НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

И. В. Островский

Мы будем придерживаться следующих обозначений: $R^{(n)}$ — вещественное, $C^{(n)}$ — комплексное n-мерные эвклидовы пространства; $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, ... — их векторы; $\operatorname{Re} \boldsymbol{x} = (\operatorname{Re} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_n)$, $\operatorname{Im} \boldsymbol{x} = (\operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Im} x_n)$; $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Пусть $P = P(E)$ — закон распределения вероятностей (з. р.) в $R^{(n)}$ (т. е. неотрицательная счетно-аддитивная мера на борелевских множествах в $R^{(n)}$, $P(R^{(n)}) = 1$); $\varphi(\boldsymbol{t}, P)$ — его характеристическая функция (х. ф.):

$$\varphi(\boldsymbol{t}; P) = \int_{R^n} e^{i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})} d_{\boldsymbol{x}} P. \tag{1}$$

Интеграл справа сходится, вообще говоря, только при $\boldsymbol{t} \in R^{(n)}$, поэтому х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t}; P)$ определена, вообще говоря, только при $\boldsymbol{t} \in R^{(n)}$. Если х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t}; P)$ продолжается как голоморфная в некоторую область $G \subset C^{(n)}$, то продолженную функцию будем обозначать снова через $\varphi(\boldsymbol{t}; P)$ и говорить, что х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t}; P)$ голоморфна в G.

Работа состоит из двух параграфов. Основным результатом § 1 является теорема, представляющая многомерный аналог следующей теоремы Д. А. Райкова ([1], стр. 58).

Если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного з. р. P голоморфна в круге $\{t : |t| < r\}$, то она голоморфна в полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < r\}$. При этом во всей полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < r\}$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d_x P$ абсолютно сходится и соотношение (1) сохраняет силу.

В § 2 мы получим теорему, представляющую многомерный аналог другой известной теоремы Д. А. Райкова ([1], стр. 69). Напомним, что если при всех $\boldsymbol{t} \in R^{(n)}$ справедливо

$$\varphi(\boldsymbol{t}; P) = \varphi(\boldsymbol{t}; P^{(1)}) \varphi(\boldsymbol{t}; P^{(2)}),$$

то говорят, что з. р. P является композицией з. р. $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ и обозначают это символом $P = P^{(1)} * P^{(2)}$, а з. р. $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ называют компонентами з. р. P.

Теорема Д. А. Райкова ([1], стр. 69) заключается в следующем. Если х. ф. одномерного з. р. P голоморфна в полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < r\}$, то в той же полосе голоморфна и х. ф. любой компоненты з. р. P.

§ 1

Введем сначала следующее определение.

Определение. Область $G \subset C^{(n)}$ называется хребтовой, если из того, что $t \in G$ следует, что $i \operatorname{Im} t \in G$.

Теперь заметим, что теорема Д. А. Райкова ([1], стр. 58) допускает следующую, формально более общую формулировку.

Если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного з. р. P голоморфна в хребтовой области $G \subset C^{(1)}$, содержащей точку 0, то она голоморфна в некоторой полосе, параллельной действительной оси и содержащей область G. В этой полосе интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d_x P$ абсолютно сходится и совпадает с $\varphi(t; P)$.

Покажем, как эта формулировка получается из обычной. Положим

$$\varphi^{(+)}(t; P) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{itx} d_x P, \quad \varphi^{(-)}(t; P) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx} d_x P. \tag{2}$$

