ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В КРУГОВОМ ПОЛИЦИЛИНДРЕ

К. М. Фишман

Исследование линейной эквивалентности дифференциальных операторов в аналитическом пространстве для функций одной комплексной переменной были проведены в [1], [2] для пространства целых функций и в [3] для пространства аналитических функций в круге. Многочисленные работы были посвящены вопросу о линейной эквивалентности дифференциальных операторов с непрерывными или дифференцируемыми коэффициентами в подходящих классах функций и построению операторов преобразования (см. библиографию в [2]).

В настоящей работе рассматривается вопрос об эквивалентности двух дифференциальных операторов в пространстве $\mathfrak{A}_R$ аналитических функций многих комплексных переменных в круговом полицилиндре E_R и в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$ аналитических функций в начале. Построение оператора преобразования осуществляется при помощи бесконечной матрицы. В качестве приложения строится оператор обобщенного сдвига ассоциированного с дифференциальным оператором в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$.

1. Пусть $\mathfrak{A}_R$, $R=(R_1, R_2, \dots, R_n)$, $0<R_i\leqslant\infty$ пространство всех функций $f(z)=f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ аналитических в круговом полицилиндре $E_R=\{z=(z_1, z_2, \dots, z_n):|z_i|<R_i \ (i=1, 2 \dots, n)\}$. Каждая функция $f(z)\in\mathfrak{A}_R$ разложима в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k\geqslant 0} u_k z^k=\sum_{k_i\geqslant 0} u_{k_1, k_2, \dots, k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}. \tag{1}$$

Для каждого $r=(r_1, r_2, \dots, r_n)$, $0<r_i<R_i$ вводим норму:

$$\|f(z)\|_r=\sum_{k\geqslant 0}|u_k| r^k=\sum_{k_i\geqslant 0}|u_{k_1, k_2, \dots, k_n}| r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_n^{k_n}. \tag{2}$$

Введением в $\mathfrak{A}_R$ общепринятых линейных операций и топологии определяемой системой норм (2) при всевозможных $r=(r_1, r_2, \dots, r_n)$, $0<r_i<R_i$, $\mathfrak{A}_R$ становится линейным локально выпуклым топологическим пространством [7].

Ниже мы будем пользоваться вектор-индексами k, λ, μ, ν, m, s, σ с n (например, $k=(k_1, k_2, \dots, k_n)$) целыми неотрицательными компонентами. Для таких индексов и для вещественных векторов R, ρ, r, ρ' вводим обозначения:

$\lvert\nu\rvert$	вместо	$\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n$,
$\nu<\mu$	»	$\nu_i\leqslant\mu_i \ (i=1, 2, \dots, n)$ и $\lvert\nu\rvert<\lvert\mu\rvert$,

$\nu \leqslant \mu$	вместо	$\nu < \mu$ или $\nu = \mu$,
$\nu \ll \mu$	»	$\nu_i < \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,
$\nu \underline{\ll} \mu$	»	$\nu \ll \mu$ или $\nu = \mu$,
$\nu!$	»	$\nu_1!\, \nu_2! \ldots \nu_n!$,
D^ν или $\frac{\partial^{\lvert\nu\rvert}}{\partial z^\nu}$	»	$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}}{\partial z_1^{\nu_1}\partial z_2^{\nu_2}\ldots\partial z_n^{\nu_n}}$,
1 соответственно O	»	$(1, 1, 1, \ldots, 1)$ соответственно $(0, 0, 0, \ldots, 0)$,
z^k	»	$z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$,
$\nu \,\tilde{\leqslant}\, \mu$	»	отрицания $\nu \leqslant \mu$, и т. п.

Индексы i, j, p всегда будут одномерны и целочисленны.

Легко проверить, что в пространстве $\mathfrak{A}_R$ операторы D^σ и операторы умножения на $\varphi(z)$, $\varphi(z) \in \mathfrak{A}_R$ линейны и непрерывны.

Как известно, два линейных непрерывных оператора A и B, действующие в $\mathfrak{A}_R$, называют линейно эквивалентными, если существует автоморфизм T линейного топологического пространства $\mathfrak{A}_R$ такой, что

$$TA = BT. \tag{3}$$

Теорема 1. *При любых* $a^{(\sigma)}(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k^{(\sigma)} z^k \in \mathfrak{A}_R$ *и* $b^{(\sigma)}(z) = \sum_{k \geqslant 0} b_k^{(\sigma)} z^k \in \mathfrak{A}_R$ *операторы*

$$A = D^s + \sum_{0 \leqslant \sigma \ll s} a^{(\sigma)}(z) D^\sigma, \tag{4}$$

$$B = D^s + \sum_{0 \leqslant \sigma \ll s} b^{(\sigma)}(z) D^\sigma, \tag{5}$$

$s \geqslant 1$ *линейно эквивалентны в* $\mathfrak{A}_R$.

Доказательство. Линейному непрерывному оператору T сопоставим матрицу $[t_{\mu,\nu}]$, положив

$$Tz^\nu = \sum_{\mu \geqslant 0} t_{\mu,\nu} z^\mu \quad (\nu \geqslant 0). \tag{6}$$

Пусть операторам (4) и (5) соответствуют матрицы $[\alpha_{\nu,m}]$ и $[\beta_{\mu,\nu}]$. Тогда

$$\alpha_{\nu,m} = \begin{cases} \delta(m-s)\dfrac{m!}{(m-s)!} & \nu = m-s \\ \sum\limits_{(0,\, m-\nu) \leqslant \sigma \ll s} \delta(m-\sigma)\dfrac{m!}{(m-\sigma)!}\, a^{(\sigma)}_{\nu+\sigma-m} & \nu \gg m-s \\ 0 & \nu \,\tilde{\underline{\gg}}\, m-s \end{cases} \tag{7}$$

$$\beta_{\mu,\nu} = \begin{cases} \delta(\nu-s)\dfrac{\nu!}{(\nu-s)!} & \mu = \nu-s \\ \sum\limits_{(0,\, \nu-\mu) \leqslant \sigma \ll s} \delta(\nu-\sigma)\dfrac{\nu!}{(\nu-\sigma)!}\, b^{(\sigma)}_{\mu+\sigma-\nu} & \mu \gg \nu-s \\ 0 & \mu \,\tilde{\underline{\gg}}\, \nu-s, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\delta(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu \geqslant 0 \\ 0 & \nu \,\tilde{\geqslant}\, 0. \end{cases}$$

