О ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦАХ С ЕДИНСТВЕННОЙ ТОЧКОЙ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА

П. Б. Найман

Настоящая заметка посвящена бесконечным симметрическим якобиевым матрицам с единственной (конечной или бесконечной) точкой предельного спектра. Рассматривается вопрос об односторонней и двусторонней сходимости дискретного спектра к этой точке. Заметка примыкает к статье автора [1], в которой предельные точки спектра образовывали отрезок ненулевой длины и изучался вопрос об односторонней и двусторонней сходимости дискретного спектра к концам этого отрезка. В основе данного исследования лежат прямые методы качественного спектрального анализа [2]. Попутно исправляется одно ошибочное утверждение Я. Шохата [3].

1. Обозначим через T бесконечную симметрическую якобиеву матрицу $T=(a_{ik})_{ik=0}^{\infty}$, ($a_{ik}=0$ при $|i-k|>1$; $a_{kk}=a_k$; $a_{k-1,\,k}=a_{k,\,k-1}=b_k$). Оператор, определяемый этой матрицей в ортонормированном базисе $\{\vec{e}_n\}$ пространства l_2, также будем обозначать через T. Пусть T имеет единственную точку предельного спектра λ_0. Мы будем различать случаи, когда эта точка конечна и когда она является бесконечно удаленной точкой.

2. В первом случае без ограничения общности можно считать $\lambda_0=0$. Тогда матрица T будет вполне непрерывна в l_2 и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ [4]. Дискретный спектр матрицы T может сгущаться к нулю с обеих сторон, или только слева, или только справа. Укажем несколько простых условий, обеспечивающих осуществление каждого из этих трех случаев.

1°. *Если в последовательности $\{a_n\}$ имеется бесконечное число знакоперемен, то дискретный спектр матрицы T сгущается к нулю с обеих сторон, независимо от характера стремления к нулю b_n.*

В самом деле, пусть $\{a_{n_k}\}$ есть подпоследовательность, составленная из положительных элементов последовательности $\{a_n\}$ такая, что $n_{k+1}-n_k>2$. Тогда квадратичная форма $(T\vec{y},\vec{y})$ будет положительна не только на выбранной подпоследовательности базисных векторов, $(T\vec{e}_{n_k},\vec{e}_{n_k})=a_{n_k}>0$, но и на их бесконечномерной линейной оболочке, откуда следует, что число положительных собственных значений бесконечно. Точно так же устанавливается бесконечность множества отрицательных собственных значений.

Пусть теперь все $a_n=0$. Если λ — некоторое собственное значение, $\{y_k\}$ — соответствующий собственный вектор такой матрицы T, то

$\{(-1)^k y_k\}$ будет ее собственным вектором, отвечающим собственному значению $-\lambda$. Следовательно, в этом случае спектр симметричен относительно нуля, а значит сгущается к нулю с обеих сторон.

Спектр остается бесконечным слева и справа от нуля, если потребовать, чтобы $|a_n|$ были малы по сравнению с b_n, вне зависимости от знака a_n. Соответствующий признак приводится ниже.

2°. *Если, начиная с некоторого номера* N, *величины* a_n *не меняют знака и* $|a_n + a_{n-1}| < 2b_n$, *то точки дискретного спектра сгущаются к нулю с обеих сторон.*

Действительно, рассмотрим две бесконечные последовательности векторов: $\{\vec{e}_{3k} + \vec{e}_{3k+1}\}_{k=N_1}^{\infty}$ и $\{\vec{e}_{3k} - \vec{e}_{3k+1}\}_{k=N_1}^{\infty}$, $(3N_1 \geqslant N)$. Построим бесконечномерные линейные оболочки M_1 и M_2 каждой из этих последовательностей. Достаточно проверить, что квадратичная форма $(T\vec{y}, \vec{y})$ на M_1 положительна, а на M_2 отрицательна. Так как

$$(T(\vec{e}_{3k} + \vec{e}_{3k+1}),\ \vec{e}_{3k} + \vec{e}_{3k+1}) = a_{3k} + a_{3k+1} + 2b_{3k+1} > 0,$$

и

$$(T(\vec{e}_{3k} - \vec{e}_{3k+1}),\ \vec{e}_{3k} - \vec{e}_{3k+1}) = a_{3k} + a_{3k+1} - 2b_{3k+1} < 0,$$

то, очевидно, будет $(T\vec{y}, \vec{y}) > 0$ на любом $\vec{y} \neq 0$ из M_1, и $(T\vec{y}, \vec{y}) < 0$ на любом $\vec{y} \neq 0$ из M_2. Утверждение 2° доказано.

