ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Т. Г. Эзрохи

Мак Грегор [1] рассматривал класс F однолистных регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,$$

удовлетворяющих условию

$$|f'(z)-1|<1.$$

В настоящей заметке мы будем рассматривать класс F_β регулярных однолистных в круге $|z|<1$ функций, для которых

$$f'(z)=\frac{1+h}{p(z)+h},$$

где

$$h=\frac{1-\beta}{1+\beta},\quad -1<\beta\leqslant 1,\quad p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\mu(\theta),$$

а $\mu(\theta)$ неубывающая функция и $\int\limits_0^{2\pi}d\mu(\theta)=1.$

Отметим, что класс F_β может быть определен такими условиями:

$$\left|f'(z)-\frac{1}{1-\beta}\right|<\frac{1}{1-\beta},\quad f'(0)=1,\quad f(0)=0,\quad -1<\beta<1.$$

При $h=1$, т. е. $\beta=0$, получаем, как легко убедиться, класс F.

Нами установлены точные оценки кривизны линий уровня и ортогональных траекторий линий уровня, а также найден радиус выпуклости данного класса и другие оценки.

Теорема 1. *Если* $f(z)\in F_\beta$, *то для* $|z|\leqslant r$

$$|f'(z)-M(r,\beta)|\leqslant N(r,\beta), \tag{1}$$

где

$$M(r,\beta)=\frac{(1+h)(a+h)}{2ah+h^2+1},\quad N(r,\beta)=\frac{\rho(1+h)}{2ah+h^2+1},$$

$$a=\frac{1+r^2}{1-r^2},\quad \rho=\frac{2r}{1-r^2}\,^{*}.$$

Доказательство. Из определения класса F_β следует, что $\frac{1+h}{f'(z)}-h=p(z)$. Так как функция $p(z)$ отображает круг $|z|\leqslant r$ на круг $|p(z)-a|\leqslant\rho$ [2], то

$$\left|\frac{1}{f'(z)}-\frac{a+h}{1+h}\right|\leqslant\frac{\rho}{1+h}.$$

* Принятыми обозначениями мы будем пользоваться в дальнейшем.

Откуда

$$\left(\frac{1}{f'(z)}-\frac{a+h}{1+h}\right)\left(\frac{1}{\overline{f'(z)}}-\frac{a+h}{1+h}\right)\leqslant\frac{\rho^2}{(1+h)^2}$$

или

$$\left(f'(z)-\frac{(1+h)(a+h)}{2ah+h^2+1}\right)\left(\overline{f'(z)}-\frac{(1+h)(a+h)}{2ah+h^2+1}\right)\leqslant\frac{\rho^2(1+h)^2}{(2ah+h^2+1)^2}.$$

Тогда

$$\left|f'(z)-\frac{(1+h)(a+h)}{2ah+h^2+1}\right|\leqslant\frac{\rho(1+h)}{2ah+h^2+1}.$$

Теорема 2. *Если* $f(z)\in F_\beta$, то в круге $|z|<1$, $z=re^{i\varphi}$,

$$|\arg f'(z)|\leqslant\arcsin\frac{\rho}{a+h}.$$

Доказательство следует из геометрического смысла теоремы 1. Оценка достигается функцией

$$f(z)=-\frac{1}{\beta}z+\frac{1+\beta}{\beta^2}\ln\left(z+\frac{1}{\beta}\right). \tag{2}$$

Теорема 3. *Если* $f(z)\in F_\beta$, *то для* $z=re^{i\varphi}$, $|z|<1$

$$\frac{1+h}{a+\rho+h}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+h}{a-\rho+h}.$$

Оценки следуют из определения класса и того, что

$$p(z)=a+\rho_0e^{i\varphi_0},\ 0\leqslant\rho_0\leqslant\rho.$$

Достигаются оценки функцией (2).

