ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХЕЙМАНА

И. П. Митюк

В работе [1] Хейман доказал следующую теорему.

Теорема. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна в круге $|z| < 1$ и имеет простой полюс с вычетом, равным единице, в начале координат, D_f — область значений функции $w = f(z)$ в $|z| < 1$, а E_f — дополнение D_f до замкнутой плоскости, то трансфинитный диаметр множества E_f удовлетворяет неравенству*

$$d(E_f) \leqslant 1. \tag{1}$$

Равенство в (1) имеет место тогда и только тогда, когда функция $w = f(z)$ однолистна в круге $|z| < 1$.

Пусть G — произвольная область плоскости z, содержащая $z = 0$ (начало координат берется только для определенности), внутренний радиус которой относительно $z = 0$ (см., например, [2, 3], а также [4]) $r(G, 0)$ является конечным.

В настоящей заметке мы докажем следующее обобщение теоремы Хеймана.

Теорема. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна в данной области G, имеет полюс кратности p в начале координат, причем коэффициент при z^{-p} в разложении функции $f(z)$ в окрестности $z = 0$ в ряд Лорана равен a_{-p}, то*

$$d(E_f) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|\, r^p(G, 0)} \exp\left(-\sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z_k, 0)\right), \tag{2}$$

где E_f — дополнение к области значений G_f функции $w = f(z)$ в G до плоскости; $g_G(z, 0)$ — обобщенная функция Грина области G с полюсом в $z = 0$ (см., например, [5]); *z_k, $k = 1, 2, \ldots$ — полюсы функции $f(z)$ в области G, отличные от $z = 0$, p_k — их кратности.*

Если функция Грина области G с полюсом в точке z_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $z_0 = 0$, обращается в нуль на границе ∂G области G (в этом случае функцию Грина будем называть классической, а область G допустимой), а общее число полюсов функции $f(z)$ равно m, то равенство в (2) может достигаться только в случае, если каждая точка $w \in G_f$ является образом точно m точек из G, причем функция $g_{G_f}(w, \infty)$ в этом случае будет классической (т. е. обращается в нуль на ∂G_f).

Доказательство. 1) Пусть область G является допустимой (такой будет любая область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых Жордана). Выберем произвольное натуральное число l (если число полюсов бесконечно) и рассмотрим функцию

$$u(z) = g_{G_f}(w, \infty) - p g_G(z, 0) - \sum_{k=1}^{l} p_k g_G(z, z_k). \tag{3}$$

Функция $u(z)$ будет гармонической в области G за исключением положительных логарифмических полюсов в точках $z_{l+1}, z_{l+2}, \ldots$ (если число полюсов бесконечно). Так как область G — допустимая, то $g_G(z, z_k) \to 0$ при $z \to \partial G$. Следовательно, $u(z) \geqslant 0$, $z \in G$.

В окрестности начала координат имеем:

$$u(z) = g_{G_f}(w, \infty) - \log|w| + \log|w| - p g_G(z, 0) + p\log|z| - p\log|z| - \\ - \sum_{k=1}^{l} p\, g_G(z, z_k) = -\log d(E_f) + \log|a_{-p}| - \sum_{k=1}^{l} p_k g_G(0, z_k) - \\ - p \lim_{z\to 0}[g_G(z, 0) + \log|z|] + o(1).$$

Переходя к пределу при $z \to 0$, получим:

$$-\log d(E_f) + \log|a_{-p}| - \sum_{k=1}^{l} p_k g_G(0, z_k) - p\log r(G, 0) \geqslant 0, \text{ т. е.}$$

$$d(E_f) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|\, r^p(G, 0)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{l} p_k g_G(0, z_k)\right).$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом l, то, переходя к пределу при $l \to \infty$, получим (2).

2) Рассмотрим теперь общий случай. Обозначим через $\{G^{(n)}\}$ последовательность конечносвязных областей $G^{(n)}$, $0 \in G^{(n)}$, ограниченных замкнутыми кривыми Жордана и удовлетворяющих следующим условиям.

1) $\overline{G}^{(j)} \subset G^{(j+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \ldots;$

2) $\sum_{j=1}^{\infty} G^{(j)} = G.$

В дальнейшем такую последовательность областей будем называть, как обычно, аппроксимирующей.

Выберем произвольное натуральное число m. Всегда можно подобрать n так, чтобы точки z_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ лежали в области $G^{(n)}$. Применяя к области $G^{(n)}$ неравенство (2), получим

$$d(E_f^{(n)}) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|\, r^p(G^{(n)}, 0)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} g_{G^{(n)}}(z_k, 0)\right),$$

где $E_f^{(n)}$ — дополнение до замкнутой плоскости образа $G_f^{(n)}$ области $G^{(n)}$ при отображении $w = f(z)$, а $E^{(n)}$ — дополнение области $G^{(n)}$.

Так как $E_f \subset E_f^{(n)}$, то тем более

$$d(E_f) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|\, r^p(G^{(n)}, 0)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} g_{G^{(n)}}(z_k, 0)\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$d(E_f) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|\, r^p(G, 0)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} g_G(z_k, 0)\right).$$

В силу произвольности m отсюда следует (2).

Предположим теперь, что область G — допустимая, а общее число полюсов функции $f(z)$ в области G равно m. Равенство в (2) возможно только, если $u(z) \equiv 0$. В этом случае, как следует из равенства (3), функция Грина $g_{G_f}(w, \infty)$ будет стремиться к нулю при $z \to \partial G$.

Это означает, что функция $w = f(z)$ осуществляет полное накрытие области G_f областью G [5], а следовательно, принимает каждое значение из области G_f одно и то же число, а именно, m раз (так как значение $w = \infty$ принимается согласно условию m раз в G).

В частном случае, когда область G совпадает с кругом $|z| < 1$, неравенство (2) примет вид

$$d(E_f) \leqslant \frac{1}{|a_{-p}|} \prod_{k \geqslant 1} |z_k|^{p_k}$$

и является обобщением (1).

Теорема позволяет распространить на случай многосвязных областей ряд результатов Хеймана, установленных в работе [1]. Ряд результатов, относящихся к указанному циклу вопросов, можно получить также с помощью принципа симметризации для многосвязных областей [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Hayman. Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions, Journal d'analyse math., 1, 155—179 (1951).

2. В. К. Хейман. Многолистные функции. Изд-во иностр. лит., М., 1960.

3. Г. Полиа и Г. Сеге. Изопериметрические неравенства в математической физике. Изд-во иностр. лит., М. 1963.

4. И. П. Митюк. Внутренний радиус области и некоторые его свойства. «Украинский матем. журнал», № 1, 118—123, (1965).

5. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного, т. II. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

6. И. П. Митюк. Принцип симметризации для многосвязных областей. ДАН СССР, 157, № 2, 268—270, 1964.