Положим

$$t_{\mu,\nu}=\begin{cases}0 & \mu \widetilde{\gg} \nu\\ \delta_{\mu,\nu} & \mu \widetilde{\geqslant} s,\end{cases} \tag{9}$$

е $\delta_{\mu,\nu}=\prod_{i=1}^{n}\delta_{\mu_i,\nu_i}$, δ_{μ_i,ν_i} — символы Кронекера. Учитывая строение атриц (7), (8) и выбранные значения (9), условие запишем в виде

$$\sum_{\substack{m-s\leqslant\nu\leqslant\mu\\ \nu\geqslant 0}} t_{\mu,\nu}a_{\nu,m}=\sum_{m\leqslant\nu\leqslant\mu+s}\beta_{\mu,\nu}t_{\nu,m} \qquad (\mu,\ m\geqslant 0). \tag{10}$$

ак как $\beta_{\mu,\mu+s}=\dfrac{(\mu+s)!}{\mu!}\neq 0$, то, вместо (10), имеем

$$t_{\mu+s,m}=\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\left[-\sum_{m\leqslant\nu\leqslant\mu+s}\beta_{\mu,\nu}t_{\nu,m}+\sum_{m-s\leqslant\nu\leqslant\mu}t_{\mu,\nu}a_{\nu,m}\right] \qquad (\mu+s\geqslant m). \tag{11}$$

При $m=\mu+s$ (11) дает

$$t_{\mu+s,\mu+s}=t_{\mu,\mu} \qquad (\mu\geqslant 0). \tag{12}$$

тсюда, учитывая (9), заключаем

$$t_{\nu,\nu}=1 \qquad (\nu\geqslant 0). \tag{13}$$

ринимая во внимание (13) и (9), убедимся в том, что формулы позволяют постепенно вычислять все элементы матрицы T.

Пусть теперь $\rho<R$ и $\rho<\rho'<r<R$. Покажем, что существует константа $C=C(\rho,r)>1$, такая, что

$$|t_{\mu,\nu}|\leqslant C\frac{r^{\nu}}{\rho^{\mu}}=C\frac{r_1^{\nu_1}r_2^{\nu_2}\cdots r_n^{\nu_n}}{\rho_1^{\mu_1}\rho_2^{\mu_2}\cdots\rho_n^{\mu_n}} \qquad (\mu\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0). \tag{14}$$

Из условий (14) будет следовать непрерывность оператора T [10]. Действительно, имеем

$$\|Tf(z)\|_{\rho}=\sum_{\nu}\Big|\sum_{k}u_k t_{\nu,k}\Big|\rho^{\nu}\leqslant\sum_{\nu}\sum_{k}|u_k||t_{\nu,k}|\rho^{\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu}\sum_{k}|u_k|C(\rho',r)\frac{r^k}{\rho'^{\nu}}\rho^{\nu}=C(\rho',r)\sum_{\nu}\left(\frac{\rho^{\nu}}{\rho'^{\nu}}\right)\sum_{k}|u_k|r^k=$$

$$=C(\rho',r)\prod_{i=1}^{n}\frac{\rho_i'}{\rho_i'-\rho_i}\|f(z)\|_r.$$

Выберем $N\geqslant s$ так, чтобы

$$\rho^s\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i+s_i}\left[\sup_{\sigma\leqslant s}(\rho^{-\sigma},r^{-\sigma})\sum_{0\leqslant\sigma\leqslant s}\left(\|b^{(\sigma)}(z)\|_{\rho}+\|a^{(\sigma)}(z)\|_r\right)\right]<1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^s$$

$$(|\mu+s|\geqslant N). \tag{15}$$

Выберем $C=C(\rho,r)$ так, чтобы (14) имело место при всех $\mu\geqslant s$, $|\mu|\leqslant N$ и всех $\nu\geqslant 0$ (таких элементов, отличных от нуля, имеется только конечное число). Тогда, как будет показано, (14) выполняется для всех μ и ν. В силу (9), (13) и выбора C достаточно убедиться в выполнении (14) для $\mu\gg\nu$, $\mu\geqslant s$ и $|\mu|>N$.

Упорядочим каким-нибудь образом все элементы $t_{\mu,\nu}$ ($\mu\gg\nu$, $\mu\geqslant s$, $|\mu|>N$) по неубывающим значениям $|\mu|$. Пусть (14) верно для всех элементов этой совокупности, для которых $|\mu|<M$, $M>N$. Рассмотрим элемент $t_{\mu+s,\, m}$ с $|\mu+s|=M$. Тогда для всех элементов $t_{\mu,\nu}$ правс части (11) выполнена оценка (14) и на основе этой формулы заключае

$$|t_{\mu+s,\, m}| \leqslant C\frac{r^m}{\rho^{\mu+s}}\Bigg[\sum_{m\leqslant\nu\leqslant\mu+s}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}|\beta_{\mu,\nu}|\rho^{\mu-\nu+s}+$$

$$+\sum_{m-s\leqslant\nu\leqslant\mu}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}|\alpha_{\nu,m}|\rho^s\cdot r^{\nu-m}\Bigg]=C\frac{r^m}{\rho^{\mu+s}}K(\mu, m)^*. \qquad (16)$$