Естественно ожидать, что достаточным условием конечности спектра с одной из сторон будет малость b_n по сравнению с $|a_n|$.

3°. *Если, начиная с некоторого номера* N, *все* $a_n > 0$ *(соответственно, все* $a_n < 0$*), и* $b_n + b_{n+1} < |a_n|$, *то слева (соответственно, справа) от нуля имеется лишь конечное число точек спектра.*

Это утверждение сразу же следует из представления [1] квадратичной формы для любого N-финитного вектора $\vec{y}$ в виде

$$(T\vec{y}, \vec{y}) = b_N |y_N|^2 + b_{N+p+1} |y_{N+p}|^2 + \sum_{k=N+1}^{N+p} b_k |y_{k-1} + y_k|^2 + \\ + \sum_{k=N}^{N+p} (a_k - b_k - b_{k+1}) |y_k|^2, \qquad (1)$$

или

$$(T\vec{y}, \vec{y}) = -b_N |y_N|^2 - b_{N+p+1} |y_{N+p}|^2 - \\ - \sum_{k=N+1}^{N+p} b_k |y_k - y_{k-1}|^2 + \sum_{k=N}^{N+p} (a_k + b_k + b_{k+1}) |y_k|^2. \qquad (2)$$

Отметим, что признак 2° можно приблизить к признаку 3°, если в качестве пробных векторов взять векторы

$$\sum_{s=0}^{m-1} \vec{e}_{(m+1)k+s} \text{ и } \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \vec{e}_{(m+1)k+s},$$

$$(k = N_1,\ N_1 + 1,\ \ldots;\ N_1(m+1) \geqslant N;\ m > 2);$$

3. Прежде чем перейти к случаю, когда единственная точка предельного спектра лежит в бесконечности, рассмотрим вопрос об односторонней и двусторонней неограниченности спектра.

Из равенства $a_n = (T\vec{e}_n, \vec{e}_n)$ непосредственно вытекает следующий признак.

4°. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *неограничена сверху, снизу или с обеих сторон, то, независимо от поведения* b_n, спектр матрицы T *неограничен сверху, снизу или с обеих сторон, соответственно.*

Спектр может быть неограниченным с обеих сторон и в случае, когда последовательность $\{a_n\}$ полуограничена, как это видно из следующего утверждения.

5°. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена сверху, а последовательность* $\{a_{n-1} + a_n + 2b_n\}$ *неограничена сверху, либо последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена снизу, а последовательность* $\{a_{n-1} + a_n - 2b_n\}$ *неограничена снизу, то спектр неограничен с обеих сторон.*

Справедливость этого утверждения легко проверить, если выбрать подпоследовательности $(a_{n_k-1} + a_{n_k} + 2b_{n_k}) \to \infty$ и $(a_{n_s-1} + a_{n_s} - 2b_{n_s}) \to -\infty$, а затем рассмотреть квадратичную форму $(T\vec{y}, \vec{y})$ на пробных векторах $\vec{e}_{n_k} + \vec{e}_{n_k+1}$ и $\vec{e}_{n_s} - \vec{e}_{n_s+1}$.

Из 5°, в частности, следует

6°. *Если* $\{a_n\}$ — *ограниченная последовательность, а* $\{b_n\}$ — *неограниченная последовательность, то спектр неограничен с обеих сторон.*

Условия односторонней ограниченности спектра могут быть сформулированы следующим образом.

7°. *Если последовательность* $\{a_n - b_n - b_{n+1}\}$ *ограничена снизу или последовательность* $\{a_n + b_n + b_{n+1}\}$ *ограничена сверху, то спектр ограничен снизу или, соответственно, сверху.*

Это утверждение вытекает непосредственно из представления квадратичной формы $(T\vec{y}, \vec{y})$ в виде (1) и (2).

Из признаков 4° и 7° следует, что если последовательность $\{a_n\}$ ограничена только снизу или только сверху, а $\{b_n\}$ — ограниченная последовательность, то спектр будет ограничен снизу и будет простираться до $+\infty$, или, соответственно, ограничен сверху и будет простираться до $-\infty$. Этому противоречат ошибочные утверждения (ii) и (iii) статьи [3].

4. Перейдем теперь к случаю, когда единственная точка предельного спектра лежит в бесконечности. Дискретный спектр матрицы T будет сгущаться к бесконечности с «обеих сторон» (т. е. будет неограниченным снизу и сверху), только «слева» (т. е. будет неограниченным только сверху) или только «справа» (т. е. будет неограниченным только снизу).

8°. *Если в последовательности* $\{a_n\}$ *имеется бесконечное число знакоперемен и* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, *а последовательность* $\{b_n\}$ *ограничена, то спектр дискретен и сгущается к бесконечности с обеих сторон.*

Доказательства требует только дискретность, так как двусторонняя неограниченность спектра матрицы T вытекает из 4°.

