О ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРАХ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Н. И. Нагнибида

Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}_R (0 < R \leqslant \infty)$ всех однозначных функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, аналитических в круге $C_R (|z| < R)$ с топологией компактной сходимости [1].

Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность не равных нулю комплексных чисел, удовлетворяющая следующему условию: для всякого $\rho\,(\rho < R)$ существуют такие постоянные $C_1(\rho) > 0$, $C_2(\rho) > 0$ и $r = r(\rho) < R$, что

$$C_1(\rho)\left(\frac{\rho}{r}\right)^k \leqslant \left|\frac{\alpha}{\alpha_{k+1}}\right| \leqslant C_2(\rho)\left(\frac{r}{\rho}\right)^k \ (k \geqslant 0). \tag{1}$$

Через Δ и I обозначим соответственно линейные операторы в $\mathfrak{A}_R$, определенные на базисных элементах $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\Delta 1 = 0, \quad \Delta z^{k+1} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} z^k \ (k \geqslant 0)$$

и

$$I z^k = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} z^{k+1} \quad (k \geqslant 0).$$

Тогда, как известно [2], в силу (1) операторы Δ и I могут быть расширены до линейных непрерывных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{A}_R$ в себя, причем для любой функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, принадлежащей $\mathfrak{A}_R$, имеем

$$\Delta f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} z^k,$$

$$I f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} z^{k+1}.$$

Заметим, что если α является последовательностью коэффициентов целой функции класса $[\rho_1, \sigma]$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{\rho_1}} \sqrt[k]{|\alpha_k|} = (\sigma e \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}},$$

то оператор Δ совпадает с оператором обобщенного дифференцирования, рассматриваемым А. О. Гельфондом и А. Ф. Леонтьевым [3].

1. Найдем общий вид линейного непрерывного оператора в $\mathfrak{U}_R$, перестановочного с оператором Δ^n, где $n (n \geqslant 1)$ — фиксированное целое.

Будем говорить, что матрица $\{T\} = \{t_{i,k}\}_{i,k=0}^{\infty}$ или, что то же самое, определяемый соотношениями $Tz^k = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i,k} z^i$ линейный оператор T в пространстве $\mathfrak{U}_R$ удовлетворяет условию (N), если для всякого $\rho < R$ существует такое $\tilde{r} = \tilde{r}(\rho) < R$, что

$$\sup_k \sum_{i=0}^{\infty} |t_{i,k}| \frac{\rho^i}{\tilde{r}^k} < +\infty. \tag{N}$$

Условие (N), как известно [2], является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор T мог быть продолжен до линейного непрерывного оператора, определенного на всем $\mathfrak{U}_R$.

Пусть T — линейный непрерывный оператор в $\mathfrak{U}_R$, перестановочный с оператором Δ^n. Тогда, после очевидных вычислений, из условия перестановочности операторов T и Δ^n в матричном виде $(\{\Delta^n\}\{T\} = \{T\} \cdot \{\Delta^n\})$ получим следующие соотношения:

$$t_{sn+l,\, mn+q} = \begin{cases} 0, & m < s \\ \dfrac{\alpha_{sn+l}}{\alpha_{mn+q}} \dfrac{\alpha_{(m-s)n+q}}{\alpha_l} \cdot t_{l,\,(m-s)n+q}; & 0 \leqslant s \leqslant m < \infty, \quad 0 \leqslant l, q \leqslant n-1. \end{cases} \tag{2}$$

Если теперь $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — произвольная функция из пространства $\mathfrak{U}_R$, то, учитывая условие (N), получим

$$Tf(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} a_{mn+q} T z^{mn+q} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} a_{mn+q} \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n-1} t_{sn+l,\, mn+q} z^{sn+l} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{mn+q} \frac{\alpha_{(m-s)n+l}}{\alpha_{mn+q}} \frac{\alpha_{sn+q}}{\alpha_l} \cdot t_{l,\, sn+q} z^{(m-s)n+l} * =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\, sn+q} \frac{\alpha_{sn+q}}{\alpha_l} \sum_{m=s}^{\infty} a_{mn+q} \frac{\alpha_{(m-s)n+l}}{\alpha_{mn+q}} \cdot z^{(m-s)n+l} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} t_{l,\, sn+q} \frac{\alpha_{sn+q}}{\alpha_l} \cdot \Delta^{sn+q-l} A_q f(z), \tag{3}$$

где при $s = 0$ и $q < l$ $\Delta^{q-l} = I^{l-q}$, а $A_q (q = 0, 1, \ldots, n-1)$ — линейные непрерывные операторы в $\mathfrak{U}_R$, определяемые следующим образом:

$$A_q f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn+q} z^{mn+q}.$$

Очевидно также, что всякий линейный оператор T вида (3), удовлетворяющий условию (N), является линейным непрерывным оператором в $\mathfrak{U}_R$, перестановочным с Δ^n, так как $\Delta^n A_q = A_q \Delta^n$ $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$.