Очевидно, первая из этих функций голоморфна при $\operatorname{Im} t > 0$, а вторая — при $\operatorname{Im} t < 0$. Так как их сумма равна $\varphi(t; P)$, а последняя голоморфна в G, то $\varphi^{(+)}(t; P)$ голоморфна в области $\{t : \operatorname{Im} t > 0\} \cup G$, а $\varphi^{(-)}(t; P)$ — в области $\{t : \operatorname{Im} t < 0\} \cup G$. Обозначим через $-a$ наименьшее из тех значений x, для которых полуплоскость $\{t : \operatorname{Im} t > x\}$ лежит в области голоморфности функции $\varphi^{(+)}(t; P)$. Область G должна лежать в полуплоскости $\{t : \operatorname{Im} t > -a\}$. В противном случае мы имели бы $-ia \in G$, но тогда можно было бы указать круг $\{t : |t| < a_1\}$, $a_1 > a$, в котором функция $\varphi^{(+)}(t; P)$ голоморфна. Так как эта функция либо $\equiv \text{const}$, либо с точностью до множителя является х. ф., то (в силу обычной формулировки теоремы Д. А. Райкова) она должна была бы быть голоморфной в полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < a_1\}$, а, следовательно, и в полуплоскости $\{t : \operatorname{Im} t > -a_1\}$, что противоречит определению a. Аналогично, обозначая через b наибольшее из тех значений x, для которых полуплоскость $\{t : \operatorname{Im} t < x\}$ лежит в области голоморфности $\varphi^{(-)}(t; P)$, получим, что $G \subset \{t : \operatorname{Im} t < b\}$. Таким образом, х. ф. $\varphi(t; P)$ голоморфна в полосе $\{t : -a < \operatorname{Im} t < b\} \supset G$. Замечая, что (в силу обычной формулировки) интегралы, фигурирующие в (2), абсолютно сходятся при $|\operatorname{Im} t| < a$ ($|\operatorname{Im} t| < b$), а, значит, при $\operatorname{Im} t > -a$ ($\operatorname{Im} t < b$) и совпадают там с $\varphi^{(+)}(t; P)$ ($\varphi^{(-)}(t; P)$), получаем нашу формулировку.

В многомерном случае роль полос, параллельных действительной оси, играют области, известные в теории функций многих комплексных переменных под названием выпуклых трубчатых областей.

Определение. Область $G \subset C^{(n)}$ называется выпуклой трубчатой областью, если она имеет вид

$$G = \{t : \operatorname{Im} t \in B\},$$

где B — выпуклая область в $R^{(n)}$, называемая основанием области G.

Наш многомерный аналог теоремы Д. А. Райкова ([1], стр. 58) формулируется так.

Теорема 1. *Если х. ф. $\varphi(t; P)$ n-мерного з. р. P голоморфна в хребтовой области $G \subset C^{(n)}$, содержащей точку $0 = (0, \ldots, 0)$, то она голоморфна в некоторой выпуклой трубчатой области $H \supset G$. При этом во всей области H интеграл, стоящий справа в (1), абсолютно сходится, и соотношение (1) остается в силе.*

Для доказательства этой теоремы мы используем прием, принадлежащий Крамеру и Уольду [2] (см. также [3], стр. 279, [4], стр. 236) и состоящий в том, что для изучения многомерного з. р. P привлекается семейство одномерных з. р., которые естественно называть проекциями з. р. P.

Определение. Проекцией n-мерного з. р. P на орт $\xi \in R^{(n)}$ называется одномерный з. р. P_ξ, задаваемый соотношением

$$P_\xi(E) = P(\{x : (x, \xi) \in E\})$$

(E — любое борелевское множество в $R^{(1)}$).

Легко видеть, что х. ф. законов P_ξ и P связаны соотношением

$$\varphi(t; P_\xi) = \varphi(t\xi; P).$$

Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма. *Если для n линейно независимых ортов $\xi_1, \ldots, \xi_n \in R^{(n)}$ х. ф. $\varphi(t; P_{\xi_1}), \ldots, \varphi(t; P_{\xi_n})$ голоморфны соответственно при $-r_k^{(1)} < \operatorname{Im} t < r_k^{(2)}$ ($r_k^{(1)}, r_k^{(2)} > 0$, $k = 1, \ldots, n$), то х. ф. $\varphi(t; P)$ голоморфна в выпуклой трубчатой области $Q \subset C^{(n)}$, основанием которой служит наименьшая выпуклая область в $R^{(n)}$, содержащая интервалы $\{x : x = \theta\xi_k, -r_k^{(1)} < \theta < r_k^{(2)}\}$, $k = 1, \ldots, n$. При этом во всей области Q интеграл, стоящий справа в (1), абсолютно сходится и соотношение (1) остается в силе.*