Теорема 4. *Площадь образа круга* $|z|\leqslant r$ *для каждой функции класса* F_β *удовлетворяет неравенству*

$$A\leqslant\pi\left[\frac{(1+\beta)^2}{\beta^4}\ln\frac{1}{1-\beta^2r^2}-\frac{2r^2}{\beta}-\frac{r^2}{\beta^2}\right].$$

Доказательство. Учитывая, что функция $p(z)$ может быть представлена в виде $p(z)=\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}$, где $|\omega(z)|<1$, $\omega(0)=0$, имеем

$$f'(z)=\frac{1-\omega(z)}{1+\beta\omega(z)}.$$

На основании теоремы о подчиненных функциях [3]

$$A(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^r|f'(\rho e^{i\theta})|^2\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^r\left|\frac{1-\omega(\rho e^{i\theta})}{1+\beta\omega(\rho e^{i\theta})}\right|^2\rho\,d\rho\,d\theta\leqslant\int_0^r\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-\rho e^{i\theta}}{1+\beta\rho e^{i\theta}}\right|^2d\theta,$$

так как

$$\frac{1-\omega(\rho e^{i\theta})}{1+\beta\omega(\rho e^{i\theta})}\prec\frac{1-\rho e^{i\theta}}{1+\beta\rho e^{i\theta}},$$

или после преобразований

$$A(r)\leqslant4\int_0^r\rho\,d\rho\int_0^\infty\frac{t^2(1+\rho)^2+(1-\rho)^2}{[t^2(1-\beta\rho)^2+(1+\beta\rho)^2](1+t^2)}dt=$$

$$=\pi\left[\frac{(1+\beta)^2}{\beta^4}\ln\frac{1}{1-\beta^2r^2}-\frac{2r^2}{\beta}-\frac{r^2}{\beta^2}\right].$$

При $r=1$ и $\beta=0$ получаем результат Мак Грегора [1].

Теорема 5. *Длина образа круга* $|z|=r$ *при отображении функциями класса* F_β *удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{L} \leqslant \begin{cases} \frac{4}{\beta}\ln\frac{3\beta+1}{1-\beta}, & \text{если } \beta \geqslant 0; \\ \frac{4}{\beta}\arcsin\frac{2\beta}{1-\beta}, & \text{если } \beta \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. В силу теоремы о подчиненных функциях

$$\mathfrak{L}(r) = r\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|\,d\theta = r\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-\omega(re^{i\theta})}{1+\beta\omega(re^{i\theta})}\right| d\theta \leqslant r\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-re^{i\theta}}{1+\beta re^{i\theta}}\right| d\theta =$$

$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+r^2-2r\cos\theta}{1+\beta r^2+2\beta r\cos\theta}}\,d\theta. \tag{3}$$

Пусть $r\to 1$. Переходя к пределу под знаком интеграла, получим

$$\mathfrak{L}(1) \leqslant 2\int_0^{2\pi}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{(1-\beta)^2+4\beta\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 8\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-\beta)^2+4\beta t^2}},$$

откуда следует доказательство теоремы. При $\beta=0$ получаем результат Мак Грегора. Неравенство (3) при $\beta=0$ принимает вид

$$\mathfrak{L}(r) \leqslant 4r(1+r)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4r}{(1+r)^2}\sin^2\psi}\,d\psi = 4r(1+r)E\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right).$$

Оценки, указанные в теоремах 4 и 5, достигаются функцией (2).

Теорема 6. *Если* $f(z)\in F_\beta$, *то для* $z=re^{i\varphi}$

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \arcsin\frac{(1+\beta)\ln(1-r^2\beta^2)}{2r\beta-(1+\beta)\ln\frac{1+r\beta}{1-r\beta}}. \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой, указанной в теореме 1. Тогда $f'(z)=M(r,\beta)+N(r,\beta)\,\omega(z)$, где $|\omega(z)|\leqslant 1$, $\omega(0)=0$ и

$$f(z)=\int_0^z f'(\zeta)\,d\zeta = z\int_0^1 f'(zt)\,dt = z\int_0^1 M(rt,\beta)\,dt + z\int_0^1 N(rt,\beta)\,\omega(zt)\,dt.$$

