О РАСПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ ПО ЗНАКОПЕРЕМЕННОМУ ВЕСУ

М. Г. Крейн

1. Пусть $c_0\,(=\bar{c}_0)$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Полагая $c_{-k}=\bar{c}_k\,(k=1,2,\ldots n)$, образуем многочлены

$$\Delta_k(z)=\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-k} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \ldots & c_{-1} \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^k \end{vmatrix} = D_{k-1}z^k+\ldots= \tag{1}$$

$$=\begin{vmatrix} c_0 & z-c_{-1}, & c_{-1}z-c_{-2} & \ldots & c_{-k+1}z-c_{-k} \\ c_1 & z-c_0 & c_0\ \ z-c_{-1} & \ldots & c_{-k+2}z-c_{-k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k-1}z-c_{k-2} & c_{k-2}z-c_{k-3} & \ldots & c_0 & z-c_{-1} \end{vmatrix}\quad (k=1,2,\ldots,n),$$

где

$$D_k=|\,c_{i-j}\,|_0^k\quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Кроме того, положим $\Delta_0(z)=D_0=c_0$.

Пусть $p(\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ какая-либо вещественная функция, для которой

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}p(\theta)\,d(\theta)\quad (k=0,\pm 1,\ldots,\pm n). \tag{3}$$

Легко видеть, что многочлен $\Delta_k(z)$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta_k(e^{i\theta})\,e^{-ji\theta}p(\theta)\,d\theta=0\quad (j=0,1,\ldots,k-1) \tag{4}$$

и при $D_{k-1}\neq 0$ он будет определяться этими условиями с точностью до скалярного множителя.

Из (1) — (4) без труда выводится, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta_k(e^{i\theta})\overline{\Delta_j(e^{i\theta})}\,p\theta\,d\theta=\begin{cases}0 & \text{при } j\neq k\\ D_kD_{k-1} & \text{при } j=k\end{cases}\quad (j,k=0,1,\ldots,n)$$

Оказывается, имеет место

Теорема 1. *Пусть все $D_k\neq 0$ $(k=0,1,\ldots,n)$ и пусть p — число постоянств знака, а q — число перемен знака в ряду*

$$1,\ D_0,\ D_1,\ \ldots,\ D_{n-1}. \tag{5}$$

Тогда при $D_nD_{n-1}>0\ (<0)$ многочлен $\Delta_n(z)$ имеет внутри единичной окружности точно $p\,(q)$ корней, а вне ее точно $q\,(p)$ корней.

Для случая, когда все $D_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots, n$), эта теорема хорошо известна (см. например, [1, ч. II, Отд. VII, задача № 72]). В этом и только этом случае вес $p(\theta)$, удовлетворяющий условиям (3), может быть выбран строго положительным.

Для случая, когда $D_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$), а $D_n \gtrless 0$, теорема была доказана в статье автора [2].

В общем случае, как будет здесь показано, теорема 1 получается путем сочетания основной идеи статьи [2] со следующим результатом автора [3] (см. также [4, часть I]).

A) Пусть H_n n-мерное комплексное пространство с индефинитным невырождающимся эрмитовым скалярным произведением $[\xi, \eta]$ ($\xi, \eta \in H_n$), а T — линейный оператор в H_n, обладающий тем свойством, что

$$[T\xi, T\xi] \geqslant [\xi, \xi] \text{ при } [\xi, \xi] \geqslant 0.$$

Тогда, если p — точное число положительных квадратов формы $[\xi, \xi]$, то у оператора T имеется p-мерное неотрицательное инвариантное подпространство L, в котором все собственные числа оператора T по модулю не меньше единицы.

Теорема 1 была установлена автором около 10 лет тому назад. Автор счел целесообразным ее опубликовать в связи с тем, что в настоящее время возник интерес к теории ортогональных многочленов на окружности по индефинитному весу (см., в частности, изящные работы Г. Бакстера [5]).

В статье устанавливаются также некоторые другие предложения, обобщающие и дополняющие теорему 1.