Учитывая (7), (8), имеем

$$K(\mu, m)\leqslant\sum_{m\leqslant\nu\leqslant\mu+s}\ \sum_{(0,\ \nu-\mu)<\sigma\leqslant s}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{\nu!}{(\nu-\sigma)!}\delta(\nu-\sigma)\times$$

$$\times|b^{(\sigma)}_{\mu+\sigma-\nu}|\rho^{\mu+\sigma-\nu}\rho^{s-\sigma}+\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-s)!}\delta(m-s)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s+ \qquad (17)$$

$$+\sum_{\substack{m-s\leqslant\nu\leqslant\mu\\ \nu\geqslant 0}}\ \sum_{m-\nu<\sigma\leqslant s}\left|\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-\sigma)!}\right.\delta(m-\sigma)|a^{(\sigma)}_{\nu+\sigma-m}|r^{\nu+\sigma-m}\rho^s r^{-\sigma},$$

$$(\mu+s\gg m).$$

Учитывая неравенства

$$\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{\nu!}{(\nu-\sigma)!}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i+s_i}\quad(\sigma\ll s,\ \nu\ll\mu+s), \qquad (18)$$

$$\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-s)!}<1\quad(m\ll\mu+s), \qquad (19)$$

из (17) при учете (15) заключаем

$$K(\mu, m)\leqslant\rho^s\sup_{\sigma\ll s}\rho^{-\sigma}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i+s_i}\sum_{\sigma\ll s}\|b^{(\sigma)}(z)\|_\rho+$$

$$+\left(\frac{\rho}{r}\right)^s+\rho^s\sup_{\sigma\ll s}r^{-\sigma}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i+s_i}\sum_{\sigma\ll s}\|a^{(\sigma)}(z)\|_r\leqslant 1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^s+\left(\frac{\rho}{r}\right)^s=1.$$

Осталось убедиться в непрерывной обратимости построенного оператора T.

Пусть T' матрица построена вышеуказанным образом при помощи соотношения

$$T'B=AT'.$$

Тогда

$$TT'B=BTT' \text{ и } T'TA=AT'T. \qquad (20)$$

Легко проверить, что произведение двух операторов, удовлетворяющих условиям (9), тоже удовлетворяет этим условиям. Последнее утверждение следует теперь из (20) и следующей леммы.

Лемма 1. *Если $T=[t_{\mu,\nu}]$ — матричный оператор, удовлетворяющий условиям (9), перестановочный с матрицей $A=[\alpha_{\nu,m}]$, где $\alpha_{\nu,m}=0\,(\nu\geqslant m-s)$, $\alpha_{m-s,m}=\delta(m-s)\frac{m!}{(m-s)!}$, то $T=E$ (E — единичная матрица).*

* $K(\mu, m)$ обозначает содержание квадратной скобки.

Доказательство. Пусть $TA = AT$. Заменяя $\beta_{\mu,\nu}$ через $\alpha_{\mu,\nu}$ в (11), лучим

$$t_{\mu+s,m} = \frac{\mu!}{(\mu+s)!}\left[-\sum_{m\leqslant\nu\leqslant\mu+s}\alpha_{\mu,\nu}t_{\nu,m} + \sum_{\substack{m-s\leqslant\nu\leqslant\mu\\ \nu\geqslant 0}}\alpha_{\nu,m}t_{\mu,\nu}\right]. \qquad (21)$$

$$(\mu+s\geqslant m).$$

ам необходимо доказать, что $t_{\mu,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \geqslant 0)$. В силу (9) достаочно рассмотреть $\mu \geqslant s$ и $\mu \geqslant \nu$. Так же, как и выше, из (21) получим $_{\mu} = 1$ для всех μ, поэтому опять в силу (9) необходимо только убеться в том, что $t_{\mu,\nu} = 0$ при $\mu \gg \nu$, $\mu \geqslant s$. Соотношение (21) позволяет роизвести индукцию для $t_{\mu,\nu}$ $(\mu \gg s, \mu \gg \nu)$ по неубывающим значениям $|\mu|$. Пусть утверждение уже доказано для $|\mu+s| < M$, тогда при $+s| = M$, $\mu + s \gg m$ из (21) имеем

$$t_{\mu+s,m} = \frac{\mu!}{(\mu+s)!}(-\alpha_{\mu,m}t_{m,m} + \alpha_{\mu,m}t_{\mu,\mu}) = 0.$$

Для случая $n = 1$ теорема доказана в [1], [2] и [3].

Из хода доказательства теоремы следует, что оператор T, преобразуюий B в A, при условии (9) определяется единственным образом. Покаем теперь, что оператор T в действии на $f(z) = \sum_k u_k z^k$ сохраняет все эффициенты u_k, $k \geqslant s$, т. е. из $T\sum_k u_k z^k = \sum_k v_k z^k$ следует $v_k = u_k$ при $k \geqslant s$. ействительно, учитывая (9), имеем $v_k = \sum_{\nu\geqslant 0} t_{k\nu}u_\nu = \sum_{\nu\geqslant 0}\delta_{k\nu}u_\nu = u_k\,(k \geqslant s)$. аким образом,

$$D^k Tf(z)|_{z=0} = D^k f(z)|_{z=0} \quad (k \geqslant s). \qquad (22)$$

2. Рассмотрим отношение оператора D^s к степенному базису $\left\{\frac{z^k}{k!}\right\}_{k\geqslant 0}$ оостранства $\mathfrak{A}_R$. Нули $f^{(0)}(z)$ этого оператора имеют вид

$$f^{(0)}(z) = \sum_{k\geqslant s} k!\; u_k \frac{z^k}{k!}, \qquad (23)$$

е. система $\left\{\frac{z^k}{k!}\right\}_{k\geqslant s}$ является базисом в подпространстве нулей опера-ора D^s. Функция $\frac{z^k}{k!}$ $(k \geqslant s)$ является единственным решением задачи

$$D^s f(z) = 0,$$
$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial z^\lambda} f(z)|_{z=0} = \delta_{\lambda,k} \qquad (\lambda \geqslant s). \qquad (24)$$

усть теперь σ произвольное, $\sigma \geqslant s$. Тогда существует единственное награльное число $p \geqslant 1$, для которого $\sigma = ps + k$ и $k \geqslant s$. Функция $\frac{z^\sigma}{\sigma!}$ вляется единственным решением задачи

$$D^s f(z) = \frac{z^{(p-1)s+k}}{[(p-1)s+k]!}, \qquad (25)$$
$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial z^\lambda} f(z)|_{z=0} = 0 \qquad (\lambda \geqslant s).$$

