ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Ф. РИССА

В. И. Гукевич, И. Г. Соколов

Назовем систему $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ суммируемых с квадратом, действительных на $[a, b]$ функций почти ортогональной по Беллману [1], если

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1 \quad (k=1, 2,\ldots) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}^2 < \infty, \tag{2}$$

где $a_{ki} = \begin{cases} \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx, & k \neq i \\ 0 \quad , & k = i \end{cases}$

Пусть, далее

$$a_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx$$

суть коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$.

Теорема. *Пусть* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и $\{\varphi_n(x)\}$. *система почти ортогональных по Беллману функций, для которых*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M \quad (n=1, 2,\ldots)$$

почти всюду на $[a, b]$, *тогда:*

1°. *Из* $f \in L_p$ $(1 < p \leqslant 2)$ *и линейной независимости функций* $\varphi_n(x)$ *вытекает неравенство*

$$\left(\sum_1^{\infty}|a_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant M^{\frac{2-p}{p}}\left(1+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}^2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x)|^p o|x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2°. *Из* $\{b_k\} \in l_p$ $(1 < p \leqslant 2)$ *следует существование функции* $f \in L_{p'}$, *для которой выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_k - \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right|^{p'} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right)^{\frac{p'}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}|^{p'}.$$

Из 2° при $p=2$ *получаем неравенство Беллмана* [1]. *В случае же ортогональности системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *из 1° получаем известный результат Ф. Рисса* [2, стр. 237].

Доказательство 1°. Пусть $f \in L_p$ и λ есть точная нижняя грань интеграла $\int_a^b |f(t)|^p dt$ при условии, что $\sum_{k=1}^{r}|a_k|^{p'} = 1|$,

где r — фиксированное натуральное.

Точная нижняя грань достигается для некоторой функции $\bar{f}$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$\frac{\int_a^b |f(t)|^p dt}{\left(\sum_1^r |a_k|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}}} \geqslant \int_a^b |\bar{f}(t)|^p dt \text{ для всех } f \in L_p.$$

Полагая, далее, для всякой $f \in L_p$

$$f(t) = \bar{f}(t) + \eta h(t) \quad (h(t) \in L_p),$$

получаем

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} \bar{f}(t)\, h(t)\, dt - \int_a^b |\bar{f}(t)|^p dt \sum_{k=1}^r |\bar{a}_k|^{p'-1} h_k \operatorname{sign} \bar{a}_k = 0, \tag{3}$$

где $\bar{a}_k$ и h_k— коэффициенты Фурье функций $\bar{f}$ и h по системе $\{\varphi_k\}$. Доказательство этих утверждений производится в [2, стр. 237—242].

Обозначим через $\{g_i(t)\}$ систему ортонормированных функций, полученных из системы $\{\varphi_i(t)\}$ ортогонализацией (по Шмидту):

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = d_{11} g_1(t);\\
&\varphi_2(t) = d_{21} g_1(t) + d_{22} g_2(t); \qquad\qquad (A)\\
&\vdots\\
&\varphi_n(t) = d_{n1} g_1(t) + d_{n2} g_2(t) + \ldots\ d_{nn} g_n(t).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Из ортонормированности системы $\{g_i(t)\}$, а также условий 1° и 2° следует:

$$d_{i1}^2 + d_{i2}^2 + \ldots\ d_{ii}^2 = 1$$

и (B)

$$a_{si} = d_{s1} d_{i1} + d_{s2} d_{i2} + \ldots\ d_{si} d_{ii},$$

когда $s > i$.

Полагая в (3) $h(t)$ равным $g_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, получаем

$$c_s = \int_a^b F(t)\, g_s(t)\, dt = \lambda \sum_{k=1}^r |\bar{a}_k|^{p'-1} h_k^{(s)} \operatorname{sign} \bar{a}_k,$$

где

$$F(t) = |\bar{f}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} \bar{f}(t)$$

и $h_k^{(s)}$ коэффициенты Фурье функции g_s по системе $\{\varphi_k\}$.

Принимая во внимание (A), убеждаемся, что

$$h_k^{(s)} = \begin{cases} d_{ks}, & s \leqslant k \\ 0, & s > k. \end{cases}$$

Используя последнее, имеем

$$c_s = \begin{cases} \lambda \sum_{k=s}^r |\bar{a}_k|^{p'-1} d_{ks} \operatorname{sign} \bar{a}_k, & s \leqslant r \\ 0 & , s > r \end{cases}$$

Таким образом, функция $F(t)$ является конечной линейной комбинацией функций $\{g_k\}$ и, следовательно, принадлежит L_2. Записывая для нее равенство Парсеваля, получим

$$\int_a^b |F(t)|^2 dt = \int_a^b |\bar{f}(t)|^{2p-2} dt = \sum_{k=1}^r c_k^2 =$$
$$= \lambda^2 \sum_{k=1}^r \left(\sum_{s=k}^r |\bar{a}_s|^{p'-1} d_{sk} \operatorname{sign} \bar{a}_s \right)^2.$$

Принимая во внимание (В) и неравенство Шварца, найдем

$$\sum_{k=1}^r \left(\sum_{s=1}^r |\bar{a}_s|^{p'-1} d_{sk} \operatorname{sign} \bar{a}_s \right)^2 = \sum_{k=1}^r \sum_{s=k}^r \gamma_s^2 d_{sk}^2 + 2 \sum_{k=1}^r \sum_{s>l}^r \sum_{l=k}^{r-1} \gamma_s \gamma_l d_{sk} d_{lk} =$$
$$= \sum_{s=1}^r \gamma_s^2 + 2 \sum_{s>l}^r \sum_{l=1}^{r-1} \gamma_s \gamma_l a_{sl} \leqslant E \sum_{s=1}^r \gamma_s^2,$$

где $\gamma_s = |\bar{a}_s|^{p'-1} \operatorname{sign} \bar{a}_s$ и $E = 1 + \sqrt{\sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty a_{sl}^2}$.

Таким образом,

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{2p-2} dt \leqslant \lambda^2 E \sum_{s=1}^r |\bar{a}_s|^{2p-2}.$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в [2, стр. 241], устанавливаем неравенства

$$[\lambda(p_j)]^{\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_j}} \leqslant \lambda(p) E^{\beta_j} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

где $\lambda(p)$ минимум отношения

$$\frac{\int_a^b |f(t)|^p dt}{\left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}}} \quad (f \in L_p)$$

и

$$p_0 = p, \quad p_{j+1} = \frac{2}{3 - p_j}, \quad \beta_j = 1 - \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_j} \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Оценивая затем $\lambda(p)$ (см. там же) и принимая во внимание, что β_j — возрастающая последовательность и $\lim_{j \to \infty} \beta_j = p - 1$, приходим к неравенству

$$\lambda(p) \geqslant \frac{1}{M^{2-p} E^{p-1}},$$

справедливому для любого r.

Последнее доказывает 1°.

Доказательство 2° проводится аналогично случаю $p = 2$ [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., Almost orthogonal series, Bull. Amer. Math. Sos. 50 (1944), 517 — 519.
2. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. М., 1958.

Поступила 12 июля 1967 г.