Следуя пути, указанному в работах автора [6] и [7], можно построить однопараметрическое семейство целых функций $\Delta(\lambda; r)$ ($0 \leqslant r \leqslant a$), являющихся континуальными аналогами многочленов $\Delta_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots,$; $z = \exp(i\lambda)$). При таком построении роль последовательности c_k ($k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$) играет обобщенная функция $C(t) = \delta(t) + H(t)$ $(-a \leqslant t \leqslant a)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, а эрмитова функция $H(t) = \overline{H(-t)} \in L_1(-a, a)$. Теорема 1 и другие предложения, устанавливаемые в этой статье, имеют свои аналоги в теории функций $\Delta(\lambda; r)$, выяснению чего автор надеется посвятить отдельную статью.

2. Основное тождество. Пусть $C_{p+1} = \| c_{jk} \|_0^{p+1}$ — некоторая эрмитова матрица порядка $p+2$. Положим

$$C_p = \| c_{jk} \|_0^p, \quad C_p' = \| c_{j+1,\, k+1} \|_0^p, \quad B_p = \| c_{j,\, k+1} \|_0^p \tag{6}$$

и

$$T = C_p^{-1} B_p, \tag{7}$$

при этом мы, естественно, предполагаем, что $D_p = \det C_p \neq 0$.

В статье [2] было показано, что

$$T^* C_p T = C_p' - \frac{D_{p+1}}{D_p} J_p, \tag{8}$$

где $D_k = \det C_k$ ($k = p, p+1$), а J_p — матрица p-го порядка, у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента, стоящего в правом нижнем углу, который равен единице.

Для полноты приведем простое доказательство тождества (8).

Согласно (6) и (7) имеем

$$T^* C_p T = B_p^* C_p^{-1} B_p = \| \gamma_{jk} \|_0^p,$$

где

$$\gamma_{jk} = \sum_{\mu, \nu = 0}^{p} c_{j+1,\, \mu} c_{\mu\nu}^{(-1)} c_{\nu,\, k+1} \quad (j, k = 0, 1, \ldots, p; \ \| c_{jk}^{(-1)} \|_0^p = C_p^{-1}).$$

С другой стороны, раскрывая определитель

$$D_{j+1,\,k+1} = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots c_{0p} & c_{0k+1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots c_{1p} & c_{1k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p0} & c_{p1} & \dots c_{pp} & c_{pk+1} \\ c_{j+1,0} & c_{j+1,1} & \dots c_{j+1,p} & c_{j+1,k+1} \end{vmatrix}$$

по последней строчке и столбцу, находим, что

$$D_{j+1,\,k+1} = D_p\,(c_{j+1,\,k+1} - \sum_{\mu,\,\nu=0}^{p} c_{j+1,\,\mu} c_{\mu,\nu}^{(-1)} c_{\nu,\,k+1}) \quad (j,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ p).$$

Из последнего соотношения уже следует (8), если учесть, что $D_{p+1,\,p+1} = D_{p+1}$, а $D_{j+1,\,k+1} = 0$, когда хотя бы один из индексов j или $k \leqslant p$.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим соотношение (8) применительно к случаю, когда $p = n-1$, $c_{jk} = c_{j-k}$ $(j,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$. В этом случае $C_{n-1} = \|c_{j-k}\|_0^{n-1} = C'_{n-1}$ и соотношение (8) эквивалентно следующему

$$T^*C_{n-1}T = C_{n-1} - \frac{D_n}{D_{n-1}} J_n. \tag{9}$$

Одновременно заметим, что

$$\det(T - zI) = \det(B_{n-1} - zC_{n-1})/\det C_{n-1} = (-1)^n \Delta_n(z)/D_{n-1},$$

и таким образом, множество корней многочлена $\Delta_n(z)$ дает полный спектр собственных чисел оператора T.