Доказательство. Обозначим через Q_α, $0 < \alpha < 1$, область $\{t : \alpha^{-1}t \in Q\}$, а через $J(t)$ — интеграл, стоящий справа в (1). Покажем, что в Q_α интеграл $J(t)$ сходится абсолютно и равномерно. Если $t \in Q_\alpha$, то $\operatorname{Im} t = \sum_{k=1}^{n} \theta_k y_k \xi_k$, где θ_k и y_k ($k = 1, \ldots, n$) — числа, удовлетворяющие условиям $\theta_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 1$, $-\alpha r_k^{(1)} < y_k < \alpha r_k^{(2)}$. Используя очевидное неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{\theta_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (a_k > 0,\ \theta_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \theta_k = 1)$$

при $x \in R^{(n)}$ получаем

$$|\exp[i(t, x)]| = \exp[-(\operatorname{Im} t, x)] = \prod_{k=1}^{n} \{\exp[-y_k(\xi_k, x)]\}^{\theta_k} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \exp[-y_k(\xi_k, x)] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \{\exp[\alpha r_k^{(1)}(\xi_k, x)] + \exp[-\alpha r_k^{(2)}(\xi_k, x)]\}. \quad (3)$$

Но из голоморфности функции $\varphi(t; P_{\xi_k})$ в полосе $\{t : -r_k^{(1)} < \operatorname{Im} t < r_k^{(2)}\}$, как мы уже отмечали, следует, что при любом r, $-r_k^{(1)} < r < r_k^{(2)}$ сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-rx}\, d_x P_{\xi_k}$. Этот интеграл совпадает с интегралом $\int_{R^{(n)}} \exp[-r(\xi_k, x)]\, d_x P$, поэтому последний сходится при $r = -\alpha r_k^{(1)}$ и при $r = \alpha r_k^{(2)}$. Отсюда и из неравенства (3) заключаем, что интеграл $J(t)$ сходится абсолютно и равномерно в области Q_α и, следовательно, является функцией, голоморфной в Q_α. Так как α — любое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \alpha < 1$, то интеграл $J(t)$ абсолютно сходится в Q и голоморфен в Q. Тем самым лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Обозначим через H объединение всех тех хребтовых областей, содержащих область G, в которых х. ф. $\varphi(t; P)$ голоморфна. Очевидно, H — хребтовая область. Мы покажем, что H — выпуклая трубчатая область.

Рассмотрим следующую область в $R^{(n)}$:

$$\tilde{H} = \{x : x = \operatorname{Im} t,\ t \in H\}.$$

Эта область, очевидно, содержит точку 0, ибо $0 \in G \subset H$. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — точки из $\tilde{H}$, от которых мы потребуем лишь, чтобы они не лежали ни в каком $n-1$-мерном подпространстве $R^{(n)}$ и чтобы каждую из них можно было соединить с точкой 0 отрезком, целиком лежащим в $\tilde{H}$. Положим $x^{(k)} = r_k^{(2)}\xi_k$, $k = 1, \ldots, n$, где ξ_k — орты, $r_k^{(2)} > 0$, и выберем числа $r_k^{(1)} > 0$ столь малыми, чтобы $-r_k^{(1)}\xi_k \in \tilde{H}$ $(k = 1, \ldots, n)$ — последнее возможно, так как $0 \in \tilde{H}$. Поскольку

$$\varphi(t; P_{\xi_k}) = \varphi(t\xi_k; P),\ k = 1, \ldots, n,$$

то х. ф. $\varphi(t; P_{\xi_k})$, наверное, голоморфна в той связной компоненте множества $\{t : t\xi_k \in H\}$, которая содержит точку 0. Эта связная компонента, очевидно, является хребтовой областью в $C^{(1)}$, содержащей отрезок $\{t : t = i\theta,\ -r_k^{(1)} \leqslant \theta \leqslant r_k^{(2)}\}$. По теореме Д. А. Райкова (в обобщенной формулировке), х. ф. $\varphi(t; P_{\xi_k})$ голоморфна в полосе $\{t : -r_k^{(1)} < \operatorname{Im} t < r_k^{(2)}\}$. Применяя лемму, заключаем, что область H должна содержать выпуклую трубчатую область, основанием которой служит наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки $0, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$.