Пусть теперь T_0 — оператор преобразования, построенный вышеуканным образом, преобразующий D^s в A (см. (4)), т. е.

$$T_0 D^s = AT_0. \qquad (26)$$

Положим

$$T_0\frac{z^k}{k!}=\varphi_k(z)\qquad (k\geqslant 0).\tag{27}$$

Тогда $\{\varphi_k(z)\}$ есть квазистепенной базис (естественное обобщение соответственного понятия [11] для функций одной переменной) в $\mathfrak{A}_R$ и

$$T_0 f(z)=T_0\Big(\sum_{k\geqslant 0}u_k z^k\Big)=\sum_{k\geqslant 0}k!\,u_k\,\varphi_k(z).\tag{28}$$

Учитывая свойства автоморфизма T, базис $\{\varphi_k(z)\}$ можно определить как решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}A\,\varphi(z)=0,\\ \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial z^{\lambda}}\varphi(z)\big|_{z=0}=\delta_{\lambda k}\qquad (\lambda\ \overline{\geqslant}\ s),\end{gathered}\tag{29}$$

при $k\ \overline{\geqslant}\ s$. Пусть уже определены все $\varphi_\sigma(z)$ для $\sigma=ps+k$ (p — целое неотрицательное), $k\ \overline{\geqslant}\ s$, тогда для $\sigma=(p+1)s+k$ $\varphi_\sigma(z)$ определяется как решение задачи

$$\begin{gathered}A\varphi(z)=\varphi_{\sigma-s}(z),\\ \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial z^{\lambda}}\varphi(z)\big|_{z=0}=0\qquad (\lambda\ \overline{\geqslant}\ s).\end{gathered}\tag{30}$$

Теперь легко дать явное выражение оператора T_0^{-1}, преобразующего A в D^s, а именно:

$$T_0^{-1}f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k\ \overline{\geqslant}\ s}[D^kA^if(z)]_{z=0}\cdot\frac{z^{k+is}}{(k+is)!}=T'f(z).\tag{31}$$

В силу линейности и непрерывности для доказательства достаточно проверить, что

$$T'\,\varphi_\sigma(z)=\frac{z^\sigma}{\sigma!}\qquad (\sigma\geqslant 0).\tag{32}$$

При $\sigma\ \overline{\geqslant}\ s$ $T'\varphi_\sigma(z)=\sum\limits_{k\ \overline{\geqslant}\ s}[D^k\varphi_\sigma(z)]_{z=0}\cdot\frac{z^k}{k!}=\frac{z^\sigma}{\sigma!}$. Пусть теперь $\sigma\geqslant s$, $\sigma=ps+\nu$, где p — натуральное и $\nu\ \overline{\geqslant}\ s$, тогда

$$\begin{aligned}T'\varphi_\sigma(z)&=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k\ \overline{\geqslant}\ s}[D^kA^i\varphi_\sigma(z)]_{z=0}\frac{z^{k+is}}{(k+is)!}=\\ &=\sum_{k\ \overline{\geqslant}\ s}[D^k\varphi_\nu(z)]_{z=0}\frac{z^{k+ps}}{(k+ps)!}=\frac{z^{\nu+ps}}{(\nu+ps)!}=\frac{z^\sigma}{\sigma!}.\end{aligned}$$

При $n=1$ и $R=R_1=\infty$ формула (31) совпадает с формулой Лионса и Дельсарта [1].

3. В случае $n=1$ и $R=\infty$ оператор преобразования T, переводящий A в B, может быть определен еще следующим образом ([2], глава VI, § 5):

$$Tf(z)=g(w)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\partial^i u_i(z,w)}{\partial z^i}\bigg|_{z=0},\tag{33}$$

где $u_i(z,w)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}A_z u(z,w)=B_w u(z,w),\\ \frac{\partial^{|j|}u(z,w)}{\partial w^j}\bigg|_{w=0}=\begin{cases}f(z) & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}\qquad (j=0,1,\ldots,s-1).\end{gathered}\tag{34}$$

Покажем теперь, каким образом формула (33) может быть распространена на случай n переменных.

Обозначим через $\mathfrak{A}_{R\times R}$ пространство всех функций $f(z, w)$ $2n$ переменных, аналитических в круговом полицилиндре $E_{R\times R}$ $\{(z, w): |z_i| < R_i,$ $|w_j| < R_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)\}$.

Рассмотрим задачу

$$A_z u(z, w) = B_w u(z, w),$$
$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda} u(z, w)|_{w=0} = \varphi^{(\lambda)}(z) = \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(\lambda)} z^k \quad (\lambda \lesseqgtr s), \tag{35}$$

где $A_z = A$, а B_w получается из (5) заменой z на w, $u(z, w) \in \mathfrak{A}_{R\times R}$ и $\varphi^{(\lambda)}(z) \in \mathfrak{A}_R$ $(\lambda \lesseqgtr s)$.

Лемма 2. *Задача* (35) *имеет не более одного решения.*

Действительно, пусть $u(z, w) = \sum_{\mu, \nu} t_{\mu, \nu} z^\nu w^\mu$ есть решение задачи (35); учитывая непрерывность A_z и B_w в $\mathfrak{A}_R$ и обозначения (7), (8), имеем

$$A_z u = \sum_{\mu, k} \left(\sum_\nu t_{\mu, \nu} \alpha_{k, \nu}\right) w^\mu z^k,$$
$$B_w u = \sum_{k, \nu} \left(\sum_\mu t_{\mu, \nu} \beta_{k, \mu}\right) w^k z^\nu,$$

откуда

$$\sum_\nu t_{\mu, \nu} \alpha_{k, \nu} = \sum_\nu t_{\nu, k} \beta_{\mu, \nu} \tag{36}$$

или, учитывая (7), (8),

$$\sum_{\nu\leqslant k+s} t_{\mu, \nu} \alpha_{k, \nu} = \sum_{\nu\leqslant \mu+s} t_{\nu, k} \beta_{\mu, \nu}. \tag{37}$$