Очевидно, что спектр матрицы T дискретен одновременно со спектром матрицы μT $(\mu > 0)$. Так как числа b_n ограничены, то число μ можно выбрать так, чтобы было $1 - \mu b_n - \mu b_{n+1} > \delta$, где $\delta > 0$. Покажем, что спектр матрицы $\mu^2 T^2$ дискретен, откуда будет следовать дискретность спектра μT, а следовательно, и T. Для этого представим квадратичную форму оператора $\mu^2 T^2$ на произвольном N-финитном векторе $\vec{y}$ в следующем виде:

$$(\mu^2 T^2 \vec{y}, \vec{y}) = \sum_{k=N+1}^{N+p-1} \mu^2 b_k b_{k+1} |y_{k-1} + y_{k+1}|^2 + \sum_{k=N+1}^{N+p} \mu b_k |y_k \mu a_k + y_{k-1}|^2 +$$

$$+ \sum_{k=N}^{N+p-1} \mu b_{k+1} |a_k \mu y_k + y_{k+1}|^2 + \mu b_N (a_N^2 \mu^2 + b_{N-1}\mu + 1) |y_N|^2 +$$

$$+ \mu b_N b_{N+1} |y_{N+1}|^2 + \mu b_{N+p+1} (\mu^2 a_{N+p}^2 + \mu b_{N+p+2} + 1) |y_{N+p}|^2 +$$

$$+ b_{N+p}b_{N+p+1}\mu^2 |y_{N+p-1}|^2 + \sum_{k=N}^{N+p} [\mu^2 a_k^2 (1 - \mu b_k - \mu b_{k+1}) + \mu^2 (b_k^2 + b_{k+1}) -$$
$$- \mu^2 (b_{k-1}b_k + b_{k+1}b_{k+2}) - \mu (b_k + b_{k+1})] |y_k|^2. \tag{3}$$

Какое бы большое число $\lambda > 0$ мы не взяли, найдется, очевидно, такой номер N, начиная с которого для всех N-финитных векторов будет $(\mu^2 T^2 \vec{y}, \vec{y}) > \lambda (\vec{y}, \vec{y})$. Это означает, что, каково бы ни было λ, слева от него имеется лишь конечное число точек спектра оператора $\mu^2 T^2$, откуда вытекает дискретность спектра оператора $\mu^2 T^2$.

Следующий признак относится к случаю, когда величины a_n ограничены, а $b_n \to \infty$.

9°. *Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а $b_n \to \infty$ и для некоторого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство*

$$\frac{b_{n-1} b_n + b_{n+1} b_{n+2}}{b_n^2 + b_{n+1}^2} < 1 - \varepsilon, \tag{4}$$

то спектр матрицы T дискретен и сгущается к бесконечности с обеих сторон.

Для доказательства достаточно, воспользовавшись представлением 3) при $\mu = 1$, записать неравенство

$$(T^2\vec{y}, \vec{y}) > \sum_{k=N}^{N+p} (b_k^2 + b_{k+1}^2) \left[\frac{a_k^2 (1 - b_k - b_{k+1})}{b_k^2 + b_{k+1}^2} + \right.$$
$$\left. + 1 - \frac{b_{k-1} b_k + b_{k+1} b_{k+2}}{b_k^2 + b_{k+1}^2} - \frac{b_k + b_{k+1}}{b_k^2 + b_{k+1}^2} \right] |y_k|^2,$$

из которого при соблюдении (4) следует, что, каково бы ни было $\lambda > 0$, справедливо неравенство $(T\vec{y}, \vec{y}) > \lambda (\vec{y}, \vec{y})$ на всех N-финитных векторах, начиная с некоторого N. Это означает, что спектр матрицы T^2, а следовательно, и матрицы T дискретен. На основании утверждения 6° он сгущается к бесконечности с обеих сторон.

Наконец, укажем еще следующий простой признак.

10°. Если $(a_n - b_n - b_{n+1}) \to +\infty$ или $(a_n + b_n + b_{n+1}) \to -\infty$, то спектр дискретен и сгущается к бесконечности только слева или только справа, соответственно.

Этот результат следует из представления формы $(T\vec{y}, \vec{y})$ в виде (1) или (2), соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Б. Найман. О множестве изолированных точек роста спектральной функции предельно постоянной якобиевой матрицы. «Изв. вузов», № 1 (8), 129, 1959.

2. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, М., 1963.

3. J. Shohat. The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell. Amer. Journ. vol LVIII, № 3, 1936.

4. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ДНТВУ, 1938.