Если бы было известно, что область $\tilde{H}$ выпукла, то отсюда, в силу имеющейся у нас свободы в выборе точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, уже следовало бы утверждение теоремы. Но из установленного нами вытекает, что область $\tilde{H}$ обладает таким свойством: (α) если $x^{(1)} \in \tilde{H}$, $x^{(2)} \in \tilde{H}$ и каждую из этих точек можно соединить с точкой 0 отрезками, лежащими целиком в $\tilde{H}$, то их можно соединить между собой отрезком, лежащим целиком в $\tilde{H}$. Покажем, что отсюда следует выпуклость области $\tilde{H}$, тем самым теорема будет доказана.

Обозначим через A множество всех тех точек области $\tilde{H}$, которые можно соединить с точкой 0 отрезком, целиком лежащим в $\tilde{H}$. Очевидно, множество A открыто; из свойства (α) следует, что A — выпуклое множество. Таким образом, A — выпуклая область, содержащаяся в $\tilde{H}$. Если $A \neq \tilde{H}$, то хотя бы одна точка границы области A лежит в $\tilde{H}$. Эта точка не принадлежит A, но ее можно соединить с точкой 0 отрезком, целиком лежащим в $\tilde{H}$, что противоречит определению множества A. Следовательно, $A = \tilde{H}$, что и требовалось.

Сделаем теперь несколько замечаний, показывающих, что теорема 1 в некоторых отношениях неулучшаема.

1. Теорема 1 неулучшаема в том смысле, что голоморфное продолжение за пределы наименьшей выпуклой трубчатой области, содержащей область G, может оказаться уже невозможным. Это вытекает из следующего утверждения:

*Какова бы ни была выпуклая трубчатая область $H \subset C^{(n)}$, содержащая точку 0, можно построить з. р. P, х. ф. которого голоморфна в H и не голоморфна ни в какой большей области**.

Доказательство этого утверждения мы получим, используя один результат Картана и Туллена, доказанный в монографии [5], стр. 117—119,

* Напомним, что выражение «не голоморфна ни в какой большей области» у нас означает «не продолжается как голоморфная ни в какую большую область».

и незначительно модифицируя рассуждение, проведенное на стр. 128—129 той же монографии. Упомянутый результат гласит:

Пусть H — некоторая область в $C^{(n)}$, Γ — множество точек границы H, всюду плотное на этой границе. Предположим, что имеется семейство $\mathfrak{A}_\Gamma$ функций, голоморфных в H, такое, что для каждой точки $\zeta \in \Gamma$ можно указать функцию $f_\zeta(t) \in \mathfrak{A}_\Gamma$, модуль которой неограниченно возрастает вдоль некоторой последовательности точек $t_m \in H$, $t_m \to \zeta$. Тогда, применяя к функциям семейства $\mathfrak{A}_\Gamma$ операции: 1) умножения на положительную постоянную; 2) сложения; 3) возведения в целую положительную степень; 4) предельного перехода, равномерного на всяком компактном множестве, лежащем в H; можно построить функцию, голоморфную в H и не голоморфную ни в какой большей области.

Пусть теперь H — заданная выпуклая трубчатая область, содержащая точку 0. Обозначим через Γ множество тех точек ζ ее границы, у которых $\operatorname{Re}\zeta$ — вектор с рациональными координатами. Построим семейство $\mathfrak{A}_\Gamma$ следующим образом. Пусть $\zeta \in \Gamma$. Точка $\operatorname{Im}\zeta$ является граничной точкой основания $\tilde{H}$ области H. Проведем через точку $\operatorname{Im}\zeta$ опорную $\tilde{H}$ гиперплоскость

$$L(y) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n + \gamma = 0.$$

Знаки коэффициентов в уравнении этой гиперплоскости будем считать выбранными так, чтобы $L(y) < 0$ при $y \in \tilde{H}$.

