ИЗОМОРФНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НАД КОМПАКТАМИ КОНТИНУАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

А. А. Милютин

В настоящей работе излагается в несколько измененном виде содержание первой части нашей диссертации (1952 г.), посвященной исследованию пространств непрерывных функций над компактами. Пользуюсь случаем выразить глубокую признательность В. И. Гурарию, написавшему введение к работе, составившему схему доказательства основной теоремы и сделавшему ряд изменений в первоначальном тексте работы.

Введение

Банаховы пространства E_1 и E_2 называются изоморфными, если существует линейное отображение A E_1 на E_2 такое, что $\|A\| < \infty$, $\|A^{-1}\| < \infty$ (в этом случае мы будем писать $E_1 \sim E_2$). Обозначим через $E(T)$ (E — банахово пространство, T — метрический компакт) пространство всех непрерывных отображений F компакта T в E с нормой $\|F\| = \max_{x \in T} \|F(x)\|$ (легко видеть, что $E(T)$ — банахово пространство); если E есть вещественная ось, то будем $E(T)$ обозначать через $C(T)$.

Главный результат настоящей работы, полученный еще в 1952 г., составляет

Основная теорема. *Если K_1 и K_2 — метрические компакты континуальной мощности, E — банахово пространство, то $E(K_1)$ изоморфно $E(K_2)$.*

Этот результат не был опубликован автором. Между тем из работ, относящихся к близким вопросам и появившихся после 1952 г., не следует даже частный случай основной теоремы, когда K_1 и K_2 — есть конечномерные кубы разных размерностей. Кроме того, нужно отметить, что в последние годы появился ряд работ, посвященных изоморфной классификации пространств непрерывных функций над топологическими бикомпактами, и настоящая работа прямо относится к этому кругу вопросов.

В целях простоты здесь будет проведено доказательство основной теоремы для случая пространств вида $C(T)$. Доказательство в общем случае не требует существенных изменений.

Предлагаемая схема поможет читателю быстрее выделить основные идеи и провести проверку тех или иных деталей доказательства. Нижняя горизонтальная черта в прямоугольнике означает, что записанное в нем утверждение сводится к совокупности утверждений подчиненных ему прямоугольников. Верхняя горизонтальная черта означает справедливость соответствующего утверждения. Проверка правильности основного утверждения может состоять, например, в том, что на отдельно заготовленном экземпляре схемы в незаполненных прямоугольниках проставляются (когда это законно) сначала нижние, затем верхние черты до тех пор, пока не будет стоять верхняя черта в прямоугольнике основного утверждения.

Изменения, сделанные в настоящей работе по сравнению с текстом диссертации, в основном связаны с заменой некоторых доказательств ссылками (преимущественно на работы, появившиеся после 1952 г.).

§ 1. Условимся пользоваться следующей терминологией и обозначениями.

I. а) K, K_1, K_2 — метрические компакты континуальной мощности.

б) S, σ, t — компакты, гомеоморфные канторову множеству на отрезке $[0,1]$.

в) I — отрезок $[0,1]$.

г) G — гильбертов кирпич.

II. Прямым дополнением (дополнением) к подпространству P в банаховом пространстве E будем называть такое подпространство Q в E, что $P \dot{+} Q = E$.

III. Будем говорить, что E_1 *дополняемо вкладывается в* E_2 (E_1, E_2 — банаховы пространства), если в E_2 существует подпространство $\widetilde{E}_1$, изоморфное E_1 и имеющее в E_2 прямое дополнение.

IV. Пусть P — подпространство в банаховом пространстве E. Линейный оператор A, определенный на E, называется проекцией из E на P, если выполнены условия:

1. $Ax \in P$ при $x \in E$;
2. $Ax = x$ при $x \in P$.

V. Пусть E_1, E_2, ... — банаховы пространства. Через $(E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots)_{c_0}$ обозначается пространство последовательностей $\{e_i\}_1^\infty$, $e_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots$ таких, что $\lim\limits_{i\to\infty} \| e_i \| = 0$ с нормой $\| \{e_i\}_1^\infty \| = \max\limits_i \| e_i \|$ [2].