Так как $\beta_{\mu, \mu+s} = \frac{(\mu+s)!}{\mu!} \neq 0$, то уравнение (37) можно решить относительно $t_{\mu+s, k}$, и мы получим

$$t_{\mu+s, k} = \frac{\mu!}{(\mu+s)!}\left[-\sum_{\nu<\mu+s} t_{\nu, k} \beta_{\mu, \nu} + \sum_{\nu\leqslant k+s} t_{\mu, \nu} \alpha_{k, \nu}\right]. \tag{38}$$

Последняя формула показывает, что $t_{\mu, \nu}$ при $\mu \lesseqgtr s$ могут быть выбраны произвольно, остальные значения $t_{\mu, \nu}$ $(\mu > s)$ определяются впоследствии однозначно. Действительно, условия (35) принимают вид

$$\frac{\partial^{|\lambda|} u}{\partial w^\lambda}\Big|_{w=0} = \sum_{\substack{\nu, \mu \\ \mu\geqslant\lambda}} t_{\mu, \nu} \frac{\mu!}{(\mu-\lambda)!} z^\nu w^{\mu-\lambda}|_{w=0} = \sum_\nu \lambda!\, t_{\lambda, \nu} z^\nu = \sum_\nu c_\nu^{(\lambda)} z^\nu \quad (\lambda > s),$$

или

$$t_{\lambda, \nu} = \frac{c_\nu^{(\lambda)}}{\lambda!} \quad (\lambda \lesseqgtr s, \ \nu > 0).$$

Пусть теперь $\varphi(z) = \sum_{\nu\geqslant 0} a_\nu \varphi_\nu(z)$ произвольный элемент $\mathfrak{A}_R$, где $\varphi_\nu(z) = T_0 \frac{z^\nu}{\nu!}$. Обозначим через $u^{(\mu, i)}(z, w) \in \mathfrak{A}_{R\times R}$ решение задачи

$$A_z u(z, w) = B_w u(z, w),$$
$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda} u(z, w)|_{w=0} = \begin{cases} \sum_{|\nu|<i} a_\nu \varphi_\nu(z) = \varphi^{(i)}(z) & \lambda = \mu \lesseqgtr s \\ 0 & s \lesseqgtr \lambda \neq \mu. \end{cases} \tag{39}$$

Решение $u^{(\mu, i)}(z, w)$, как будет показано, существует и согласно лемме 2 единственно. Положим

$$u(z, w) = u^{(\mu, i)}(z, w) = \sum_{k, \nu} a_{k, \nu}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) \psi_\nu(w),$$

где $\psi_\nu(w)$ построены по оператору B так же, как $\varphi_\nu(z)$ — по оператору A. Условие (39) принимает вид

$$A_z u^{(\mu, i)}(z, w) = \sum_{\substack{k \geqslant s \\ \nu \geqslant 0}} a_{k, \nu}^{(\mu, i)} \varphi_{k-s}(z) \psi_\nu(w) = B_w u^{(\mu, i)}(z, w) =$$

$$= \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ \nu \geqslant s}} a_{k, \nu}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) \psi_{\nu-s}(w),$$

откуда

$$a_{k+s, \nu}^{(\mu, i)} = a_{k, \nu+s}^{(\mu, i)} \quad (k, \nu \geqslant 0). \tag{40}$$

Каждый вектор-индекс ν единственным образом разлагается в виде суммы

$$\nu = ps + m, \tag{41}$$

где p — неотрицательное целое и m — вектор-индекс, удовлетворяющий условию $m \not\geqslant s$.

Условиям (40) можно удовлетворить, выбирая $a_{k, \nu}^{(\mu, i)}$ при $\nu \not\geqslant s$ произвольно, а при $\nu \geqslant s$ согласно (40) по формуле

$$a_{k, \nu}^{(\mu, i)} = a_{k, ps+m}^{(\mu, i)} = a_{k+ps, m}^{(\mu, i)}. \tag{42}$$

Осталось воспользоваться свободным выбором $a_{k, \nu}^{(\mu, i)}$ $(\nu \not\geqslant s)$ для удовлетворения условий (39). Имеем с учетом (29), (30)

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda} u^{(\mu, i)}(z, w)\big|_{w=0} = \sum_{k, \nu} a_{k, \nu}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda} \psi_\nu(z, w)\big|_{w=0} = \sum_k a_{k, \lambda}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{|k| < i} a_k \varphi_k(z) = \varphi^{(i)}(z) & \lambda = \mu \not\geqslant s \\ 0 & s \not\leqslant \lambda \neq \mu, \end{cases} \tag{43}$$

следовательно,

$$a_{k \lambda}^{(\mu, i)} = \begin{cases} a_k & \lambda = \mu \not\geqslant s, \ |k| \leqslant i \\ 0 & \lambda = \mu \not\geqslant s, \ |k| > i \\ 0 & s \not\leqslant \lambda \neq \mu \not\geqslant s. \end{cases} \tag{44}$$

Формулы (42), (44) полностью определяют $u^{(\mu, i)}(z, w)$,

$$u^{(\mu, i)}(z, w) = \sum_{k, \nu} a_{k, \nu}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) \psi_\nu(w) = \sum_{p, k, m} a_{k+ps, m}^{(\mu, i)} \varphi_k(z) \psi_{ps+m}(w) =$$

$$= \sum_{|k+ps| \leqslant i} a_{k+ps, \mu} \varphi_k(z) \psi_{ps+\mu}(w) \in \mathfrak{A}_{R \times R},$$

так как под знаком суммы имеется только конечное число слагаемых отличных от нуля. Составим теперь

$$\sum_{\mu \not\geqslant s} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial z^\mu} u^{(\mu, i)}(z, w)\big|_{z=0} = \sum_{\substack{\mu \not\geqslant s \\ |k+ps| \leqslant i}} a_{k+ps} \psi_{ps+\mu} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial z^\mu} \varphi_k(z)\big|_{z=0} =$$

$$= \sum_{\substack{\mu \not\geqslant s \\ |\mu+ps| \leqslant i}} a_{\mu+ps} \psi_{\mu+ps}(w) = \sum_{|\nu| \leqslant i} a_\nu \psi_\nu(w) = T\varphi^{(i)}(z).$$