Примем для определенности, что

$$D_n D_{n-1} > 0. \tag{10}$$

В n-мерном комплексном пространстве H_n векторов (столбцов) $\xi = \{\xi_j\}_0^{n-1}$ определим скалярное эрмитово произведение $[\cdot\,,\cdot]$, полагая

$$[\xi,\ \eta] = -\eta^*C_{n-1}\xi = -\sum_{j,\,k=0}^{n-1} c_{j-k}\xi_k\bar{\eta}_j \quad (\xi,\ \eta \in H_n). \tag{11}$$

В силу соотношения (9) будем иметь

$$[T\xi,\ T\xi] = [\xi,\ \xi] + \frac{D_n}{D_{n-1}}|\xi_{n-1}|^2. \tag{12}$$

Таким образом, к оператору T применимо предложение A). Число q положительных квадратов формы $[\xi,\ \xi]$ будет совпадать с числом отрицательных квадратов формы $(C_{n-1}\,\xi,\ \xi)$, а следовательно, будет совпадать с числом перемен знака в ряду (5).

В силу предложения A) у оператора T найдется неотрицательное инвариантное q-мерное подпространство L, в котором все собственные числа оператора T будут по модулю $\geqslant 1$. Покажем, что модуль каждого из этих чисел больше единицы. Пусть ρ одно из этих чисел, а $\varphi = \{\varphi_j\}_0^{n-1}$ какой-либо собственный вектор из L оператора T, отвечающий ρ. Тогда

$$T\varphi = \rho\varphi, \quad [\varphi,\ \varphi] \geqslant 0, \quad |\rho| \geqslant 1.$$

Полагая $\xi = \varphi$ в (12), получим

$$|\rho|^2[\varphi,\ \varphi] = [\varphi,\ \varphi] + \frac{D_n}{D_{n-1}}|\varphi_{n-1}|^2. \tag{13}$$

Если $\varphi_{n-1} \neq 0$, то равенство $[\varphi, \varphi] = 0$ исключается, т. е. $[\varphi, \varphi] > 0$. И тогда из (13) следует, что $|\rho| > 1$.

Покажем, что $\varphi_{n-1} \neq 0$. Допуская противное, будем иметь

$$(|\rho|^2 - 1)[\varphi, \varphi] = 0.$$

Пусть целое $r (\geqslant 1$ и $< n-1)$ выбрано так, что

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2} = \ldots = \varphi_r = 0, \quad \varphi_{r-1} \neq 0. \qquad (1$$

Из $T\varphi = \rho\varphi$ следует: $B_{n-1}\varphi = \rho C_{n-1}\varphi$, что равносильно системе равенств

$$\sum_{k=0}^{n-1} (c_{j-k-1} - \rho c_{j-k})\varphi_k = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n). \qquad ($$

Если выполняются (14), то из первых r этих равенств следует, что укороченный вектор $\hat{\varphi} = \{\varphi_j\}_0^{r-1}$ является собственным вектором матрицы $\hat{T}$:

$$\hat{T}\hat{\varphi} = \rho\hat{\varphi},$$

где

$$\hat{T} = C_{r-1}^{-1}B_{r-1}, \quad C_{r-1} = \|c_{j-k}\|_0^{r-1}, \quad B_{r-1} = \|c_{j-k-1}\|_0^{r-1}.$$

Поэтому для него будет иметь место соотношение, аналогичное (13), а именно:

$$(|\rho|^2 - 1)[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]_{r-1} = \frac{D_r}{D_{r-1}}|\varphi_{r-1}|^2, \qquad (16)$$

где

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]_{r-1} = -\sum_{j,k=0}^{r-1} c_{j-k}\varphi_k\overline{\varphi}_j = -\sum_{j,k=0}^{n-1} c_{j-k}\varphi_k\overline{\varphi}_j = [\varphi, \varphi]_{n-1} = [\varphi, \varphi].$$

В равенстве (16) его левая часть, согласно (14), равна нулю, в то время как его правая часть отлична от нуля. Мы пришли к противоречию.

Итак, доказано, что в q-мерном инвариантном подпространстве L все собственные числа оператора T по модулю больше единицы.

