О НЕПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Ф. С. Рофе-Бекетов

1. Титчмаршу и Сиерсу [1, 2, 3] принадлежит известный признак самосопряженности оператора Шредингера

$$-\Delta u + q(x_1, \ldots x_n)\,u$$

во всем пространстве. Справедливость этого признака для пространств E_n любой размерности n отметил Б. М. Левитан в [4], где он предложил новое доказательство теоремы Титчмарша — Сиерса. Ниже дается некоторое обобщение этой теоремы. Оно подобно тому обобщению теоремы Карлемана, которое устанавливает самосопряженность оператора Шредингера в случае его полуограниченности (см. А. Я. Повзнер [5] или И. М. Глазман [6]).

Будем обозначать $x = (x_1, \ldots x_n) \in E_n$, $r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, x^0 — орт вектора x, $x = rx^0$, ω — единичную сферу $|x| = 1$ в пространстве E_n, $d\omega$ — элемент телесного угла, $d\tau$ — элемент объема, $d\tau = r^{n-1}dr\,d\omega$. Финитная функция $u(x)$, равная тождественно нулю также и при $|x| < N$, называется *N-финитной*.

Теорема 1. *Пусть* *

$$Lu = -\Delta u + q(x)\,u, \tag{1}$$

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon\Delta u - Q(r)u \tag{2}$$

операторы Шредингера в $L^2(E_n)$, и пусть при некоторых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ на всех дважды непрерывно дифференцируемых N-финитных функциях $u(x)$ выполняется неравенство

$$(Lu, u) \geqslant (L_\varepsilon u, u). \tag{3}$$

Тогда, если $Q(r) > 0$,

$$\int^{\infty} Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr = \infty, \tag{4}$$

и, кроме того:

или 1° · *$Q^{-\frac{1}{2}}(r)$ удовлетворяет условию Липшица при некотором $K > 0$*

$$|Q^{-\frac{1}{2}}(r_2) - Q^{-\frac{1}{2}}(r_1)| \leqslant K|r_2 - r_1|, \tag{5}$$

или 2° · *$Q(r)$ не убывает ($0 \leqslant r < \infty$),*

то оператор (1) (без краевых условий на бесконечности) является самосопряженным.

Если вместо (3) потребовать просто выполнения неравенства

$$q(x) \geqslant -Q(|x|),$$

то мы придем к теореме Титчмарша — Сиерса с несколько ослабленным требованием относительно гладкости $Q(r)$.

---

* *Мы не уточняем локальных свойств потенциала $q(x)$. В связи с этим вопросом* см. Ю. М. Березанский [14], гл. VI.

Доказательство. Заметим сразу, что теорему достаточно доказать при условии 1° и при этом в предположении двукратной непрерывной дифференцируемости $Q^{-\frac{1}{2}}(r)$. Действительно, если выполняется (5), но $Q^{-\frac{1}{2}}(r) \bar{\in} C^2$, то вместо $Q(r)$ можно подобрать такую $Q_1(r)$, $Q_1^{-\frac{1}{2}}(r) \in C^2$, что для нее сохраняется (5) и все прочие условия теоремы. (Можно считать, например*, $Q(r) \leqslant Q_1(r) \leqslant 2Q(r)$). Если же $Q(r)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая варианту 2° условий теоремы, снова легко можно подобрать функцию $Q_1(r) \geqslant Q(r)$, удовлетворяющую условиям варианта 1°. Достаточно положить

$$Q_1(m) = Q(m+1), \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

а при $m \leqslant r \leqslant m+1$ потребовать, чтобы $Q_1^{-\frac{1}{2}}(r)$ была бы, например, линейной.

Заметим также, что, не ограничивая общности, можно всегда считать $Q(r) \geqslant 1$, так как, если $Q(r)$ удовлетворяет условиям теоремы, то как легко проверить, $Q_1(r) = Q(r) + 1$ тоже удовлетворяет этим условиям, включая (4).

Ниже используются обозначения

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2,$$

где e_i — координатные орты.

