НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

М. И. Кадец

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots — \tag{1}$$

полная минимальная система в сепарабельном пространстве Банаха X. Сопряженную к ней систему линейных функционалов обозначим

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots\ (f_i \in X^*;\ f_i(x_j) = \delta_{ij}). \tag{2}$$

Каждому элементу $x \in X$ можно сопоставить разложение по биортогональной системе (1 — 2):

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i. \tag{3}$$

Ряд (3), вообще говоря, расходится. Обозначим:
X_n — линейная оболочка элементов $\{x_i\}_1^n$;
X^n — замыкание линейной оболочки элементов $\{x_i\}_{n+1}^{\infty}$;
X_N^n— линейная оболочка элементов $\{x_i\}_{n+1}^{N}$;
$S_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot x_i$ — частная сумма ряда (3).

Задача восстановления элемента по частным суммам его разложения (3) состоит в следующем: нужно построить последовательность непрерывных операторов T_n, каждый из которых определен в соответствующем X_n, таких, что для каждого $x \in X$

$$x = \lim_{n\to\infty} T_n S_n x.$$

Если операторы T_n линейны, то система (1) называется операторным базисом [1]; в противном случае назовем систему (1) нелинейным операторным базисом. Отметим одно свойство операторных базисов, доказанное в [1]:

Предложение 1. *Линейная оболочка* Γ *системы линейных функционалов, сопряженной операторному базису, есть нормирующее множество.*

Множество линейных функционалов мы называем нормирующим, если

$$\inf_{x\in X}\sup_{f\in\Gamma}\frac{|f(x)|}{\|f\|\cdot\|x\|} > 0.$$

До сих пор неизвестно, в каждом ли сепарабельном пространстве Банаха X существует операторный базис. Более того, неизвестно даже, существует ли последовательность линейных конечномерных (или хотя бы вполне непрерывных) операторов U_n, таких, что для каждого $x \in X$

$$x = \lim_{n \to \infty} U_n x.$$

Поэтому может представить интерес следующая теорема, доказательству которой посвящена настоящая заметка.

Теорема. *Если полная минимальная система $\{x_i\}_1^\infty$ такова, что линейная оболочка Γ ее сопряженной системы $\{f_i\}_1^\infty$ есть нормирующее множество, то $\{x_i\}_1^\infty$ — операторный базис (вообще говоря, нелинейный).*

Идея доказательства такова. Расходимость ряда (3) обычно связана с ростом норм частных сумм $S_n x$ при $n \to \infty$. Поэтому следует попытаться для каждой частной суммы $S_n x \in X_n$ найти в X^n элемент $z = R_n S_n x$ такой, что

$$\| S_n x + R_n S_n x \| = \inf_{z \in X^n} \| S_n x + z \| \leqslant \| x \|,$$

и проверить, не сходится ли последовательность $T_n S_n x = S_n x + R_n S_n x$ к элементу x. В чистом виде эта идея проходит, например, для равномерно выпуклых пространств. Вообще же она нуждается в существенных коррективах.

Лемма. *Для каждого n и $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(n, \varepsilon)$, что*

$$\min_{z \in X_N^n} \| y + z \| \leqslant (1 + \varepsilon) \inf_{z \in X^n} \| y + z \| \tag{4}$$

для всех $y \in X_n$.

Доказательство. Функции

$$h_n^{(N)}(y) = \min_{z \in X_N^n} \| y + z \|; \quad h_n(y) = \inf_{z \in X^n} \| y + z \| \quad (y \in X_n)$$

непрерывны и удовлетворяют условиям

$$h_n^{(n+1)}(y) \geqslant h_n^{(n+2)}(y) \geqslant \ldots \geqslant h_n(y); \quad \lim_{N \to \infty} h_n^{(N)}(y) = h_n(y). \tag{5}$$

Согласно известной теореме Дини, сходимость в (5) равномерна на единичной сфере подпространства X_n, откуда и следует существование $N(n, \varepsilon)$ для нормированных $y \in X_n$. Так как неравенство (4) однородно относительно $\equiv y$, то оно справедливо *для всех* $y \in X_n$.

Предложение 2. *Пусть X сепарабельное пространство Банаха; $\Gamma \subset X^*$ нормирующее множество, являющееся линейной оболочкой счетного множества линейных функционалов $\{f_i\}_1^\infty$. Тогда в X можно ввести эквивалентную норму, обладающую следующими свойствами: относительно этой нормы пространство становится строго нормированным; если*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \text{ для всех } f \in \Gamma,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| \geqslant \| x \|;$$

если сверх того

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \| x \|,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0.$$

Доказательство. Эквивалентная норма, обладающая всеми свойствами, кроме первого, построена в [2]; обозначим ее $\|\cdot\|_0$. Искомая норма строится так:

$$\|x\| = \sqrt{\|x\|_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f_k(x)|^2}{2^k\|f_k\|_0^2}}.$$

Сравнительно просто доказывается, что эта норма сохраняет все требуемые свойства нормы ($\|\cdot\|_0$) и, кроме того, делает пространство строго нормированным (и даже локально равномерно выпуклым [3]).

Доказательство теоремы. Итак, пусть X — сепарабельное пространство Банаха; $\{x_i\}_1^\infty$ — полная минимальная система, $\{f_i\}_1^\infty$ — сопряженная система, причем ее линейная оболочка Γ — нормирующее множество. Требуемые операторы T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ строятся так. В X вводим эквивалентную норму, удовлетворяющую требованиям предложения 3 относительно Γ (обозначим ее $\|\cdot\|$). Для каждого n определяем по лемме число $N = N\left(n, \frac{1}{n}\right)$. Если теперь $y \in X_n$, то элемент $T_n y$ определяется единственным образом из условий:

$$T_n y - y \in X_N^n; \quad \|T_n y\| = \min_{z \in X_N^n}\|y + z\| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n S_n x = x$ для всех $x \in X$.

Заметим прежде всего, что

$$f_\nu(T_n S_n x) = f_\nu(S_n x) = f_\nu(x); \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n S_n x) = f(x) \text{ для всех } f \in \Gamma. \tag{6}$$

Из предложения 2 получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n S_n x\| \leqslant \|x\|. \tag{7}$$

С другой стороны, по лемме

$$\|T_n S_n x\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\inf_{z \in X^n}\|S_n x + z\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x\|. \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n S_n x\| = \|x\|. \tag{9}$$

Из (6) и (9), согласно предложению 2, следует

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n S_n x - x\| = 0,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Гапошкин, М. И. Кадец. Операторные базисы в пространствах Банаха. «Матем. сб.», т. 61 (103) : 1, 3 — 12, 1963.

2. М. И. Кадец. Про зв'язок між слабою та сильною збіжністю. «Доповіді АН УРСР», № 9, 949 — 952, 1959.

3. М. И. Кадец. Письмо в редакцию. «Изв. вузов. Математика», № 6, 186 — 187, 1961.