Обозначим через s наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел, являющихся координатами вектора $\operatorname{Re}\zeta$, и построим целочисленные векторы $p(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, все координаты которых делятся на s и удовлетворяют неравенствам

$$|p_k(m) - \alpha_k m| \leqslant s \; (k = 1, \ldots, n; \; m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как тогда

$$|mL(y) - [(p(m), y) + m\gamma]| \leqslant s(|y_1| + \cdots + |y_n|),$$

то мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{m\gamma} e^{(p(m), y)} = \rho(y) \sum_{m=0}^{\infty} e^{mL(y)}, \tag{4}$$

где $\rho(y)$ — величина, допускающая оценку

$$\exp[-s(|y_1| + \cdots + |y_n|)] \leqslant \rho(y) \leqslant \exp[s(|y_1| + \cdots + |y_n|)].$$

Обозначим ряд, стоящий в левой части (4), через $\psi_\zeta(y)$.

Среди векторов $p(m)$ могут оказаться одинаковые. Соединяя вместе соответствующие члены ряда $\psi_\zeta(y)$, мы можем записать этот ряд в виде

$$\psi_\zeta(y) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = -\infty}^{\infty} a_r e^{(r, y)},$$

где $a_r \geqslant 0$ и могут отличаться от 0 лишь в том случае, когда все координаты вектора r делятся на s. Так как $L(y) < 0$ при $y \in \tilde{H}$, $L(y) \to 0$ при $y \to \operatorname{Im}\zeta$, то из соотношения (4) следует, что ряд $\psi_\zeta(y)$ сходится при $y \in \tilde{H}$ и неограниченно возрастает при $y \to \operatorname{Im}\zeta$.

Положим

$$f_\zeta(t) = \psi_\zeta(-it) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = -\infty}^{\infty} a_r e^{-i(r, t)}.$$

Очевидно, функция $f_\zeta(t)$ голоморфна в области H. Так как она периодична по каждому из переменных $t_1, \ldots, t_n$ с периодом $2\pi s^{-1}$, то если $t \to \zeta\,(t \in H)$ так, что $\operatorname{Re} t = \operatorname{Re} \zeta$, то $f_\zeta(t) = f_\zeta(i \operatorname{Im} t) = \psi_\zeta(\operatorname{Im} t) \to \infty$.

Построив для каждой точки $\zeta \in \Gamma$ функцию $f_\zeta(t)$, получаем искомое семейство $\mathfrak{A}_\Gamma$. Заметим, что так как $0 \in H$, каждая функция $f_\zeta(t)$ является, с точностью до постоянного положительного множителя, х. ф., именно х. ф. следующего з. р.: $P(\{\boldsymbol{r}\}) = a_{-\boldsymbol{r}}\{\psi_\zeta(0)\}^{-1}$, если $\boldsymbol{r}$ — целочисленный вектор, $P(E) = 0$, если E не содержит ни одного целочисленного вектора.

Применим теперь сформулированный выше результат и получим при помощи указанных там операций над функциями из $\mathfrak{A}_\Gamma$ функцию $f(t)$, голоморфную в H и не голоморфную ни в какой большей области. Так как класс функций, являющихся х. ф. с точностью до постоянного положительного множителя, замкнут относительно операций 1), 2), 3) и относительно операции 4), если предельная функция не есть тождественный нуль*, то функция $f(t)$ также принадлежит этому классу. Наше утверждение доказано.

2. Теорема 1 неулучшаема также в следующем смысле: требование, что область G — хребтовая, не может быть отброшено. Это видно даже в одномерном случае на примере функции $(1+t^2)^{-1}$, которая является х. ф., ибо

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-|x|}\,dx.$$

Если бы теорема была справедливой без указанного требования, то из нее следовало бы, что эта х. ф. — целая функция. Из этого же примера видно, что наше требование не может быть заменено, скажем, требованием выпуклости области G.