Если мы теперь покажем, что у оператора T имеется также p-мерное ($p = n - q$) инвариантное подпространство M, в котором все его собственные числа по модулю $\leqslant 1$, то тем самым в предположении (10) теорема будет доказана. В самом деле, рассуждая совершенно аналогично тому, как это было в отношении собственных чисел оператора T в L, мы затем убедимся, что в M у оператора T эти числа строго < 1.

Число $p = n - q$ (равное числу постоянств знака в ряду (5)) равно числу положительных квадратов формы (ξ, ξ), где

$$(\xi, \eta) = \eta^* C_{n-1}\xi = -[\xi, \eta] \ (\xi, \eta \in H_n).$$

Соотношение (9) можно будет теперь записать так:

$$(T\xi, T\xi) = (\xi, \xi) - \frac{D_n}{D_{n-1}}|\xi_n|^2 \ (\leqslant (\xi, \xi)). \qquad (17)$$

Предположим сперва, что $\det B_{n-1} \neq 0$ или, что одно и то же, $\det T \neq 0$. Подстановка $\eta = T\xi$ в (17) дает

$$(T^{-1}\eta, T^{-1}\eta) \geqslant (\eta, \eta) \quad (\eta \in H_n).$$

Таким образом, к оператору T^{-1} применимо предложение A). Поэтому можно утверждать, что у T существует p-мерное инвариантное неотрицательное подпространство, в котором все его собственные числа по модулю не превосходят единицы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\det B_{n-1}=0$. Легко видеть, что если, сохраняя значения $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, мы заменим c_n на $c_n+\varepsilon$, то при этой замене определители $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ и матрица C_{n-1} сохранят свои значения, а матрица $B_{n-1}=\|c_{j-k-1}\|_0^{n-1}$ перейдет в матрицу $B_{n-1}(\varepsilon)$ такую, что $\det B_{n-1}(\varepsilon)=(-1)^{n-1}\varepsilon D_{n-1}(\neq 0$ при $\varepsilon\neq 0)$.

Если мы выберем $\varepsilon\,(\neq 0)$ достаточно малым по абсолютной величине, то D_n перейдет в $D_n(\varepsilon)$ того же знака. Поэтому для таких ε у оператора $T_\varepsilon=C_{n-1}^{-1}B_{n-1}(\varepsilon)$ будет существовать p-мерное инвариантное подпространство M_ε, в котором все его собственные числа по модулю $\leqslant 1$. Совершая предельный переход по подходящей последовательности $\varepsilon_n\to 0$, мы докажем, что этим же свойством обладает оператор T.

Доказательство теоремы в случае $D_nD_{n-1}<0$ (противоположном (10)) совершенно аналогично, только в этом случае формы (ξ, ξ) и $[\xi, \xi]$ поменяются ролями.

Замечание 1. Попутно нами доказано, что у всякого собственного вектора $\varphi=\{\varphi_j\}_0^{n-1}$ оператора T последняя координата $\varphi_{n-1}\neq 0$. Отсюда следует, что собственная кратность $\varkappa(\rho)$ любого собственного числа ρ оператора T равна единице. Это обстоятельство не может помешать тому, чтобы алгебраическая кратность $\nu(\rho)$ (т. е. размерность соответствующего числу ρ корневого подпространства L_ρ оператора T или, что одно и то же, кратность ρ как корня многочлена $\Delta_n(z)$) для какого-либо собственного числа ρ была больше единицы.

Оказывается, равенства $\varkappa(\rho)=1$ выполняются при единственном условии $D_{n-1}\neq 0$, обеспечивающем существование оператора $T=C_{n-1}^{-1}B_{n-1}=\|t_{jk}\|_0^{n-1}$. Непосредственное вычисление элемента t_{jk} показывает, что при $k<n-1$ элемент $t_{jk}=0$, если $j\neq k+1$, и $=1$, если $j=k+1$. Поэтому для базисных векторов $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ (у вектора e_j все координаты равны нулю, кроме j-ой, которая равна единице) будем иметь $Te_j=e_{j+1}$ $(j=0, 1, \ldots, n-2)$. Таким образом, $e_k=T^ke_0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, т. е. вектор e_0 является производящим для оператора T, а поэтому все $\varkappa(\rho)=1$. Этот вывод распространяется на общие операторы T, рассмотренные в п. 2.