Лемма 1. Если $u(x) \in C^2$ и Lu принадлежат $L^2(E_n)$, а $Q(r) \geqslant 1$ и удовлетворяются (хотя бы для N-финитных функций при некотором $N > 0$) условия (3), (5), *то*

$$\int_{E_n} Q^{-1}(r)\, |\nabla u|^2 d\tau < \infty. \tag{6}$$

(Отметим, что лемма верна не только при сферически симметричных $Q(x)$, нужно лишь условие (5) заменить на $|\nabla Q^{-\frac{1}{2}}(x)| \leqslant K$).

Доказательство леммы, очевидно, достаточно провести при $Q(r) \in C^2$ для вещественных функций $u(x)$, равных нулю при $|x| \leqslant N$. Положим

$$\varphi_R(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 Q^{-\frac{1}{2}}(r),$$

$$u_R(x) = u(x)\, \varphi_R(r), \qquad r = |x|.$$

В силу (5), очевидно

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} Q^{-\frac{1}{2}}(r) \right| \leqslant K, \quad |\nabla \varphi_R(r)| \leqslant C, \quad 0 \leqslant r \leqslant R < \infty. \tag{7}$$

Так как в (6) подынтегральная функция не отрицательна, то справедливость леммы эквивалентна ограниченности при $R \to \infty$ интеграла

$$I(R) = \int_{C_R} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^4 Q^{-1}(r)\, |\nabla u|^2 d\tau = \int_{C_R} \varphi_R^2(r)\, |\nabla u|^2 d\tau,$$

где C_R — шар $|x| \leqslant R$. Замечая, что

$$\varphi_R \nabla u = \nabla u_R - u \nabla \varphi_R,$$

имеем

$$I(R) \leqslant 2 \int_{C_R} |\nabla u_R|^2 d\tau + 2 \int_{C_R} |u \nabla \varphi_R|^2 d\tau.$$

* Если $Q(r) \neq \infty$ при $r \neq \infty$.

Здесь второй интеграл ограничен в силу (7). Оценим первый интеграл. Пользуясь формулой Грина—Остроградского и учитывая, что $\varphi_R(R)=0$, находим в силу (3):

$$\int_{C_R} |\nabla u_R|^2 d\tau = -\int_{C_R} u_R \Delta \bar{u}_R d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_{C_R} u_R\{L_\varepsilon u_R + Qu_R\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{C_R}\left(1-\frac{r}{R}\right)^4 u^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{C_R} u_R L u_R d\tau.$$

Но

$$u_R L u_R = \varphi_R^2 u L u + u^2 |\nabla\varphi_R|^2 - \nabla(u^2\varphi_R\nabla\varphi_R),$$

причем первые два слагаемых имеют интегралы, ограниченные равномерно по R, а интеграл по C_R от последнего слагаемого равен нулю. Лемма доказана.

Доказательство теоремы завершается теперь известным образом [3]. Достаточно доказать, что для любых вещественных $u, v \in L^2(E_n)$, таких, что и $Lu, Lv \in L^2(E_n)$,

$$(Lu,v)-(u, Lv)=0. \tag{8}$$

Полагая дополнительно $u, v\in C^2$,

$$P(r)=\int_0^r Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr,$$

имеем

$$\left|\int_{C_R}\left\{1-\frac{P(r)}{P(R)}\right\}(u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{P(R)}\int_{C_R} Q^{-\frac{1}{2}}(r)\left(u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\tau\right| \leqslant \frac{C}{P(R)}\to 0.$$

Оценка последнего интеграла произведена с помощью неравенства Буняковского—Шварца и леммы. Учтено также, что $P(R)\to\infty$ в силу (4). Из доказанного соотношения, в силу суммируемости функции $u\Delta v - v\Delta u = vLu - uLv$ и вытекает (8). Теорема доказана.