Легко показать, что

$$\int_0^1 M(rt,\beta)\,dt = -\frac{1}{\beta}+\frac{1+\beta}{2r\beta^2}\ln\left|\frac{1+\beta r}{\beta r-1}\right|,$$

$$\left|\int_0^1 N(rt,\beta)\,\omega(zt)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 N(rt,\beta)\,dt = \frac{1+\beta}{2r\beta^2}\ln\frac{1}{1-r^2\beta^2}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{f(z)}{z}+\frac{1}{\beta}-\frac{1+\beta}{2r\beta^2}\ln\left|\frac{\beta r+1}{\beta r-1}\right|\right| \leqslant \frac{1+\beta}{2r\beta^2}\ln\frac{1}{1-r^2\beta^2}.$$

Исходя из геометрического смысла данного неравенства, получаем оценку (4).

Теорема 7. *Если функция $p(z)$ такова, что* $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} p(z) > 0$ *или* $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} p(z) < 0$ *при* $\operatorname{Im} z \neq 0$, *то функция $f(z)$ класса F_β, определяемая данной функцией $p(z)$, звездна в $|z| < 1$.*

Доказательство следует из того факта, что

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{u(z)U(z) + v(z)V(z)}{\left|\int\limits_0^1 \frac{dt}{|p(zt)+h|}\right|^2},$$

где

$$u(z) = \frac{h + \operatorname{Re} p(z)}{|h + p(z)|^2}, \quad v(z) = \frac{\operatorname{Im} p(z)}{|h+p(z)|^2};$$

$$U(z) = \int\limits_0^1 \frac{h + \operatorname{Re} p(zt)}{|h + p(zt)|^2}\,dt, \quad V(z) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{Im} p(zt)}{|h + p(zt)|^2}\,dt.$$

Теорема 8. *Пусть $f(z) \in F_\beta$. Тогда имеют место следующие точные оценки для кривизны линий уровня ($z = re^{i\varphi}$)*

$$\frac{1 - 2r - \beta r^2}{r(1-r)^2} \leqslant K_r \leqslant \frac{1 + \beta + (1-\beta)(1-r^2)^2}{2r(1-r^2)^2}. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой для кривизны линий уровня

$$K_r = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''}{f'}\right)}{|z| \cdot |f'|}.$$

Для функций класса F_β имеем

$$K_r = \frac{|\omega + h|}{r(1+h)}\operatorname{Re}\left(1 - \frac{w}{\omega + h}\right),$$

где $p(z) = \omega$, $zp'(z) = w$.

В силу теоремы 1 из [2] $\max\limits_{f \in F_\beta}\max\limits_{|z|=r} K_r$ и $\min\limits_{f \in F_\beta}\min\limits_{|z|=r} K_r$ достигаются функциями, для которых

$$f'(z) = \frac{1+h}{\lambda_1\delta(ze^{-i\alpha_1}) + \lambda_2\delta(ze^{-i\alpha_2}) + h}, \tag{6}$$

где

$$\delta(z) = \frac{1+z}{1-z}; \ \lambda_1 \geqslant 0, \ \lambda_2 \geqslant 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \ \alpha_1, \ \alpha_2 \in [0, 2\pi].$$

В силу теоремы 2 из [2]

$$K_r = \frac{|\omega + h|}{r(1+h)}\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\omega^2 - 1 + (\rho^2 - \rho_0^2)e^{2i\beta}}{\omega + h}\right],$$

где $0 \leqslant \rho_0 \leqslant \rho$,

$$\frac{1 + ze^{-i\alpha_k}}{1 - ze^{-i\alpha_k}} = a + \rho e^{i\psi_k} \ (k = 1, 2), \quad e^{2i\beta} = -e^{i(\psi_1 + \psi_2)}$$

или, если ввести замену $\omega + h = Re^{i\psi}$,

$$K_r = \frac{1}{r(1+h)}\Big[R(1+h) - \frac{1}{2}R^2\cos\psi - \frac{1}{2}(h^2-1)\cos\psi -$$
$$- \frac{1}{2}(\rho^2 - R^2 - (a+h)^2 + 2(a+h)R\cos\psi)\cos(2\beta - \psi)\Big]. \tag{7}$$

При фиксированном ω функция (7) принимает наибольшее значение, если $\cos(2\beta - \psi) = -1$, и наименьшее — если $\cos(2\beta - \psi) = 1$.