* Здесь мы воспользовались соотношениями (2) и заменили $m - s$ на s.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор T в пространстве $\mathfrak{U}_R$ был линейным непрерывным оператором, перестановочным с Δ^n, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид (3) и удовлетворял условию (N).*

Замечание. В случае $n=1$ формула (3) оператора I не содержит и поэтому требование выполнения левого неравенства в условии (1) становится излишним.

Пусть $\alpha = \left\{\frac{1}{k!}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Эта последовательность, очевидно, удовлетворяет условию (1) и $D = \Delta = \frac{d}{dz}$, а $If(z) = \int_0^z f(z)\,dz$. При $n=1$ неравенство условия (N) для любого линейного оператора T, перестановочного с D, принимает (учитывая (2)) следующий вид:

$$\sup_m \sum_{s=0}^{m} |t_{0,s}| \cdot C_m^s \frac{\rho^{m-s}}{\tilde{r}^m} < +\infty. \qquad (N')$$

Легко усмотреть, что при выполнении условия (N') характеристическая функция $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t_{0,s}}{s!}\lambda^s$ оператора T является целой функцией конечной степени [4]. Обратное же утверждение, очевидно, справедливо при $R=\infty$ и, как показывает пример функции $\varphi(\lambda) = e^{\lambda}$, вообще говоря, неверно при $R<\infty$.

Следствие 1. *Для того чтобы линейный оператор T в пространстве $\mathfrak{U}_R$ $(0 < R \leqslant \infty)$ был линейным непрерывным оператором, перестановочным с оператором дифференцирования D, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$T = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t_{0,s}}{s!} D^s = \varphi(D) \qquad (4)$$

и удовлетворял условию (N').

Следствие 2. *Пусть T — линейный непрерывный оператор в $\mathfrak{U}_R$, перестановочный с D, и $\Phi(z) = Tf(z)$, причем среди элементов $\{t_{0,s}\}_{s=0}^{\infty}$ есть отличные от нуля. Тогда в $\mathfrak{U}_R$ системы*

$$\{\Phi^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty} \text{ и } \{f^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$$

одновременно полны или нет.

Справедливость этого утверждения немедленно следует из того очевидного замечания, что линейный непрерывный оператор T, переводящий базис $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ в полную систему в $\mathfrak{U}_R$, переводит всякую полную систему также в полную.

В частности, если функция $f(z) \in \mathfrak{U}_R$ удовлетворяет однородному уравнению $Tf(z) = 0$, где T — линейный непрерывный оператор, перестановочный с D, то система $\{f^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ не полна в пространстве $\mathfrak{U}_R$ [5].

Пример. Пусть $0 \not\equiv g(\lambda)$ — целая функция и $g(0)=0$. Тогда система последовательных производных от функции $g\left(\frac{1}{R-z}\right)$ является полной в пространстве $\mathfrak{U}_R$ $(0<R<\infty)$, что непосредственно вытекает из следствия 2 и полноты системы $\left\{\frac{k!}{(R-z)^{k+1}}\right\}_{k=0}^{\infty}$.

В случае $\alpha_k = 1$ $(k \geqslant 0)$ из теоремы 1 при $n = 1$ получаем

Следствие 3. *Для того чтобы линейный оператор T_1 в пространстве $\mathfrak{U}_R$ был линейным непрерывным оператором, перестановочным с оператором $\Delta_1 f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$T_1 = \sum_{s=0}^{\infty} t_{0,\, s} \Delta_1^s, \tag{5}$$

где

$$|t_{0,\, s}| \leqslant M r_0^s \tag{6}$$

при некотором r_0, $r_0 < R$.

Если $\Psi(z) = T_1 \psi(z)$, где $T_1 \neq \theta$ (θ — оператор аннулирования) имеет вид (5) и удовлетворяет условию (6), то системы $\{\Delta_1^k \Psi(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Delta_1^k \psi(z)\}_{k=0}^{\infty}$ одновременно полны или нет в пространстве $\mathfrak{U}_R$. Отсюда, в частности, следует, что функции $\Psi(z)$ и $\psi(z)$ одновременно рациональны или нет, так как система вида $\{\Delta_1^k \varphi(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $\mathfrak{U}_R$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z)$ отлична от рациональной [6].

Теорема 2. *Формулы*

$$Tf(z) = cf(z) \quad (R < \infty)$$

и

$$Tf(z) = cf(z + b) \quad (R = \infty),$$

где c и b — постоянные, определяют все изоморфизмы T пространства $\mathfrak{U}_R$, перестановочные с оператором D.