Признак самосопряженности в терминах потенциала дает следующая

Теорема 2. *Пусть вещественные коэффициенты оператора Шредингера в* $L^2(E_n)$

$$Lu = -\Delta u + [q(x)+p(x)]\,u \tag{9}$$

удовлетворяют условиям

$$q(x)\geqslant -Q(|x|),$$

$$\int_0^\infty |p(rx^0)|\,Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr \leqslant M < \infty$$

при некотором $M>0$ *и любом* $x^0\in\omega$, *где функция* $Q(r)$ *такая же, как и в теореме 1.*

Тогда для любого ε, $0<\varepsilon<1$, *при* $N>0$ *найдется такое* $\nu = \nu_N(\varepsilon)>0$, *что для всех* N-*финитных функций* $u(x)\in C^2$

$$(Lu, u)\geqslant (L_{\varepsilon\nu}u, u),$$

где $L_{\varepsilon\nu}=-\varepsilon\Delta-\nu Q$, *и, следовательно, (по теореме 1), оператор* L (9) — *самосопряженный.*

Доказательство. Будем, как и прежде, считать, что $Q(r)\in C^2$ и удовлетворяет условию (5). Положим

$$M(x)=\int\limits_{|x|}^{\infty}|p(rx^0)|\,Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr.$$

Замечая, что $M(x)\leqslant M$, и считая $u(x)$ N-финитной функцией, оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_{E_n}|p(x)|\,u^2(x)\,d\tau=\int\limits_{\omega}d\omega\int\limits_0^{\infty}|p|\,Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u^2r^{n-1}dr=$$

$$=\int\limits_{\omega}d\omega\int\limits_0^{\infty}M(x)\left\{2\frac{\partial u}{\partial r}uQ^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}Q'Q^{-\frac{1}{2}}u^2+(n-1)\,r^{-1}Q^{\frac{1}{2}}u^2\right\}r^{n-1}dr\leqslant$$

$$\leqslant 2M\cdot\|\nabla u\|\cdot\|uQ^{\frac{1}{2}}\|+C\cdot\|uQ^{\frac{1}{2}}\|^2. \qquad (10)$$

Здесь учтено, что $\left|\frac{1}{2}Q'Q^{-\frac{1}{2}}\right|=\left|Q\frac{\partial}{\partial r}Q^{-\frac{1}{2}}\right|\leqslant KQ$ и $u(x)=0$ при $|x|\leqslant$ $\leqslant N$. Используя оценку (10), находим при $0<\varepsilon<1$, что на N-финитных функциях

$$(Lu,\ u)=([-\Delta+q+p]\,u,\ u)\geqslant\varepsilon\|\nabla u\|^2+$$

$$+\{(1-\varepsilon)\|\nabla u\|^2-2M\cdot\|\nabla u\|\cdot\|uQ^{\frac{1}{2}}\|-(C+1)\|uQ^{\frac{1}{2}}\|^2\}\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\|\nabla u\|^2-\nu_N(\varepsilon)\cdot\|uQ^{\frac{1}{2}}\|^2=(L_{\varepsilon}u,\ u).$$

Теорема доказана.

2. Рассмотрим подробнее краевую задачу в одномерном случае для уравнения $y''+\{\lambda-q(x)\}\,y=0$ на полуоси $0\leqslant x<\infty$ (аналогично рассматривается задача на всей оси $-\infty<x<\infty$). Здесь, наряду с известными признаками самосопряженности, принадлежащими Титчмаршу—Сирсу [1, 2] и Левинсону [7], которые обобщены В. Б. Лидским [8] на системы уравнений, верны также и теоремы 1 и 2 настоящей работы как для одного уравнения, так и для конечных систем. Кроме того, в одномерном случае, когда $q(x)\to-\infty$ монотонно и удовлетворяет ряду условий гладкости, известен критерий чистой дискретности или непрерывности на всей λ-оси спектра краевой задачи в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $\int^{\infty}|q(x)|^{-\frac{1}{2}}dx$ (Титчмарш [3], Титчмарш и Сирс [9]; другое доказательство дал Б. М. Левитан [10, 11]. Близкий признак принадлежности всей λ-оси непрерывному спектру, с несколько ослабленным требованием гладкости потенциала, предложил И. М. Глазман [6]). Ниже будет дано некоторое обобщение этих результатов о спектре краевой задачи.

