поэтому для минимальной триады $(\tilde{E}, \tilde{J}, \tilde{\Gamma})$ имеет место равенство

$$m-n\pm t=r, \tag{7}$$

где t равняется разности $\dim \tilde{E}_+ - \dim \tilde{\Gamma}\tilde{E}_+$ или $\dim \tilde{E}_- - \dim \tilde{\Gamma}\tilde{E}_-$ в зависимости от знака $+$ или $-$ в (7). Отсюда, учитывая (6), получим

$$\pm t = r - m + n = p + s_1 + n - q - s_2 - m.$$

Если $p + s_1 + n \geqslant q + s_2 + m$, то минимальная триада имеет индекс

$$(m,\ p + s_1 + n - q - s_2 - m;\ n,\ 0).$$

Если же $p + s_1 + n < q + s_2 + m$, то индекс минимальной триады равен

$$(m,\ 0;\ n,\ q + s_2 + m - p - s_1 - n).$$

Заметим, что числа m и n одинаковы для всех эквивалентных триад, поэтому они вполне определяются из исходной триады. Следовательно, индекс минимальной триады определяется по исходной триаде.

3. Пусть L_1 и L_2 — две произвольные минимальные триады одного класса. Тогда на основании предыдущего они имеют одинаковый индекс. Пусть для определенности этот индекс равен $(m,\ 0;\ n,\ t)$. С точностью до изометрии можно считать, что

$$J_1 = J_2 = J = J' \dotplus (-I), \quad E_1 = E_2 = E' \dotplus E_0,$$
$$\Gamma_1 = \Gamma_1' \dotplus 0, \quad \Gamma_2 = \Gamma_2' \dotplus 0,$$

где E_0 — подпространство, на котором операторы Γ_1 и Γ_2 обращаются в нуль.

Из эквивалентности триад L_1 и L_2 следует, что

$$\Gamma_1' J' \Gamma_1'^* = \Gamma_2' J' \Gamma_2'^*. \tag{8}$$

Введем в E' индефинитную метрику, полагая

$$[f,\ g] = (J'f,\ g), \quad (f,\ g \in E').$$

Учитывая (8), получим

$$[\Gamma_1'^*\psi,\ \Gamma_1'^*\psi] = (J'\Gamma_1'^*\psi,\ \Gamma_1'^*\psi) = (\Gamma_1' J' \Gamma_1'^*\psi,\ \psi) =$$
$$= (\Gamma_2' J' \Gamma_2'^*\psi, \psi) = (J'\Gamma_2'^*\psi,\ \Gamma_2'^*\psi) = [\Gamma_2'^*\psi,\ \Gamma_2'^*\psi], \quad (\psi \in H).$$

Отсюда, как и раньше, имеем

$$\Gamma_1' = \Gamma_2' U',$$

где U' — изометрический оператор в индефинитной метрике.

Из соотношений

$$U'^+ U = I,\ U'^+ = J'U'^*J',$$

где U'^+ и U'^* — обозначаются операторы, сопряженные к U' в индефинитной и дефинитной метриках соответственно, следует, что

$$U'^* J' U' = J',$$

т. е. U' является J'-унитарным оператором в дефинитной метрике. Отсюда

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 U,$$

где $U = U' \dotplus I$ есть J-унитарный оператор. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается справедливой и в том случае, если K определяется как класс всех триад, эквивалентных триаде L. В силу теоремы 1 в этом классе допускается и операция тривиального сокращения. Поэтому минимальная триада имеет индекс $(m,\ 0;\ n,\ 0)$, и, следовательно, с точностью до изометрии для двух минимальных триад L_1 и L_2 имеем

$$J_1 = J_2 = J, \ E_1 = E_2 = E, \ \Gamma_1 = \Gamma_2 U,$$

где U — некоторый J-унитарный оператор.

§ 3. Группа типов триад

Пусть $M_k = \begin{pmatrix} A_k \Gamma_k J_k \\ H \quad E_k \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2)$ — два операторных узла с одним и тем же пространством H. Тогда сумма двух узлов определяется следующим образом:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 \dotplus A_2 & \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2 & J_1 \dotplus J_2 \\ H & & E_1 \dotplus E_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что эта сумма снова представляет собой узел. Совокупность $\begin{pmatrix} -A \ \Gamma - J \\ H \quad E \end{pmatrix}$ будем называть обратным узлом по отношению к $M = \begin{pmatrix} A\Gamma J \\ H \ E \end{pmatrix}$ и обозначим через M^-. Совокупность $\theta = \begin{pmatrix} 0 \ 00 \\ H \ 0 \end{pmatrix}$ назовем нулевым узлом. Так как

$$M + M^- = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \dotplus \Gamma & J \dotplus (-J) \\ H & & E \dotplus E \end{pmatrix} \neq \theta,$$

то множество операторных узлов не образует группы. Однако можно ввести группу классов узлов или группу типов триад, соответствующих этим узлам. Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Две триады принадлежат одному классу* K (см. определение в § 2) *тогда и только тогда, когда они эквивалентны и имеют одинаковую разность* $\dim E_+ - \dim E_-$.