VI. Пусть T_1 — подкомпакт метрического компакта T_2, X — линейное многообразие в $C(T_1)$. Будем говорить, что X продолжаемо в $C(T_2)$, если существует линейный оператор A из X в $C(T_2)$ такой, что для любой $f(x) \in C(T_1)$ $Af(x) = F(x) \in C(T_2)$ совпадает с $f(x)$ при $x \in T_1$ и

$$\max_{x \in T_2} |F(x)| = \max_{x \in T_1} |f(x)|.$$

Множество $AX \subseteq C(T_2)$ будем называть продолжением X в $C(T_2)$.

Лемма 1. *$C(S)$ изоморфно $(C(S) \oplus C(S) \oplus \ldots)_{c_0}$.*

Доказательство. Пространство $(C(S) \oplus C(S) \oplus \ldots)_{c_0}$ изоморфно пространству $C(S_1)$, где S_1 есть сумма счетного числа попарно непересекающихся канторовских множеств, стягивающихся к точке x, лежащей вне каждого из них*. Но так как, очевидно, S_1 гомеоморфно S, то $C(S_1)$ изометрично $C(S)$, откуда и вытекает справедливость леммы 1.

Лемма 2. *$C(K)$ дополняемо вкладывается в $C(G)$.*

Доказательство. На основании теоремы Урысона можно, не нарушая общности, считать, что K есть подмножество в G. На основании теоремы Борсука [5] существует продолжение $P \subset C(G)$ подпространства $C(K)$ в $C(G)$ (для случая пространств вида $E(K)$, где E — банахово или даже локально-выпуклое пространство, можно воспользоваться обобщением теоремы Борсука, данным, например, в [6]). Очевидно, множество всех тех функций из $C(G)$, которые обращаются в нуль на K, есть прямое

---

* Ибо $(C(S) \oplus C(S) \oplus \ldots)\, c_0$ изометрично подпространству Q в $C(S_1)$, состоящему из всех функций $f \in C(S_1)$, аннулируемых элементом x, а Q, как известно, изоморфно $C(S_1)$ [5].

дополнение к P в $C(G)$ и так как P изометрично $C(K)$, то лемма 2 доказана.

Лемма 3. K содержит подмножество, гомеоморфное S.

Доказательство. Известно, что любой компакт континуальной мощности можно непрерывно отобразить на отрезок $I=[0, 1]$. Обозначим это отображение через F. В K есть такой подкомпакт K', что его образ есть I, но никакой его подкомпакт уже не дает в образе весь I (как легко видеть, в качестве K' можно взять пересечение K и всех подкомпактов в K, которые при отображении F дают в образе весь I). Итак, $I=F(K')$.

Пусть δ — произвольное положительное число. Множество тех точек K', которые входят в прообразы диаметра, большего чем δ на K', нигде не плотно на K'. Действительно, множество таких точек замкнуто. Следовательно, если это множество не является нигде не плотным на K', то у него найдутся внутренние точки на K'. Возьмем какую-либо внутреннюю точку этого множества и опишем вокруг нее окрестность такую, что она состоит вся из внутренних точек этого множества и имеет радиус относительно внутренней точки, меньший, чем $\frac{\delta}{4}$. Если мы теперь удалим эту окрестность из K', то в K', очевидно, будет найден подкомпакт, образ которого есть I, что противоречит выбору K'.

Итак, множество тех точек на K', которые входят в прообраз какой-нибудь точки $x \in I$ и имеют диаметр, на меньший, чем δ, нигде не плотно на K'. Но отсюда следует, что множество точек не взаимной однозначности на K' (т. е. точек $q \in K'$ таких, что $F^{-1}(F(q))$ состоит более чем из одной точки) является множеством первой категории. Следовательно, множество точек взаимной однозначности на K' — множество второй категории. Но тогда в нем есть подмножество, гомеоморфное канторовскому множеству. Лемма доказана.

§ 2.

В этом параграфе приводится доказательство утверждения 1.1.4.1.1. (см. схему).

Рассмотрим обыкновенное канторовское множество σ (мы мыслим это множество лежащим на отрезке) и некоторый отрезок I. Отобразим σ на I путем склеивания концов смежных интервалов. Отображение это обозначим через f. Таким образом, $I=f(\sigma)$. Возьмем теперь счетное число экземпляров σ и счетное число экземпляров I. Каждый экземпляр отличается от другого лишь индексом. Обозначим систему экземпляров σ через $\{\sigma_\alpha\}$, а систему I — через $\{I_\alpha\}$.