3. Теорема 1 может быть, очевидно, сформулирована так:

Для того, чтобы область $K \subset C^{(n)}$, содержащая точку 0, была областью голоморфности некоторой х. ф. (т. е., чтобы существовала х. ф., голоморфная в K и не голоморфная ни в какой большей области), необходимо, чтобы из условий: 1) G — хребтовая область, 2) $G \subset K$, 3) $0 \in G$ следовало, что $H \subset K$, где H — наименьшая выпуклая трубчатая область, содержащая область G.

Легко видеть, что к этому необходимому условию можно присоединить еще два:

область K должна быть симметрична в том смысле, что вместе с точкой $t = \operatorname{Re} t + i \operatorname{Im} t$ ей должна принадлежать точка $t' = -\operatorname{Re} t + i \operatorname{Im} t$ (это вытекает из принципа симметрии, ибо интеграл в (1) при $\operatorname{Re} t = 0$ положителен); область K должна быть областью голоморфности** (т. е. существует функция, не обязательно являющаяся х. ф., голоморфная в K и не голоморфная ни в какой большей области).

Возникает вопрос, являются ли эти три условия вместе также и достаточными для того, чтобы область K была областью голоморфности некоторой х. ф.

В многомерном случае нам ответить на этот вопрос не удалось. В одномерном случае утвердительный ответ мы получаем при помощи результата Картана и Туллена, сформулированного нами ранее.

---

* Замкнутость относительно операций 1) и 2) тривиальна, о замкнутости относительно операций 3) и 4) см. [4], стр. 236—238, теоремы 4 и 5. Чтобы сослаться на последнюю теорему, нужно знать, что равномерная сходимость имеет место на каждом компакте в $R^{(n)}$, но это условие у нас выполнено, ибо H — трубчатая область и поэтому из $0 \in H$ следует $R^{(n)} \subset H$.

** Это условие в одномерном случае отпадает.

В силу этого результата достаточно для каждой точки ζ границы* области K построить х. ф. $\varphi_\zeta(t)$, голоморфную в K, модуль которой неограниченно возрастает вдоль некоторой последовательности $t_m \in K, t_m \to \zeta$.

Пусть $\zeta = \xi - i\eta \neq \infty$ — точка границы области K, в силу симметрии точка $-\xi - i\eta$ также является точкой границы. Так как $0 \in K$, то в силу первого необходимого условия (теоремы 1) $\eta \neq 0$. Будем считать, что $\eta > 0$ — случай $\eta < 0$ рассматривается аналогично. Обозначим через a точную нижнюю грань тех значений x, для которых $-ix \in K$. Точка $-ia$ является точкой границы K, причем в силу $0 \in K$ и первого необходимого условия, мы имеем $0 < a \leqslant \eta$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\zeta(t) = \left(\frac{1}{a} + \frac{2\eta}{\eta^2 + \xi^2}\right)^{-1} \int_0^\infty e^{itx}\left(e^{-ax} + e^{-\eta x}\cos \xi x\right) dx.$$

Так как $e^{-ax} + e^{-\eta x}\cos \xi x \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$, то функция $\varphi_\zeta(t)$ является х. ф. Вычисляя интеграл, получим

$$\varphi_\zeta(t) = \left(\frac{1}{a} + \frac{2\eta}{\eta^2 + \xi^2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{a - it} + \frac{1}{\eta - i\xi - it} + \frac{1}{\eta + i\xi - it}\right\},$$

откуда видно, что эта функция обладает всеми нужными свойствами.

§ 2

Сначала мы переформулируем теорему Д. А. Райкова [1], стр. 69 следующим образом.

Если х. ф. $\varphi(t;\ P)$ одномерного з. р. P голоморфна в полосе $\{t : -a < \operatorname{Im} t < b\}$ $(a > 0, b > 0)$, то в той же полосе голоморфна и х. ф. любой компоненты з. р. P.