Таким образом,

$$\max_{|z|=r} K_r = \Phi_1(R, \psi) = \frac{(1-h^2)\cos\psi - 2ah - h^2 - 1}{2r(1+h)} +$$
$$+ \frac{R}{r(1+h)}[1 + h + (a+h)\cos\psi] - \frac{R^2}{2r(1+h)}(1+\cos\psi);$$
$$\min_{|z|=r} K_r = \Phi_2(R, \psi) = \frac{(1-h^2)\cos\psi + 2ah + h^2 + 1}{2r(1+h)} +$$
$$+ \frac{R}{r(1+h)}[1 + h - (a+h)\cos\psi] + \frac{R^2}{2r(1+h)}(1-\cos\psi).$$

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\psi} &= \frac{\sin\psi}{r(1+h)}\left[\frac{h^2-1}{2} - (a+h)R + \frac{R^2}{2}\right] = 0, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial R} &= \frac{1}{r(1+h)}[1 + h + (a+h)\cos\psi - R(1+\cos\psi)] = 0, \end{aligned}\right\}$$

легко убедиться, что существует единственная точка максимума $\psi = 0$' $R = \frac{1+a+2h}{2}$.

Откуда

$$\max_{f\in F_\beta}\max_{|z|=r} K_r = \frac{(a+1)^2 + 4h}{4r(1+h)} = \frac{1 + \beta + (1-\beta)(1-r^2)^2}{2r(1-r^2)^2}.$$

Так как в случае максимума $\psi = 0$, то из сказанного выше следует, что $\beta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, функция (6), для которой достигается оценка (8), имеет вид

$$f'(z) = \frac{2(1+h)}{\delta(ze^{i\theta}) + \delta(z\bar{e}^{i\theta}) + 2h}$$

или

$$f(z) = \int_0^z \frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta\cos\theta}{-\beta\zeta^2 - (1-\beta)\zeta\cos\theta + 1}\, d\zeta,$$

где $\cos\theta = \frac{3r - r^3}{2}$.

При нахождении $\min\limits_{f\in F_\beta}\min\limits_{|z|=r} K_r$ нетрудно убедиться, что минимум достигается в точке $R = a + \rho + h$, $\psi = 0$, причем

$$\min_{f\in F_\beta}\min_{|z|=r} K_r = \frac{(a+\rho+h)(1-a) + 1 + ah}{r(1+h)} = \frac{1 - 2r - 2r^2\beta}{r(1-r)^2}.$$

Достигается оценка функцией (2), так как в этом случае в соотношении (6) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Замечание 1. Для класса функций $F_{\beta=0}$ оценки (5) имеют вид

$$\frac{1-2r}{r(1-r)^2} \leqslant K_r \leqslant \frac{2 - 2r^2 + r^4}{2r(1-r^2)^2},$$

причем нижняя оценка достигается функцией $f(z) = z + \frac{z^2}{2}$, а верхняя— функцией

$$f(z) = \frac{1}{\lambda^2} z - \frac{1}{2\lambda} z^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3}\ln(1 + \lambda z),$$

где $\lambda = \frac{1 - 2r^3}{2r}$.

В частности, нижняя оценка справедлива и для классов Sh и L [4, 5].

Замечание 2. Для класса функций с ограниченным вращением ($\beta = 1$)

$$\frac{1-2r-r^2}{r(1-r)^2} \leqslant K_r \leqslant \frac{1}{r(1-r^2)^2}, \tag{9}$$

причем нижняя и верхняя оценки достигаются соответственно функциями, принадлежащими классу F_1:

$$f(z) = -z + 2\ln(1+z),$$
$$f(z) = -z + \cos\theta \ln(1-z^2) + \ln\frac{1+z}{1-z},$$

где $\cos\theta = \frac{3r-r^3}{2}$.

Оценки (9) были получены ранее автором в работе [6].