Рассмотрим теперь тихоновские произведения $\prod\limits_\alpha \sigma_\alpha$ и $\prod\limits_\alpha I_\alpha$. Первое произведение дает множество, гомеоморфное канторовскому множеству. Второе произведение дает гильбертов кирпич. Обозначим $\prod\limits_\alpha \sigma_\alpha$ через T, а $\prod\limits_\alpha I_\alpha$ через G.

Исходя из отображения f, связывающего σ и I, построим отображение φ, которое будет отображать T на G. Именно пусть $\{P_\alpha\}$ — точка T $(P_\alpha \in \sigma_\alpha)$. Тогда $f(P_\alpha)$ есть точка I_α, а $\{f(P_\alpha)\}$ есть точка G. Тогда $\varphi(\{P_\alpha\}) = \{f(P_\alpha)\}$. Легко показать, что отображение φ непрерывно и $\varphi(T)=G$. Это сразу следует из непрерывности f и из того факта, что $f(\sigma_\alpha)=I_\alpha$.

В дальнейшем мы будем изучать это отображение φ и еще те, которые из него возникают, если еще допустить гомеоморфные преобразования G на себя.

СХЕМ.

1.1.1.
Если каждое из банаховых пространств X и E дополняемо вкладывается в другое и $E \backsim (E \oplus E \oplus \ldots)_{c_0}$, то $X \backsim E$.
В. стр. 151 Д. фактически дано в [3], (см. также [4]).

1.1.2.
$C(S) \backsim (C(S) \oplus C(S) \oplus \ldots)_{c_0}$
Д. стр. 151

1.1.3.1.
K содержит подмножество, гомеоморфное S.
Д. стр. 152

1.1.3.2.
Если T_1 есть подкомпакт в T_2, то $C(T_1)$ продолжаемо в $C(T_2)$
В. стр. 151 Д. [5].

1.1.4.1.1.
Существует отображение Φ S на G и семейство
где q пробегает G, такие что
1. При каждом $q \in G$ μ_q сосредоточено
$\mu_q(\Phi^{-1}(q)) = 1$
2. μ_q непрерывна на S.
3. Для любой $F(x) \in C(S)$ $\int\limits_S F(x)\, d\mu_q$ ест
функция от q.

1.1.4.1.1.1.
Существует непрерывное отображение f канторова множества σ на отрезок $I = [0,1]$. Индуцированное им отображение φ компакта $T = \sigma \times \sigma \times \ldots$ на гильбертов кирпич $G = I \times I \times \ldots$ непрерывно. T гомеоморфно канторову множеству.
В. стр. 151—152 Д. стр. 152

Пусть t — канторово м
γ_τ гомеоморфизмов I
им семейство Γ_τ гомео
отображение Φ компа
$P \in T$, $\tau \in t$: $\Phi(P') =$

Условные обозначения: В. — вспомогательные сведения (обозначения, опреде
Д. — доказательства (или доказательства сводимости
Номера ссылок соответствуют списку литературы к этой работе. При ссылке на насто

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

I
$C(K_1)$ изоморфно $C(K_2)$
В. стр. 150

$C(K)$ изом...
В. стр. ...

$\oplus \ldots)_{c_0}$

1.1.3.
$C(S)$ дополняемо вкладывается в $C(K)$
В. стр. 151

1.1.3.3.
Если T_1 — подкомпакт в T_2, R — продолжение $C(T_1)$ в $C(T_2)$, то R дополняемо в $C(T_2)$. Дополнением к R в $C(T_2)$ может служить множество всех функций из $C(T_2)$, обращающихся в нуль на T_1.
Д. очевидно.

1.1.4.…
$C(G)$ дополня… дывается …
В. стр. …

G и семейство мер μ_q на S, …, такие что …средоточено на $\Phi^{-1}(q)$ и … $F(x)\,d\mu_q$ есть непрерывная …;

Определим отображение … дой $F(x) \in C(S)$ $(x \in S$ …
Если каждой $\xi(q) \in C($… $\xi(\Phi(x)) \in C(S)$, то мы … рое подпространство $\widetilde{C}$ … из $C(S)$ на $\widetilde{C}$ (причем с … этой проекции е…
В. стр. …

1.1.4.1.1.2.
… — канторово множество на [0,1]. Существует правильное семейство …морфизмов t на себя, зависящее от параметра $\tau \in t$. Порождаемое …йство Γ_τ гомеоморфизмов G на себя таково, что определяемое им …ение Φ компакта $S = t \times T$ на G по формуле: для $P' \in S$, $P' = (P, \tau)$, … $\in t$: $\Phi(P') = \Gamma_\tau[\varphi(P)]$, непрерывно. S гомеоморфно канторову множеству.
В. стр. 153 Д. стр. 153

Пусть μ — мера на t. …цией), $\Phi^{-1}(q)$ — полн… (определенном в 1.1.… подмножестве в Φ^{-1}… дого непересекающ… мер μ_q таково, что …

…чения, определения, разъяснения и т. п.).
…за сводимости к подутверждениям).
…ылке на настоящую работу номер опускается.