Так как $\varphi^{(i)}(z) \to \varphi(z)$ в топологии $\mathfrak{A}_R$ и T непрерывный, имеем

$$T\varphi(z) = \lim_{i \to \infty} T\varphi^{(i)}(z).$$

В том же смысле, что и выше, можно утверждать, что оператор преобразования определяется по формуле

$$\psi(w) = T\varphi(z) = \sum_{\mu \gtreqless s} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial z^{\mu}} u^{(\mu)}(z, w)\big|_{z=0}, \tag{45}$$

где $u^{(\mu)}(z, w)$ $(\mu \gtreqless s)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} A_z u(z, w) = B_w u(z, w), \\ \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^{\lambda}} u(z, w)\big|_{w=0} = \begin{cases} \varphi(z) & \lambda = \mu \gtreqless s \\ 0 & s \lesseqgtr \lambda \neq \mu \gtreqless s. \end{cases} \end{gathered} \tag{46}$$

4. Пусть T_0 — оператор преобразования D^s в A, тогда из (31) следует

$$T_0 T_0^{-1} f(z) = f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k \geqslant s} [D^k A^i f(z)]_{z=0} \varphi_{k+is}(z), \tag{47}$$

где $\varphi_\sigma(z) = T_0 \frac{z^\sigma}{\sigma!}$ $(\sigma \geqslant 0)$. Разложение (47) единственное. Формула (47) обобщает ряд Тейлора, который из нее получается при $A = D^s$.

Пусть T_0, как и выше. Оператор преобразования D^s в A позволяет также получить разложение оператора A в произведение и определение его дробных степеней. Для этого положим

$$T_0 \frac{\partial}{\partial z_j} T_0^{-1} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

Операторы A_j перестановочны между собою и, очевидно,

$$A = T_0 D^s T_0^{-1} = A_1^{s_1} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n}. \tag{49}$$

Если $s_i = p\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — натуральное, то

$$A = (A_1^{\sigma_1} A_2^{\sigma_2} \cdots A_n^{\sigma_n})^p, \tag{50}$$

и поэтому можно положить

$$A^{\frac{1}{p}} = A_1^{\sigma_1} A_2^{\sigma_2} \cdots A_n^{\sigma_n}. \tag{51}$$

Учитывая (22), имеем в (47)

$$D^k A^i f(z)\big|_{z=0} = D^k T_0^{-1} A^i f(z)\big|_{z=0} \quad (k \gtreqless s;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Тогда коэффициенты разложения (47) с учетом (48), (49), (52) принимают вид

$$\begin{gathered} D^k A^i f(z)\big|_{z=0} = D^k T_0^{-1} A^i f(z)\big|_{z=0} = \\ = T_0^{-1} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots A_n^{k_n} T_0 T_0^{-1} A_1^{is_1} A_2^{is_2} \cdots A_n^{is_n} f(z)\big|_{z=0} = \\ = A_1^{k_1+is_1} A_2^{k_2+is_2} \cdots A_n^{k_n+is_n} f(z)\big|_{z=0} \quad (i = 0, 1, \ldots;\ k \gtreqless s). \end{gathered} \tag{53}$$

Обозначая через

$$A^{\langle\sigma\rangle} = A_1^{\sigma_1} A_2^{\sigma_2} \cdots A_n^{\sigma_n}, \tag{54}$$

перепишем (47) в виде

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k \gtreqless s} A_1^{k_1+is_1} A_2^{k_2+is_2} \cdots A_n^{k_n+is_n} f(z)\big|_{z=0} \varphi_{k+is}(z) = \sum_{\sigma \geqslant 0} A^{\langle\sigma\rangle} f(0) \varphi_\sigma(z). \tag{55}$$

Сходство этой формулы с формулой Тейлора очевидное.

5. Построение оператора обобщенного сдвига. Покажем теперь, что каждому дифференциальному оператору (4) в $\mathfrak{A}_\infty$ соответствует оператор)

обобщенного сдвига T^w (см. [2], § 2, гл. VI). Пусть $f(z)\in\mathfrak{A}_\infty$ и $h_0=1$, $\{h_\lambda\}_{\lambda\gtrless s}$ комплексные числа.

Теорема 2. *При достаточно быстро убывающих* h_λ $(|\lambda|\to\infty)$ *операторы* $T^w f(z)=u(z, w)$ $(f(z)\in\mathfrak{A}_\infty,\ |w|<\infty)$, *где* $u(z, w)$ *есть решение задачи*

$$A_z u(z, w)=A_w u(z, w), \tag{56}$$

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda}u(z, w)|_{w=0}=h_\lambda f(z) \quad (\lambda\gtrless s), \tag{57}$$

удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига и условию коммутативности.

Доказательство. Докажем сначала существование в $\mathfrak{A}_\infty$ решения этой задачи (единственность была доказана выше). Обозначим через $u^{(\mu)}(z, w)$ $(\mu\gtrless s)$ решение задачи

$$A_z u(z, w)=A_w u(z, w),$$

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial w^\lambda}u(z, w)|_{w=0}=\begin{cases} f(z)=\sum\limits_{k\geqslant 0}b_k\varphi_k(z)^{*} & \lambda=\mu\gtrless s\\ 0 & s\lesseqgtr\lambda\neq\mu.\end{cases} \tag{58}$$

Представляя искомое решение в виде

$$u^{(\mu)}(z, w)=\sum_{k,\nu}a^{(\mu)}_{k,\nu}\varphi_k(z)\varphi_\nu(w)$$

находим, как и выше, из (58)

$$a^{(\mu)}_{k+s,\nu}=a^{(\mu)}_{k,\nu+s}, \tag{59}$$

а из (58) следует

$$\sum_{k,\nu}a^{(\mu)}_{k,\nu}\varphi_k(z)\left.\frac{\partial^{|\lambda|}\varphi_\nu(w)}{\partial w^\lambda}\right|_{w=0}=\sum_{k\geqslant 0}a^{(\mu)}_{k,\lambda}\varphi_k(z)=\begin{cases}\sum\limits_k b_k\varphi_k(z) & \lambda=\mu\gtrless s\\ 0 & s\lesseqgtr\lambda\neq\mu\end{cases}$$