Замечание 2. Из неравенства $\varphi_{n-1}\neq 0$ можно сделать следующий вывод:

Если все $D_k\neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, то всякие два последовательных многочлена $\Delta_k(z)$ и $\Delta_{k-1}(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ не имеют общих нулей.

В самом деле, если положим

$$\varphi_{-1}=-\sum_{k=0}^{n-1}c_{n-k-1}\varphi_k,$$

то на основании соотношений (15) будем иметь

$$\rho^{n-j-1}\varphi_{-1}+\sum_{k=0}^{n-1}c_{j-k}\varphi_k=0. (j=-1, 0, 1, \ldots, n-1).$$

Матрица этой системы имеет вид:

$$\left\|\begin{matrix}\rho^n & c_{-1}c_{-2}\ldots c_{-n}\\ \rho^{n-1}c_0 & c_{-1}\ldots c_{-n+1}\\ \ldots & \ldots\\ 1 & c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_0\end{matrix}\right\|. \qquad (18)$$

Алгебраическое дополнение элемента ρ^n первой строчки равно $D_{n-1}\neq 0$, а поэтому координаты φ_j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ пропорциональны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов этой строки. Так как

$\varphi_{n-1} \neq 0$, то отлично от нуля и алгебраическое дополнение элемента c_{-n} первой строки, которое равно $(-1)^n D_{n-1}(\rho)$ (чтобы в последнем убедиться, достаточно, отбросив в матрице (18) первую строчку и последний столбец, перевернуть эту матрицу вокруг побочной диагонали).

4. Общий случай: $D_n D_{n-1} \neq 0$. Числа p и q независимо от поведения определителей D_k можно определить как соответственно число положительных и число отрицательных квадратов формы *

$$\xi^* C_{n-1}\xi = \sum_{j,\,k=0}^{n-1} c_{j-k}\xi_k\bar{\xi}_j.$$

При $D_{n-1} \neq 0$ будем иметь $p+q=n$. В этом случае многочлен $\Delta_n(z)$ будет иметь точно степень n. При указанном определении чисел p и q можно сформулировать предложение, обобщающее теорему 1 и к тому же содержащее существенное дополнение.

Теорема 2. *Если $D_n D_{n-1} > 0\,(<0)$, то многочлен $\Delta_n(z)$ имеет внутри единичной окружности точно $p\,(q)$ корней и вне ее точно $q\,(p)$ корней.*

Кроме того, никакие два его корня не могут располагаться зеркально относительно единичной окружности.

Доказательство. Многочлену $\Delta_n(z)$ отвечает «сопряженный» многочлен $\Omega_n(z)$ (см. [8]), определенный из условия, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$\frac{\Omega_n(z)}{\Delta_n(z)} = c_0 + 2\sum_{k=0}^{n} c_{-k}z^{-k} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \tag{19}$$

Предоставляем читателю доказать, что

$$\Delta_n(z)\,\overline{\Omega}_n\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\Delta}_n\left(\frac{1}{z}\right)\Omega_n(z) = 2D_{n-1}D_n. \tag{20}$$

Так как по условию $D_n D_{n-1} \neq 0$, то отсюда следует, что если $\Delta_n(\rho) = 0$, то $\overline{\Delta}_n\left(\frac{1}{\rho}\right) \neq 0$, т. е. $\Delta_n\left(\frac{1}{\bar\rho}\right) \neq 0$. Тем самым доказано второе утверждение теоремы, а также то, что у $\Delta_n(z)$ нет корней на единичной окружности.

После этого для получения первого утверждения теоремы остается заметить, что всегда найдется сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такое, что для последовательности $c_0+\varepsilon, c_1, c_2, \ldots, c_n$ будут выполняться все условия, а значит, и все утверждения теоремы 1.