ы

)

1.1.
$C(K)$ изоморфно $C(S)$
В. стр. 151

вклады-
(K)
51

1.1.4.
$C(K)$ дополняемо вкладывается в $C(S)$.

ложение
Допол-
во всех
на T_1.

1.1.4.1.
$C(G)$ дополняемо вкладывается в $C(S)$.
В. стр. 151

1.1.4.2.
$C(K)$ дополняемо вкладывается в $C(G)$.
Д. стр. 151

1.1.4.1.2.
Определим отображение A $C(S)$ на $C(G)$, сопоставляя с каждой $F(x) \in C(S)$ $(x \in S)$ функцию $\xi(q) = \int\limits_S F(x)\, d\mu_q$ $(q \in G)$.
Если каждой $\xi(q) \in C(G)$ поставить в соответствие функцию $\xi(\Phi(x)) \in C(S)$, то мы получим изометрию J $C(G)$ на некоторое подпространство $\tilde{C}$ в пространстве $C(S)$. AJ — проекция из $C(S)$ на $\tilde{C}$ (причем с нормой, равной единице). Аннулятор этой проекции есть дополнение к $\tilde{C}$ в $C(S)$.
В. стр. 151 Д. очевидно.

мейство
ждаемое
емое им
$= (P, \tau)$,
ву мно-

1.1.4.1.1.3.
Пусть μ — мера на t, $\mu(t) = 1$ (порождаемая, например, канторовой функцией), $\Phi^{-1}(q)$ — полный прообраз элемента $q \in G$ в S при отображении Φ (определенном в 1.1.4.1.1.2). Введем меру μ_q на S, определяя ее на каждом подмножестве в $\Phi^{-1}(q)$ как меру его проекции на t и полагая меру каждого непересекающегося с $\Phi^{-1}(q)$ подмножества равной нулю. Семейство мер μ_q таково, что для любой $F(x) \in C(S)$ $\int\limits_S F(x)\, d\mu_q$ есть непрерывная функция от $q \in G$.
В. стр. 154 Д. стр. 154—155

Посмотрим прежде всего, каково множество точек на G, чьи прообразы (по отображению φ) состоят более чем из одной точки. Для этого вернемся к отображению f и выясним этот вопрос относительно I. На I множество точек, чьи прообразы состоят более чем из одной точки, есть, очевидно, счетное всюду плотное множество, лежащее целиком внутри I. Обозначим это множество через M. Теперь ясно, что на G те и только те точки являются точками нарушения взаимной однозначности, у которых хотя бы одна координата принадлежит M.

Сделаем теперь замечание о гомеоморфных преобразованиях G на себя. Пусть Γ_α — гомеоморфизм I_α на себя. Тогда система гомеоморфизмов $\{\Gamma_\alpha\}$ (совершенно произвольная) порождает гомеоморфизм G на себя следующим способом. Точка с координатами $\{q_\alpha\}$ ($q_\alpha \in I_\alpha$) переходит в точку с координатами $\{\Gamma_\alpha(q_\alpha)\}$. Прежде всего, очевидно, что это отображение взаимно однозначно преобразует G на себя. Кроме того, точки, первые n координат которых достаточно близки, переходят в точки с близкими первыми n координатами. Следовательно, это отображение и непрерывно. Отсюда очевидно, что оно является гомеоморфным преобразованием G на себя.