Эта формулировка получается из обычной так. Пусть мы имеем $P = P^{(1)} * P^{(2)}$. Это означает, что при $t \in R^{(1)}$

$$\varphi(t;\ P) = \varphi(t;\ P^{(1)})\,\varphi(t;\ P^{(2)}). \tag{5}$$

Предположим, что $a < b$ — это не уменьшит общности. Так как $\varphi(t;\ P)$ голоморфна в полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < a\}$, то, в силу обычной формулировки, $\varphi(t;\ P^{(1)})$ и $\varphi(t;\ P^{(2)})$ голоморфны в той же полосе. Пусть c — точная верхняя грань тех значений x, для которых обе функции $\varphi(t;\ P^{(1)})$ и $\varphi(t;\ P^{(2)})$ голоморфны в полосе $\{t : -a < \operatorname{Im} t < x\}$. Число c не меньше a. Нам нужно показать, что оно не может быть меньше b. Предположим противное.

Очевидно, во всей полосе $\{t : -a < \operatorname{Im} t < c\}$ соотношение (5) сохраняет силу. В частности, мы имеем

$$\varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P\right) = \varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P^{(1)}\right)\varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P^{(2)}\right),\ t \in R^{(1)}.$$

Отсюда, полагая

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P\right)}{\varphi\left(\frac{ic}{2};\ P\right)};\quad \varphi_1(t) = \frac{\varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P^{(1)}\right)}{\varphi\left(\frac{ic}{2};\ P^{(1)}\right)};\quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi\left(t + \frac{ic}{2};\ P^{(2)}\right)}{\varphi\left(\frac{ic}{2};\ P^{(2)}\right)},$$

---

* Можно, конечно, ограничиться всюду плотным на границе области K множеством. Отсюда следует, что если ∞ входит в границу K, но не является изолированной точкой, то соответствующую функцию можно не строить. Если же ∞ является изолированной точкой границы, можно ей поставить в соответствие e^{it}. Заметим, что если граница области K — пустое множество, то K является областью голоморфности (единственной) х. ф. $\varphi(t;\ P) \equiv 1$ $(P(E) = 1$, если $0 \in E$, $P(E) = 0$, если $0 \,\overline{\in}\, E)$.

имеем ($t \in R^{(1)}$)

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t).$$

Заметим теперь, что функция $\varphi_0(t)$ является х. ф. некоторого з. р. (именно, з. р. $P_c(E) = \int\limits_E e^{-\frac{cx}{2}} d_x P \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{cx}{2}} d_x P \right\}^{-1}$, где E — любое борелевское множество в $R^{(1)}$) и аналогичное справедливо относительно $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Но из определения $\varphi_0(t)$ видно, что она голоморфна в некоторой полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < d\}$, где $d < \frac{c}{2}$, поэтому там же голоморфны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Отсюда следует, что функции $\varphi(t; P^{(1)})$ и $\varphi(t; P^{(2)})$ голоморфны в полосе $\left\{t : -a < \operatorname{Im} t < \frac{c}{2} + d\right\}$. Так как $\frac{c}{2} + d > c$, мы имеем противоречие, чем и доказана справедливость нашей формулировки.

Многомерный аналог теоремы Д. А. Райкова ([1], стр. 69) выглядит так.

Теорема 2. *Если х. ф. $\varphi(t; P)$ з. р. P голоморфна в некоторой выпуклой трубчатой области $H \subset C^{(n)}$, содержащей точку 0, то в той же области H голоморфна и х. ф. любой компоненты з. р. P.*

Этот результат получается при помощи метода Крамера — Уольда и леммы предыдущего параграфа следующим образом.

Сначала заметим, что если $P = P^{(1)} * P^{(2)}$, то для любого орта $\xi \in R^{(n)}$ справедливо $P_\xi = P_\xi^{(1)} * P_\xi^{(2)}$ — это следует из соотношения

$$\varphi(t\xi; P) = \varphi(t\xi; P^{(1)})\,\varphi(t\xi; P^{(2)})\ (t \in R^{(1)}).$$

Пусть $\tilde{H}$ — основание области H; ξ — произвольный орт в $R^{(n)}$. Положим

$$-r^{(1)}(\xi) = \inf_{x\xi \in \tilde{H}} x,\quad r^{(2)}(\xi) = \sup_{x\xi \in \tilde{H}} x.$$