так, что

$$a^{(\mu)}_{k,\lambda}=\begin{cases} b_k & \lambda=\mu\gtrless s\\ 0 & s\lesseqgtr\lambda\neq\mu,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} u^{(\mu)}(z, w)&=\sum_{k,\nu}a^{(\mu)}_{k,\nu}\varphi_k(z)\varphi_\nu(w)=\sum_{\substack{k,p,m\\ m\gtrless s}}a^{(\mu)}_{k,ps+m}\varphi_k(z)\varphi_{ps+m}(w)=\\ &=\sum_{\substack{k,p,m\\ m\gtrless s}}a^{(\mu)}_{k+ps,m}\varphi_k(z)\varphi_{ps+m}(w)=\sum_{\substack{k,p\\ k>0,\ p=0,1,\dots}}b_{k+ps}\varphi_k(z)\varphi_{ps+\mu}(w).\end{aligned} \tag{60}$$

Покажем, что ряд (60) сходится по топологии $\mathfrak{A}_{\infty\times\infty}$. Пусть $|z|\leqslant\rho$, $|w|\leqslant\rho$. Тогда существует $r=r(\rho)$ и $C_1=C_1(\rho)$ так, что $|\varphi_k(z)|\leqslant C_1\frac{r^k}{k!}$ $(k\geqslant 0;\ |z|\leqslant\rho)$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{\nu\geqslant 0}|b_\nu|\frac{(4r)^\nu}{\nu!}$ следует существование $N=N(\rho, f)$ так, что

$$|b_\nu|\leqslant N\frac{\nu!}{(4r)^\nu}\quad (\nu>0).$$

* $\varphi_k(z)=T_0\frac{z^k}{k!}$, где T_0 — оператор преобразования D^s в A.

Тогда

$$|b_{k+ps}||\varphi_k(z)||\varphi_{ps+\mu}(w)| \leqslant C_1 N \frac{(k+ps)!}{(4r)^{k+ps}} \frac{r^k}{k!} \frac{r^{ps+\mu}}{(ps+\mu)!} =$$

$$= C_1^2 N r^{\mu} \frac{(ps)!}{(ps+\mu)!} \frac{(k+ps)!}{k!\,(ps)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+ps} \leqslant C_1^2 N r^{\mu} \frac{(k+ps)!}{k!\,(ps)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+ps}$$

$$(|z| \leqslant \rho,\ |w| \leqslant \rho),$$

причем $\sum\limits_{k,\,p} \frac{(k+ps)!}{k!\,(ps)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+ps} \leqslant \left[\sum\limits_{i,\,j\geqslant 0} \frac{(i+j)!}{i!\,j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{i+j}\right]^n = M < \infty$ ([9], глава 11,

§ 385. Итак, $u^{(\mu)}(z, w) \in \mathfrak{A}_{\infty\times\infty}$ и

$$|u^{(\mu)}(z, w)| \leqslant C_1^2 r^{\mu} MN = C(\rho, \mu)\, N(\rho, f) < \infty \quad (\mu \geqslant s;\ |z|, |w| \leqslant \rho).$$

Пусть теперь $\rho_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\rho_i \uparrow \infty\ (i \to \infty)$. Упорядочим все μ, $\mu \geqslant s$ в последовательность $\{\mu^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ по возрастающим значениям $|\mu^{(i)}|$. Тогда для каждого $\rho = \rho_i$ существует комплексная последовательность $\{h_\mu^{(i)}\}_{\mu\geqslant s}$, $|h_\mu^{(i+1)}| \leqslant |h_\mu^{(i)}|$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h_{\mu_j}^{(i)}|\, C(\rho_i, \mu^{(j)}) < \infty. \tag{61}$$

Тогда при

$$h_{\mu_i} = h_{\mu_i}^{(i)} \tag{62}$$

ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |h_{\mu_i}|\, C(\rho, \mu^{(i)})$ будет сходиться при всех $\rho = \rho_j$, $j = 1, 2, \ldots$ и

поэтому ряд $u(z, w) = \sum\limits_{\mu \geqslant s} h_\mu u^{(\mu)}(z, w) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} h_{\mu_i} u^{\mu^{(i)}}(z, w)$ будет сходиться в топологии $\mathfrak{A}_{\infty\times\infty}$ к $u(z, w) \in \mathfrak{A}_{\infty\times\infty}$ — решению задачи (57). На основе единственности, как и в ([2], глава VI, § 2), проверяется, что семейство T^w обладает всеми свойствами коммутативного семейства операторов обобщенного сдвига.

Класс D ([2], глава I, § 1) определяется как совокупность всех $f(z) \in \mathfrak{A}_{\infty\times\infty}$, для которых

$$T^w f(z)|_{z=0} = f(w).$$

Рассуждая, как в [2, глава VI, § 1], получим

Теорема 3. *Класс D состоит из функций, удовлетворяющих условиям*

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\{A_z^p f(z)\}|_{z=0} = h_k \{A_z^p f(z)\}|_{z=0} \quad (k \geqslant s;\ p = 0, 1, \ldots). \tag{63}$$

6. Пусть теперь $\overline{\mathfrak{A}}_0$ — пространство всех функций $f(z)$, аналитических в $z = 0$, снабженное топологией индуктивного предела пространств $\mathfrak{A}_r$ $(r > 0)$ [7]. Для этого пространства может быть доказано более сильное, чем теорема 1, утверждение.

Теорема 4. *При любых* $a^{(\sigma)}(z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k^{(\sigma)} z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$, $b^{(\sigma)}(z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} b_k^{(\sigma)} z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant s)$, $a^{(s)}(0) \neq 0$, $b^{(s)}(0) \neq 0$ *операторы*

$$A = \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant s} a^{(\sigma)}(z) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial z^{\sigma}} \tag{64}$$

и

$$B = \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant s} b^{(\sigma)}(z) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial z^{\sigma}} \tag{65}$$

линейно эквивалентны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$.