Введем в рассмотрение еще одно канторовское множество t, которое будем мыслить как обычное канторовское множество на отрезке $[0, 1]$. Через τ будем обозначать точку этого множества. Каждой точке τ множества t поставим в соответствие гомеоморфное преобразование I на себя: γ_τ такое, что выполнены следующие условия:

1) при любом γ_τ концы I — неподвижны;

2) $\gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_2}$, если τ_1 и τ_2 — концы одного и того же смежного интервала;

3) γ_0 — единичное преобразование I;

4) γ_τ — непрерывно зависит от τ в смысле максимума отклонения;

5) если $x \in I$, то $\gamma_\tau x$ есть строго монотонная функция τ, исключая концы одного и того же смежного интервала, где $\gamma_\tau x$ принимает в силу 2) одно и то же значение. Это семейство гомеоморфизмов будем называть правильным (существование его не может вызвать никаких сомнений).

Исходя из γ_τ, построим Γ_τ-гомеоморфизм G ($G = \prod\limits_\alpha I_\alpha$) на себя. Именно: если $q \in G$ и координаты $q = \{q_\alpha\}$, то $\Gamma_\tau(q)$ имеет координаты $\{\gamma_\tau(q_\alpha)\}$. В силу сделанного замечания Γ_τ — действительно гомеоморфизм G на себя. Отметим еще одно, почти очевидное свойство $\Gamma_\tau(q)$. Именно $\Gamma_\tau(q)$ есть непрерывная функция τ и q, т. е., если $\tau_n \to \tau_0$, а $q_n \to q_0$, то $\Gamma_{\tau_n}(q_n) \to \Gamma_{\tau_0}(q_0)$. Покажем это: пусть координаты $q_n = \{q_{n\alpha}\}$, координаты $q_0 = \{q_{0\alpha}\}$. Тогда координаты $\Gamma_{\tau_n}(q_n)$ есть по определению $\{\gamma_{\tau_n}(q_{n\alpha})\}$, а координаты $\Gamma_{\tau_0}(q_0) = \{\gamma_{\tau_0}(q_{0\alpha})\}$. Так как $q_{n\alpha} \to q_{0\alpha}$, а $\tau_n \to \tau_0$, то в силу свойств γ_τ имеем $\gamma_{\tau_n}(q_{n\alpha}) \to \gamma_{\tau_0}(q_{0\alpha})$ для каждого α. Но это и означает в силу тихоновской топологии, что $\Gamma_{\tau_n}(q_n) \to \Gamma_{\tau_0}(q_0)$.

Возьмем теперь произведение $T \times t = S$ (напомним, что $T = \prod\limits_\alpha \sigma_\alpha$). Очевидно, что S есть компакт, гомеоморфный канторовскому множеству. Построим теперь отображение S на G и будем обозначать его Φ. Отображение Φ задается следующим образом. Пусть P' есть точка S. Пусть координаты P' есть (P, τ), где $P \in T$, а $\tau \in t$. Тогда $\Phi(P') = \Gamma_\tau[\varphi(P)]$. Очевидно, что S отображается таким образом на все G. Покажем, что это отображение непрерывно. Действительно, пусть $P'_n \to P'_0$, $P'_n \in S$, $P'_0 \in S$. Пусть координаты P_n есть (P_n, τ_n), а $P'_0 = (P_0, \tau_0)$. Тогда $P_n \to P_0$ и $\tau_n \to \tau_0$, следовательно, $\varphi(P_n) \to \varphi(P_0)$, но тогда $\Gamma_{\tau_n}[\varphi(P_n)] \to \Gamma_{\tau_0}[\varphi(P_0)]$, в силу только что установленного свойства непрерывности $\Gamma_\tau(q)$. Но это означает, что $\Phi(P'_n) \to \Phi(P'_0)$, т. е., что $\Phi(P')$ есть непрерывное отображение.

Исследуем более внимательно отображение Φ. Прежде всего покажем, что при любом $\tau_0 \in t$ множество точек $P' \in S$, у которых координата по t есть τ_0, отображается на все G. Действительно, если $P' = (P, \tau_0)$, то $\Phi(P') = \Gamma_{\tau_0}[\varphi(P)]$. Но P пробегает все точки T. Следовательно, $\varphi(P)$ пробегает все точки G, а отсюда уже ясно, что $\Gamma_{\tau_0}[\varphi(P)]$ пробегает все точки G. Следовательно, для любой точки $q \in G$ и любого $\tau \in t$ множество точек $P' \in S$, таких что $P' = (P, \tau)$ и $\Phi(P') = q$, не пусто.

Обозначим это множество через $\Phi^{-1}(q, \tau)$. Докажем сейчас следующее важное утверждение. Пусть $q \in G$. Тогда для почти всех τ, исключая, быть может, счетное число их, $\Phi^{-1}(q, \tau)$ состоит из одной точки.