Доказательство. Пусть T — линейный оператор, осуществляющий взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства $\mathfrak{U}_R (0 < R \leqslant \infty)$ на себя, перестановочный с оператором D. Тогда T имеет вид (4) и, как мы видели раньше, его характеристическая функция $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t_{0,\, s}}{s!} \lambda^s$ является целой функцией конечной степени. Функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей, ибо в противном случае функция $e^{\lambda_0 t}$, где $\varphi(\lambda_0) = 0$, была бы нетривиальным нулем оператора T, что невозможно. Поэтому, как известно [7], $\varphi(\lambda) = ce^{b\lambda}$, т. е. $t_{0,\, s} = cb^s$ $(s \geqslant 0)$. Теперь, если $R < \infty$, из условия (N') следует, что $b = 0$ и $Tf(z) = cf(z)$. Если же $R = \infty$, то условие (N') выполняется при любом b, т. е. $Tf(z) = cf(z + b)$.

Заметим, что общий вид изоморфизмов пространства $\mathfrak{U}_\infty$, перестановочных с оператором D, другим путем получено в [8].

2. Рассмотрим еще вопрос об эквивалентности в пространстве $\mathfrak{U}_\infty$ операторов $A = D$ и $B = b(z) D$, где $b(z)$ — целая функция, не имеющая нулей. Недавно К. М. Фишман показал, что в случае $b(z) = e^{-z}$ операторы A и B не эквивалентны, т. е. не существует такого изоморфизма T пространства $\mathfrak{U}_\infty$, который бы удовлетворял уравнению $BT = TA$.

Теорема 3. *Операторы A и B эквивалентны в пространстве $\mathfrak{U}_\infty$ тогда и только тогда, когда $0 \neq b(z) = b = \text{const}$. В этих условиях формула*

$$Tf(z) = cf\left(\frac{z}{b} + a\right),$$

где c и a — постоянные, дает общий вид оператора T, осуществляющего эту эквивалентность.

Доказательство. Пусть T — изоморфизм пространства $\mathfrak{U}_\infty$ и $BT=TA$. Тогда из соотношений $BTz^n = TAz^n$ $(n=0, 1, \ldots)$ легко получить, что

$$Tz^n = c_0^{(n)}\left(\int_0^z \frac{dz}{b(z)}\right)^n + c_1^{(n)}\left(\int_0^z \frac{dz}{b(z)}\right)^{n-1} + \ldots + c_n^{(n)} \ (n \geqslant 0), \tag{7}$$

где $c_0^{(n)} \neq 0\,(n \geqslant 0)$. Так как T — изоморфизм пространства $\mathfrak{U}_\infty$, то система (7) является полной. В свою очередь, полнота системы (7) в $\mathfrak{U}_\infty$ эквивалентна, очевидно, полноте системы

$$g_n(z) = \left(\int_0^z \frac{dz}{b(z)}\right)^n \ (n \geqslant 0). \tag{8}$$

Из полноты в $\mathfrak{U}_\infty$ системы (8) уже следует, что $b(z)=b=\mathrm{const}$. Действительно, целая функция $\int_0^z \frac{dz}{b(z)}$ не является трансцендентной, ибо в противном случае в силу усиленной малой теоремы Пикара [7] она принимала бы каждое конечное значение, кроме, быть может, одного в бесконечном множестве точек, а система из степеней такой функции не может быть полной в $\mathfrak{U}_\infty$. Следовательно, $\int_0^z \frac{dz}{b(z)}$ — полином, т. е. $b(z) = \mathrm{const}$.

Значит, операторы A и B могут быть эквивалентными между собой в пространстве $\mathfrak{U}_\infty$ только в том случае, если $B=bD$. Один из изоморфизмов T_1 пространства $\mathfrak{U}_\infty$, для которого $BT_1 = T_1A$, усматривается непосредственно: $T_1 f(z) = f\left(\frac{z}{b}\right)$. Все другие изоморфизмы T, осуществляющие эквивалентность операторов A и B, как легко проверить, получаются из T_1 умножением на некоторый изоморфизм пространства $\mathfrak{U}_\infty$, перестановочный с D, т. е., учитывая теорему 2,

$$Tf(z) = cf\left(\frac{z}{b} + a\right).$$

В заключение приношу свою искреннюю благодарность К. М. Фишману за помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie, I. f. reine und angew. Math., 191, 30—49, (1953).

2. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. ДАН СССР, 127, № 1, 40—43, 1959.

3. А. О. Гельфонд и А. Ф. Леонтьев. Об одном обобщении ряда Фурье. «Матем. сб.», 29 (73) : 3,477—500, 1951.

4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

5. В. П. Громов. О полноте систем производных аналитической функции. «Изв. АН СССР, серия матем.», 25, 540—556, 1961.

6. Ю А. Казьмин. О последовательных остатках ряда Тейлора. «Вестн. МГУ, матем.-мех.», № 5, 35—46, 1963.

7. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

8. I. Delsarte et I. L. Lions. Transmutations dópérateurs differetieles daus le domaine complexe, Comment. Math. Helv., 32, 2, 113—128 (1957).