Прежде всего, несколько уточняя известные оценки ([3], ч. I, п. 5.2; [12], стр. 138), сформулируем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть*

$$z(x)=\{|u_1(x)|^2+|u_2(x)|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения

$$u''-q(x)\,u=0 \qquad (11)$$

с единичным вронскианом $u_1u_2'-u_2u_1'\equiv 1$.

Тогда: 1°. *Для любого решения уравнения*

$$y'' - [q(x) + p(x)]\, y = 0 \tag{12}$$

справедлива оценка:

$$|y(x)| \leqslant Cz(x) \exp\{\int_0^x z^2(t)\,|p(t)|\,dt\}, \quad x \geqslant 0. \tag{13}$$

2°. *Если*

$$\int_0^\infty z^2(t)\,|p(t)|\,dt < \infty, \tag{14}$$

то для любого решения $y(x)$ *уравнения* (12) *при некоторых* C_1 *и* C_2 справедлива *асимптотика:*

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + O\{z(x) \int_x^\infty z^2(t)\,|p(t)|\,dt\}. \tag{15}$$

3°. *Если*

$$\int_0^\infty z^2(x) \exp\{2 \int_0^x z^2(t)\,|p(t)|\,dt\}\,dx < \infty, \tag{16}$$

(в частности, если справедливо (14) *и, конечно,* $z(x) \in L^2(0, \infty)$*), то каждое решение уравнения* (12) *принадлежит* $L^2(0, \infty)$.

Лемма верна при любых комплексных $q(x)$ *и* $p(x)$.

Доказательство леммы основано на интегральных уравнениях

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \int_0^x C(x, t)\, p(t)\, y(t)\, dt$$

или

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) - \int_x^\infty C(x, t)\, p(t)\, y(t)\, dt,$$

где $C(x, t) = u_1(t) u_2(x) - u_1(x) u_2(t)$ — функция Коши уравнения (11). С учетом оценки $|C(x, t)| \leqslant z(x) z(t)$ доказательство может быть получено методом итераций.

Теорема 3. *Пусть в уравнении*

$$y'' + \{\lambda - q(x) - p(x)\}\, y = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{17}$$

$q(x) \to -\infty$ *при* $x \to \infty$, *причем*

$$q'(x) = O\{|q(x)|^c\}, \quad 0 < c < \frac{3}{2},$$

$q'(x) < 0$, $q''(x)$ *не меняет знака при больших* x, *и пусть, наконец,*

$$\int^\infty |q(x)|^{-\frac{1}{2}} \cdot |p(x)|\, dx < \infty. \tag{18}$$

Тогда:

1°. *Если интеграл*

$$\int^\infty |q(x)|^{-\frac{1}{2}}\, dx \tag{19}$$

расходится, то спектр краевой задачи для уравнения (17) *абсолютно непрерывен и заполняет сплошь всю ось* $-\infty < \lambda < \infty$.

2°. *Если интеграл* (19) *сходится, то, даже заменяя* (18) *более слабым условием, что при некотором* $N \geqslant 0$

$$\int\limits_N^\infty |q(x)|^{-\frac{1}{2}} \exp\{2\int\limits_N^x |q(t)|^{-\frac{1}{2}} |p(t)|\,dt\}\,dx < \infty, \tag{20}$$

можно утверждать, что каждое решение уравнения (17) *принадлежит* $L^2(0, \infty)$ *(т. е. для* (17) *имеет место случай предельного круга) и, следовательно, спектр краевой задачи чисто дискретен.*

Полагая $p(x) \equiv 0$, приходим к результатам Титчмарша—Сиерса.

Доказательство. Как известно ([3], ч. I, гл. V), решения уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \tag{21}$$

при условиях теоремы 3 имеют при $x \to \infty$ при любых вещественных λ асимптотику вида

$$y(x, \lambda) = \{\lambda - q(x)\}^{-\frac{1}{4}}\{A\cos\xi(x) + B\sin\xi(x) + o(1)\}, \tag{22}$$

где

$$\xi(x) = \int\limits_0^x \sqrt{\lambda - q(t)}\,dt,$$

а коэффициенты A и B непрерывно зависят от λ при фиксированных начальных условиях*.