Докажем это. Пусть $q = \{q_\alpha\}$ и $\tau = \tau_0$. Выясним, когда множество $\Phi^{-1}\{q, \tau_0)$ состоит более чем из одной точки. Рассмотрим те точки $P' \in S$, координаты которых по t есть τ_0. Это множество гомеоморфно T. Оно отображается на G следующим образом. Если $P' = (P, \tau_0)$, то на P действует сначала φ, а на $\varphi(P)$ действует Γ_{τ_0}. Следовательно, если $q = \{q_\alpha\}$, а $P = \{P_\alpha\}$, то $q_\alpha = \gamma_{\tau_0}[\varphi(P_\alpha)]$. Отсюда видно, что $\Phi^{-1}(q, \tau_0)$ состоит более чем из одной точки тогда и только тогда, когда хотя бы одно $q_\alpha \in \gamma_{\tau_0}(M)$. (Определение M см. на стр. 153). Фиксируем теперь α_0 и будем следить за тем, при каких τ $q_{\alpha_0} \in \gamma_\tau(M)$. В силу свойства 5) γ_τ ясно, что множество тех значений τ, при которых $q_{\alpha_0} \in \gamma_\tau(M)$ не более чем счетно. Так как множество $\{\alpha\}$ есть счетное множество, то множество тех τ, при которых хотя бы одно q_α входит в $\gamma_\tau(M)$ не более, чем счетно. Тем самым утверждение доказано.

Введем на t меру μ Лебега, или любую положительно определенную непрерывную меру, где $\mu(t) = 1$ (это может быть, например, мера, порожденная канторовской функцией). Иных свойств μ, кроме перечисленных, нам не понадобится.

Пусть теперь $q \in G$. Рассмотрим $\Phi^{-1}(q)$, т. е. полный прообраз q в S. Исходя из меры μ на t, мы построим меру μ_q на S следующим способом:

1) μ_q сосредоточена на $\Phi^{-1}(q)$, т. е. вне $\Phi^{-1}(q)$ μ_q есть тождественный нуль.

2) Пусть N есть подмножество $\Phi^{-1}(q)$. Через $\tau(N)$ обозначим совокупность всех τ, являющихся координатой по t хотя бы одной точки из N. Положим $\mu_q(N) = \mu[\tau(N)]$.

Таким образом, мера μ_q определяется на всем S. Легко доказать, что при таком определении μ_q действительно есть мера. В самом деле, как уже было замечено выше, для любого τ в $\Phi^{-1}(q)$ найдется точка P', координата которой по t есть τ. Кроме того, было доказано, что для всех τ, исключая, быть может, счетное число, такая точка единственна. Пусть точка $P' \in \Phi^{-1}(q)$. Определим отображение ψ $\Phi^{-1}(q)$ на t следующим образом: если $P' = (P, \tau)$ $(P \in T, \tau \in t)$, то $\psi(P') = \tau$. Очевидно, что ψ непрерывно отображает замкнутое множество $\Phi^{-1}(q)$ на t, причем почти все точки t, исключая, быть может, счетное множество, есть точки взаимной однозначности.

Рассмотрим непрерывное разбиение $\Phi^{-1}(q)$ на полные прообразы точек из t в силу отображения ψ. Все эти прообразы, исключая, быть может, счетное число, будут состоять из одной точки. Обозначим множество прообразов, состоящих лишь из одной точки через Σ, а дополнение к нему в $\Phi^{-1}(q)$ через Σ'. Так как множество Σ отображено в t взаимно однозначно, то любая мера на t дает на нем тоже меру, в силу того что соответствие непрерывно и класс борелевских множеств на Σ отображается взаимно однозначно на класс борелевских множеств на $\psi(\Sigma)$. Следовательно, для тех N, которые входят в Σ, наше определение действительно дает меру. Если $N \subseteq \Sigma'$, то, согласно нашему определению, $\mu_q(N) = 0$, ибо $\tau(N)$ не более чем счетно. Если же $N = N_1 + N_2$, где $N_1 \subseteq \Sigma$, $N_2 \subseteq \Sigma'$, то $\tau(N_1)\bigcap\tau(N_2)=0$ и $\tau(N)=\tau(N_1)+\tau(N_2)$, следовательно, согласно нашему определению, $\mu_q(N)=\mu_q(N_1)+\mu_q(N_2)$. Таким образом, на $\Phi^{-1}(q)$ мы имеем два непересекающихся (B) — множества Σ и Σ', в сумме дающих все $\Phi^{-1}(q)$, таких что на каждом задана мера. Для множеств N, не содержащихся целиком в Σ и Σ', мы доопределяем меру по закону