Теорема 9. *Радиус выпуклости класса* F_β *равен*

$$r_0 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\beta}}.$$

Доказательство следует из левой части формулы (5).

При $\beta = 0$ получаем результат Мак Грегора [1], а при $\beta = 1$ — известный результат [3].

Теорема 10. *Пусть* $f(z) \in F_\beta$. *Тогда для кривизны образа луча* $\varphi = \varphi_0$, *ортогонального окружностям* $|z| = r$, *имеет место точная оценка*

$$0 \leqslant |K_\varphi| \leqslant \frac{|u+1-h^2|}{2r(1+h)} \sqrt{1 - \frac{(u+1+h^2+2ah)^2}{4u(a+h)^2}},$$

где «u» есть корень уравнения

$$-3u^3 + u^2[2(u_0+u_1) - 1 + h^2] - u_0u_1u + (1-h^2)u_1u_0 = 0 \tag{10}$$

из промежутка $[u_0, u_1]$, *а* $u_0 = (a-\rho+h)^2$, $u_1 = (a+\rho+h)^2$.

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$K_\varphi = \frac{1}{|f'(z)|} \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi_0}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right),$$

которая для функций данного класса имеет вид

$$K_\varphi = \frac{|\omega+h|}{r(1+h)} \operatorname{Im}\frac{-w}{\omega+h},$$

где $\omega = p(z)$, $w = zp'(z)$.

В силу теорем 1 и 2 из [2] $\max\limits_{f\in F_\beta}\max\limits_{|z|=r} K_\varphi$ и $\min\limits_{f\in F_\beta}\min\limits_{|z|=r} K_\varphi$ достигаются функциями (6) и

$$K_\varphi = \frac{|\omega+h|}{r(1+h)}\left\{\operatorname{Im}\frac{\omega^2-1}{2(\omega+h)} \pm \frac{\rho^2-\rho_0^2}{2|\omega+h|}\right\},$$

где знак плюс соответствует $\max K_\varphi$, а знак минус — $\min K_\varphi$.

После замены $\omega + h = Re^{i\psi}$ убеждаемся, что экстремальные значения функция принимает при $\rho = \rho_0$. Следовательно, нам нужно исследовать на экстремум функцию

$$\Phi(R, \psi) = \frac{1}{2r(1+h)}(h^2 - 1 - R^2)\sin\psi$$

при условии, что

$$\rho^2 = R^2 + (a+h)^2 - 2R(a+h)\cos\psi.$$

Эта задача сводится к исследованию на экстремум функции

$$l(R^2) = \frac{(R^2+1-h^2)(u_1-R^2)(R^2-u_0)}{R^2}$$

на промежутке $[u_0, u_1]$, где $u_0 = (a - \rho + h)^2$, $u_1 = (a + \rho + h)^2$. Можно показать, что эта функция имеет один максимум на промежутке $[u_0, u_1]$, причем точка максимума является корнем уравнения (10) из промежутка $[u_0, u_1]$ (нетрудно убедиться, что указанное уравнение имеет один корень на этом промежутке).

Оценка достигается функцией (2). Отсюда следует утверждение теоремы. При $h = 0$ получаем точные оценки кривизны ортогональных траекторий линий уровня для класса функций с ограниченным вращением ([6], теорема 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. M a c G r e g o r. Thomas H., A class of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 15, N 2, 311—317, 1964.

2. В. А. З м о р о в и ч. Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій. «Доп. АН УРСР». № 8, 1965, 980.

3. Г. М. Г о л у з и н. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат. М. — Л., 1952.

4. A. S c h i l d. On a class of functions schlicht in the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc, v. 5, N 1, 115—120 (1954).

5. Z. L e w a n d o w s k i. Quelques remarques sur les theorems de schild relatifs a une classe de fonctions univalents, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, Sectio A., vol. 9, 1955.

6. Т. Г. Е з р о х і. Деякі оцінки в спеціальних класах однолистих регулярних в колі $|z| < 1$ функцій. «Доп. АН УРСР», № 8, 1965, 984.