Доказательство. Так как необходимость очевидна, то остается доказать достаточность. Пусть имеется две эквивалентные триады $L_k = (E_k, J_k, \Gamma_k)$ $(k = 1, 2)$, причем

$$\dim E_{1+} - \dim E_{1-} = \dim E_{2+} - \dim E_{2-}.$$

Тогда триада (E, J, Γ), где $E = E_1 \dotplus E_2$, $J = J_1 \dotplus (-J_2)$, $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2$, удовлетворяет условиям $\Gamma J \Gamma^* = 0$ и $\dim E_+ = \dim E_-$. Следовательно, на основании замечания теоремы 1 эту триаду можно привести к тривиальной, используя лишь операции изометрии и нейтрального сокращения. Отсюда видно, что триады L_1 и L_2 принадлежат одному классу K и теорема доказана.

Определение. Сумма триад $L_k = (E_k, J_k, \Gamma_k)$ $(k = 1, 2)$ определяется следующим образом:

$$L_1 + L_2 = (E_1 \dotplus E_2, \ J_1 \dotplus J_2, \ \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2).$$

Определение. Разность $\dim E_+ - \dim E_-$ называется характеристикой триады $L = (E, J, \Gamma)$. Две триады L_1 и L_2 называются однотипными ($[L_1] = [L_2]$), если они эквивалентны и имеют одинаковую характеристику. Из теоремы 3 следует, что две триады однотипны тогда и только тогда, когда из одной триады можно получить другую при помощи операции изометрии, нейтрального удлинения и сокращения. Общая характеристика r всех триад одного типа называется характеристикой этого типа.

Определим сумму типов триад следующим образом:

$$[L_1] + [L_2] = [L_1 + L_2].$$

Очевидно, что

$$[L_1]+[L_2]=[L_2]+[L_1],$$
$$([L_1]+[L_2])+[L_3]=[L_1]+([L_2]+[L_3]).$$

Триада $L=(E,\ J,\ \Gamma)$ называется нейтральной, если ее характеристика равна нулю и $\Gamma J\Gamma^*=0$. Все нейтральные триады принадлежат нулевому типу: $[L]=0$.

Обратной к L называется триада $L^-=(E,\ -J,\ \Gamma)$. Из равенства

$$[L]+[L^-]=[L+L^-]=0$$

следует, что $[L^-]=-[L]$.

Теперь очевидно, что множество типов триад образует коммутативную группу. Эту группу можно считать аналогом группы Витта для квадратичных форм [3].

Отметим, что для операторных узлов неунитарности можно получить аналогичные результаты. При этом операторным узлом неунитарности называется совокупность двух пространств H, E и трех операторов T, Γ, J, связанных соотношением

$$I-TT^*=\Gamma J\Gamma^*.$$

Очевидно, что все результаты, полученные в § 1 и § 2 для этих узлов, получаются без изменений. Введем теперь группу типов узлов неунитарности. Пусть имеется два узла $Q_k=\begin{pmatrix} T_k & \Gamma_k & J_k \\ H & & E_k \end{pmatrix}$ $(k=1,\ 2)$. Их произведение определяется следующим образом:

$$Q_2\cdot Q_1=\begin{pmatrix} T_2T_1 & T_2\Gamma_1\dotplus\Gamma_2 & J_1\dotplus J_2 \\ H & & E_1\dotplus E_2 \end{pmatrix}.$$

Совокупность $\begin{pmatrix} T^{-1} & T^{-1}\Gamma & -J \\ H & & E \end{pmatrix}$ будем называть обратным узлом по отношению к узлу $Q=\begin{pmatrix} T & \Gamma & J \\ H & & E \end{pmatrix}$ и обозначать через Q^-. Совокупность $\tilde{I}=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ H & & 0 \end{pmatrix}$ назовем единичным узлом.

Два узла Q_1 и Q_2 называются однотипными ($[Q_1]=[Q_2]$), если они содержат один и тот же оператор T и имеют одинаковую разность $\dim E_+-\dim E_-$. Определим сумму типов узлов соотношением

$$[Q_1]+[Q_2]=[Q_1\cdot Q_2].$$

Как легко видеть,

$$([Q_1]+[Q_2])+[Q_3]=[Q_1]+([Q_2]+[Q_3]).$$

Из соотношения $[\tilde{I}]=0$ следует, что

$$[Q^-]=-[Q].$$

Очевидно, что множество типов узлов неунитарности с обратимыми операторами T образует группу.

Автор выражает глубокую признательность М. С. Лившицу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский и М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, т. XIII, вып. 1 (79), 1958, 3—85.
2. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд-во «Наука», 1966.
3. Н. Бурбаки. Алгебра (модули, кольца, формы). Изд-во «Наука», 1966.

Поступила 28 сентября 1967 г.