Доказательство. Представим, как и выше (формула 6), искомый оператор T матрицей $[t_{\mu,\nu}]$. В данном случае матрицы операторов A и B имеют вид (без ущерба для общности можно считать $a^{(s)}(0) = b^{(s)}(0) = 1$):

$$\alpha_{\nu, m} = \begin{cases} \delta(m-s)\dfrac{m!}{(m-s)!} & \nu = m-s \\ \displaystyle\sum_{(0,\, m-\nu)\leqslant\sigma\leqslant s} \delta(m-\sigma)\frac{m!}{(m-\sigma)!}a^{(\sigma)}_{\nu+\sigma-m} & \nu > m-s \\ 0 & \nu \mathrel{\overline{\gtrless}} m-s \end{cases} \tag{66}$$

$$\beta_{\mu, \nu} = \begin{cases} \delta(\nu-s)\dfrac{\nu!}{(\nu-s)!} & \mu = \nu-s \\ \displaystyle\sum_{(0,\, \nu-\mu)\leqslant\sigma\leqslant s} \delta(\nu-\sigma)\frac{\nu!}{(\nu-\sigma)!}b^{(\sigma)}_{\mu+\sigma-\nu} & \mu > \nu-s \\ 0 & \mu \mathrel{\overline{\gtrless}} \nu-s. \end{cases} \tag{67}$$

Вместо (9) положим

$$t_{\mu,\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \gtrless \nu \\ \delta_{\mu,\nu} & \mu \mathrel{\overline{\gtrless}} s. \end{cases} \tag{68}$$

Вместо (11) имеем здесь

$$t_{\mu+s,\, m} = \frac{\mu!}{(\mu+s)!}\Big[-\sum_{m\leqslant\nu<\mu+s} \beta_{\mu,\nu} t_{\nu,m} + \sum_{(0,\, m-s)\leqslant\nu\leqslant\mu} t_{\mu,\nu}\alpha_{\nu,m}\Big]. \tag{69}$$

При $\mu + s = m$ получаем

$$t_{\mu+s,\,\mu+s} = t_{\mu,\mu},$$

откуда

$$t_{\nu,\nu} = 1 \qquad (\nu \geqslant 0),$$

и (69) позволяет вычислить всю матрицу T.

Докажем, что элементы $t_{\mu,\nu}$ допускают оценку: для каждого $r > 0$ существует $\rho = \rho(r) < r$ и $C = C(r) > 1$ так, что

$$|t_{\mu,\nu}| \leqslant C\frac{r^\nu}{\rho^\mu} \qquad (\nu,\ \mu \geqslant 0). \tag{70}$$

Это условие обеспечивает непрерывность T в $\overline{\mathfrak{A}}_0$ [10]. Проверим (70) по индукции. Имеем

$$|t_{\mu+s,\,m}| \leqslant C\frac{r^m}{\rho^{\mu+s}}\Big[\sum_{m\leqslant\nu<\mu+s}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}|\beta_{\mu,\nu}|\rho^{\mu+s-\nu} +$$

$$+\sum_{(0,\, m-s)\leqslant\nu\leqslant\mu}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}|\alpha_{\nu,m}|\rho^s r^{\nu-m}\Big] = C\frac{r^m}{\rho^{\mu+s}}K(\mu,\ m) \qquad (\mu+s>m),$$

причем

$$K(\mu, m) \leqslant \sum_{m\leqslant\nu<\mu+s}\ \sum_{(0,\,\nu-\mu)\leqslant\sigma\leqslant s}\delta(\nu-\sigma)\frac{\nu!}{(\nu-\sigma)!}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}|b^{(\sigma)}_{\mu+\sigma-\nu}|\rho^{\mu+\sigma-\nu}\rho^{s-\sigma} +$$

$$+\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-s)!}\delta(m-s)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s + \sum_{\substack{m-s<\nu\leqslant\mu \\ \nu\geqslant 0}}\ \sum_{(0,\, m-\nu)\leqslant\sigma\leqslant s}\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-\sigma)!}\delta(m-\sigma)\times$$

$$\times|a^{(\sigma)}_{\nu+\sigma-m}|r^{\nu-m+\sigma}\rho^s r^{-\sigma} = K_1(\mu, m) + K_2(\mu, m) + K_3(\mu, m).$$

Учитывая неравенства

$$\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{m!}{(m-s)!} \leqslant 1 \qquad (m < \mu + s),$$

$$\frac{\mu!}{(\mu+s)!}\frac{\nu!}{(\nu-\sigma)!} \leqslant 1 \qquad (\nu \leqslant \mu + s)$$

и замечая, что $K_1(\mu, m)$ и $K_3(\mu, m)$ содержат только ρ^k с $k > 0$ и $K_2 < 1$, заключаем $K_1(\mu, m) + K_2(\mu, m) + K_3(\mu, m) \leqslant 1$ при достаточно малых ρ.

Для завершения доказательства отметим, что условие (68) сохраняется при умножении и что для рассмотренного случая имеет место лемма, аналогичная лемме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Delsarte et J. L. Lions. Transmutations d'opérateurs differentieles dans le domaine complexe, Comment. Math. Helv., **32**, 2, 113—128 (1957).

2. Б. М. Левитан. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. ГИФМЛ, М., 1962.

3. М. К. Фаге. Об эквивалентности двух обыкновенных линейных дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами. «Исследов. по совр. пробл. теории ф-ций компл. перем.», ГИФМЛ, М., 468—475, 1961.

4. М. К. Фаге. Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної. Вид-во Львівськ. держ. ун-ту, 1959.

5. М. К. Фаге. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной. «Тр. Московск. матем. об-ва», 7, 227—268, 1958.

6. Н. Бурбаки. *Общая топология*. ГИФМЛ, М., 1958.

7. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства, Изд-во иностр. лит., М., 1959.

8. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Пространства основных и обобщенных функций. ГИФМЛ, М., 1958.

9. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 21, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

10. К. М. Фишман. *К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств*. «Докл. АН СССР», **127**, № 1, 40—43, 1959.

11. М. Г. Хапланов. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций. «Докл. АН СССР», **80**, № 2, 177—180, 1951.