Очевидно, функция $\varphi(t\xi; P) = \varphi(t; P_\xi)$ голоморфна в полосе $\{t : -r^{(1)}(\xi) < \operatorname{Im} t < r^{(2)}(\xi)\}$. Так как $P_\xi = P_\xi^{(1)} * P_\xi^{(2)}$, то по теореме Д. А. Райкова (в нашей формулировке) х. ф. $\varphi(t; P_\xi^{(1)})$ и $\varphi(t; P_\xi^{(2)})$ голоморфны в той же полосе. Возьмем теперь любую систему n линейно независимых ортов $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тогда х. ф. $\varphi(t; P_{\xi_k}^{(1)})$ и $\varphi(t; P_{\xi_k}^{(2)})$ голоморфны в полосе $\{t : -r^{(1)}(\xi_k) < \operatorname{Im} t < r^{(2)}(\xi_k)\}$. По лемме предыдущего параграфа заключаем, что х. ф. $\varphi(t; P^{(1)})$ и $\varphi(t; P^{(2)})$ голоморфны в трубчатой области, основанием которой служит наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки $-r^{(1)}(\xi_1)\xi_1, \ldots, -r^{(1)}(\xi_n)\xi_n, r^{(2)}(\xi_1)\xi_1, \ldots, r^{(2)}(\xi_n)\xi_n$. В силу произвола в выборе системы ортов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ отсюда заключаем о справедливости доказываемой теоремы.

Замечание 1. Непосредственно из теоремы 1 следует, что если в теореме 2 условие: H — выпуклая трубчатая область — заменить условием: H — хребтовая область, то утверждение теоремы 2 сохранит силу.

Замечание 2. Если на область H не накладывать никаких ограничений, кроме $0 \in H$, теорема перестанет быть верной. Это видно уже в одномерном случае из следующего примера. Положим*

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}(e^{imt} - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}(e^{-imt} - 1)\right\},$$

* То, что указанные ниже функции действительно являются х. ф. некоторого з. р., вытекает из известной теоремы Леви—Хинчина об общем виде х. ф. безгранично делимого закона.

$$\varphi(t;\,P^{(1)}) = \exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!}\,(e^{ir!t}-1) + \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!}\,(e^{-ir!t}-1)\right\},$$

$$\varphi(t;\,P^{(2)}) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}{}' \; e^{-m}\,(e^{imt}-1) + \sum_{m=1}^{\infty}{}' \; e^{-m}\,(e^{-imt}-1)\right\}$$

(штрих у знака суммы означает, что пропускаются все значения m вида $r!$, $r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$). Очевидно, что $P = P^{(1)} * P^{(2)}$. Заметим теперь, что

$$\varphi(t;\,P) = \exp\left\{\frac{e}{e-e^{it}} + \frac{e}{e-e^{-it}} - \frac{2}{e-1}\right\},$$

поэтому х. ф. $\varphi(t;\,P)$ голоморфна во всей плоскости $C^{(1)}$ с исключенными точками $\pm i + 2m\pi\ (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. С другой стороны, в силу теоремы Адамара о пропусках ([6], стр. 253) ряд $\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!}z^{r!}$ представляет функцию, непродолжаемую за пределы круга $\{z : |z| < e\}$, и поэтому х. ф. $\varphi(t;\,P^{(1)})$, голоморфная в полосе $\{t : |\operatorname{Im} t| < 1\}$, не голоморфна ни в какой большей области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.
2. H. Cramer, H. Wold. Some theorems on distribution functions, J. Lond. Math. Soc., 11, 290—294 (1936).
3. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
4. Б. В. Гнеденко. Элементы теории функций распределения случайных векторов, «Усп. матем. наук», вып. 10, 230—244, 1944.
5. С. Бохнер, У. Т. Мартин. Функции многих комплексных переменных. Изд-во иностр. лит., М., 1951.
6. Е. Титчмарш. Теория функций. ГИТТЛ, М—Л., 1951.