$$\mu_q(N)=\mu_q(N\bigcup\Sigma)+\mu_q(N\bigcap\Sigma').$$

Ясно, что мы получим меру, заданную на $\Phi^{-1}(q)$. Полагая на дополнении к $\Phi^{-1}(q)$ в S меру, равной тождественно нулю, мы, очевидно, опять-таки получаем меру.

Итак, μ_q есть мера на S, сосредоточенная на $\Phi^{-1}(q)$. Относительно μ_q докажем следующее предложение.

Пусть $F(P')$ $(P'\in S)$ — произвольная непрерывная функция на S. Тогда $\int\limits_S F(P')\,d\mu_q=F_1(q)$ есть непрерывная функция $q\,(q\in G)$. Действительно, пусть $q_n\to q_0$; покажем, что $F_1(q_n)\to F_1(q_0)$.

Прежде всего очевидны следующие формулы:

$$\int\limits_S F(P')\,d\mu_q=\int\limits_{\Phi^{-1}(q)}F(P')\,d\mu_q=\int\limits_{\mathscr{E}_{q,\tau}}F(P'=\{p,\tau\})\,d\mu,\quad P'\in\Phi^{-1}(q),$$

где $\mathscr{E}_{q,\tau}$ — множество тех τ, при которых $\Phi^{-1}(q,\tau)$ состоит из одной точки. Пусть $\mathscr{E}_\tau=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{E}_{q_n\tau}$. Тогда очевидно, что

$$\int\limits_S F(P')\,d\mu_{q_n}=\int\limits_{\mathscr{E}_\tau}F(P'=\{P,\tau\})\,d\mu,\quad n=0,\ 1,\ \ldots\quad P'\in\Phi^{-1}(q_n).$$

Обозначим $F(P'=\{P,\tau\})$ $(P'\in\Phi^{-1}(q_n))$ через $F^{(n)}(\tau)$.

В силу непрерывности $F(P')$ очевидно, что $F^{(n)}(\tau)$ равномерно ограничены и $\lim\limits_{n\to\infty}F^{(n)}(\tau)=F^{(0)}(\tau)$ для любого $\tau\in\mathscr{E}_\tau$. Но тогда последовательность $F^{(n)}(\tau)$ можно интегрировать на $\mathscr{E}_\tau$ по μ, и мы получаем

$$\lim\int\limits_{\mathscr{E}_\tau}F^{(n)}(\tau)\,d\mu=\int\limits_{\mathscr{E}_\tau}F^{(0)}(\tau)\,d\mu.$$

Но

$$\int\limits_{\mathscr{E}_\tau}F^{(n)}(\tau)\,d\mu=F_1(q_n),$$

а $\int\limits_{\mathscr{E}_\tau}F^{(0)}(\tau)\,d\mu=F_1(q_0)$. Таким образом, мы показали, что $F_1(q_n)\to F_1(q_0)$. Тем самым доказано, что $F_1(q)$ есть непрерывная функция q.

Итак, утверждение 1.1.4.1.1. доказано.

Пользуясь схемой, можно теперь убедиться в справедливости основной теоремы.

В заключение отметим, что Ч. Бессага и А. Пелчинский дали полную изоморфную классификацию пространств непрерывных функций на счетных компактах [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Милютин. О пространствах непрерывных функций. Канд. дисс., Изд-во МГУ, 1952.

2. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Вид-во «Радянська школа», Київ, 1948.

3. A. Pełczyński. Projections in certain Banach spaces, Studia Math., 19, 209—228, 1960.

4. В. И. Гурарий. Геометрические свойства некоторых пространств последовательностей и решение одной задачи Банаха (см. данный сборник).

5. K. Borsuk. Uber Isomorphie der Funktionalräume, Bull. Int. Acad. Pol. Sci, 1933, pp 1—10.
6. J. Dugundji. An extension of Tietzés theorem, Pacific Math. J., 1, 1951, pp. 353—367.
7. C. Bessaga and A. Pełczynski. Spaces of continuous functions (IV), Studia Math, XIX, 53—62 (1960).