Замечание 3. Очевидно, что если бы мы сразу использовали специальное соотношение (20) и сделанный из него вывод, то доказательство теоремы 1 упростилось бы.

Отправляясь от соотношения (20), можно также доказать следующее предложение:

Для того чтобы некоторый многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ отличался лишь множителем $(\neq 0)$ от ортогонального многочлена $\Delta_n(z)$, порождаемого некоторой последовательностью $c_0\,(=\bar c_0), c_1, \ldots, c_n$ с $D_n D_{n-1} \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один его корень не лежал на единичной окружности и чтобы среди корней не было пар, зеркально расположенных относительно этой окружности.

---

* Во время печатания этой статьи И. С. Иохвидовым был получен (см. УМЖ, вып. 4, 1966 г.) неожиданный результат: сигнатура $p-q$ формы $\xi^* C_{n-1}\xi$ всегда равна сумме $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sign}(D_k D_{k-1})$ $(D_{-1}=1,\ \operatorname{sign} 0 = 0)$. В нашем случае $(D_{n-1}\neq 0)$ имеем $p+q=n$, так что числа p и q вполне определяются последовательностью чисел D_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

5. Случай $D_{n-1} \neq 0$, $D_n = 0$. Из тождества (17) следует, что T есть унитарный оператор в пространстве с индефинитным скалярным квадратом (ξ, ξ).

На основании известных свойств (см., например, [4, ч. I]) таких операторов можно утверждать, что имеет место

Теорема 3. *Если* $D_{n-1} \neq 0$, *а* $D_n = 0$, *то корни многочлена* $\Delta_n(z)$ *расположены симметрично относительно единичной окружности. Пусть* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_l$ *и* $\rho_{l+1}, \ldots \rho_m$ *все различные корни многочлена* $\Delta_n(z)$, *лежащие соответственно внутри и на единичной окружности. Тогда для кратностей* ν_j *корней* ρ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *справедлива оценка:*

$$\sum_{j=1}^{l} \nu_j + \sum_{j=l+1}^{m} \left[\frac{\nu_j}{2}\right] \leqslant \min(p, q).$$

Через $[\mu]$, как обычно, обозначается целая часть числа μ.

В частности, если $\min(p, q) = 0$, то получается известный результат, что у $\Delta_n(z)$ все корни простые и лежат на единичной окружности.

Отметим, что для случая $D_{n-1} \neq 0$, $D_n = 0$ оператор T детальным образом был изучен во 2-й части работы [4] и чтобы получить там теорему 3, оставалось лишь воспользоваться соотношением $\det(T - zI) = \text{const}\, \Delta_n(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, ОНТИ, ч. *II*, 1938 (2-е издание — Физматгиз, 1962).

2. М. Крейн. Über eine neue Klasse von Hermiteschen Formen und über eine Verallgemeinerung des trigonometrischen Momentenproblems. «Изв. АН СССР», ОМЕН, № 9, 1259—1275, 1933.

3. М. Крейн. Об одном применении теоремы о неподвижной точке в теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. УМН, т. 5, вып. 2, 180—190, 1950.

4. И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн. Спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Труды Московского матем. об-ва, I, т. 5, 332—367, 1956, II, т. 8, 413—496, 1959.

5. G. Baxter. Polynomials defined by a difference system, J. of Math. Analysis and Applications, Vol. 2, № 2, 223—263, (1961).

A convergence equivalence related to polynomials orthogonal on the unit circle, Trans of the Amer. Math. Soc., Vol. 99, № 3, 471—487 (1961).

6. М. Г. Крейн. Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности, «Докл. АН СССР», т. 105, № 4, 637—660, 1955.

7. М. Г. Крейн. К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем, «Докл. АН СССР», т. 111, № 6, 1167—1170, 1956.

8. Я. Л. Геронимус. Теория ортогональных многочленов, ГТТИ, 1950.