Поэтому при $x \to \infty$ справедлива оценка

$$z(x) = \{|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C \cdot \{\lambda - q(x)\}^{-\frac{1}{4}}, \tag{23}$$

где u_1 и u_2 — решения уравнения (21), и, следовательно, в силу леммы 2 (2°) и условия (18) решения уравнения (17) будут иметь аналогичную (22) асимптотику, а потому индексы дефекта краевой задачи для (17) и характер спектра (абсолютная непрерывность или чистая дискретность), как легко видеть, сохраняются те же, что и для уравнения (21). В частности, известное для краевой задачи для уравнения (21) выражение спектральной функции $\rho(\lambda)$ через коэффициенты асимптотики вида (22) для собственных функций задачи в случае 1° (см. [3], ч. I, гл. V или [10, 11]) оказывается справедливым и для уравнения (17):

$$d\rho(\lambda) = [A^2(\lambda) + B^2(\lambda)]^{-1}\,d\lambda.$$

Наконец, при условии (20) можно λ в уравнении (17) включить в состав возмущения, положив $p_1(x) = p(x) - \lambda$, причем для $p_1(x)$ вместо $p(x)$ условие (20) тоже будет выполняться. Поэтому в силу леммы 2 (3°) каждое решение уравнения (17) в этом случае принадлежит $L^2(0, \infty)$ (следовательно, задача имеет чисто дискретный спектр). Теорема доказана.

Отметим, что случай предельного круга не обеспечивается, как известно (см., например, [13]), одной лишь скоростью стремления потенциала к $-\infty$, даже при условии его монотонности, без дополнительных предположений относительно регулярности поведения потенциала в том или ином смысле (например, относительно гладкости). Теоремой 3 устанавливается определенный класс неограниченных возмущений потенциала (без требования их непрерывности или монотонности), при которых сохра-

---

* Можно показать, что и при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ асимптотика решений возмущенного уравнения аналогична асимптотике решений невозмущенного уравнения.

няются индексы дефекта и свойства спектра рассматриваемой задачи. Например, для уравнения

$$y'' + \{\lambda + x^{10} + x^4 \operatorname{sign} \sin x\} y = 0$$

имеет место случай предельного круга.

В заключение автор выражает искреннюю признательность Н. И. Ахиезеру и И. М. Глазману за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. Titchmarsh. On the uniqueness of the Green's function, Canadian J. Math, 1,191—198 (1949).
2. D. B. Sears. Note on the uniqueness of Green's functions, Canadian J. Math. 2, 314—325 (1950).
3. Э. Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям (перев. с англ. ч. I, II. Изд-во иностр. лит. М., 1960—1961.
4. Б. М. Левитан. Об одной теореме Титчмарша и Сиерса. «Усп. матем. наук»; XVI, № 4, 175—178, 1961.
5. А. Я. Повзнер. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$. «Матем. сб.», 32 (74) : 1, 109—156, 1953.
6. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа Физматгиз, М., 1963.
7. N. Levinson. Criteria for the limit — point case, Časopis Pěst. Math. Fys. 74,17—20 (1949).
8. В. Б. Лидский. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений. «Докл. АН СССР», 95, № 2, 217—220, 1954.
9. D. B. Sears, E. C. Titchmarsh. Some eigenfunction formulae, Quart. J. Math. 1, 165—175 (1950).
10. Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
11. Б. М. Левитан. Некоторые замечания к вопросу о природе спектра (приложение к книге: Э. Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, ч. I) Изд-во иностр. лит. М., 1960.
12. Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений (перев. с англ.). Изд-во иностр. лит., М., 1954.
13. Э. Э. Шноль. Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма—Лиувилля. «Усп. матем. наук», IX, вып. 4 (62), 113—132, 1954.
14. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.