ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО СУММИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА

Н. А. Давыдов

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $a(t)$ — комплекснозначная функция, интегрируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке $[0; x]$, и пусть

$$S(x) = S^{(0)}(x) = \int_0^x a(t)\,dt, \tag{1}$$

$$S^{(p)}(x) = \int_0^x S^{(p-1)}(t)\,dt,$$

$$\sigma^{(p)} = \frac{p!}{x^p} S^{(p)}(x) \quad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если

$$\lim_{x \to +\infty} \sigma_{(x)}^{(p)} = S,$$

то говорят ([1], стр. 143), что интеграл (1) суммируется к числу S методом Чезаро порядка p или $(c;\ p)$-методом.

Известно ([1], стр. 143), что

$$S^{(p)} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt.$$

Это равенство подсказывает распространение определения суммируемости интеграла (1) на нецелое $p > 0$. Говорят, что интеграл (1) суммируется к числу S $(c;\ p)$-методом, и записывают

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = S(c;\ p),$$

если

$$\sigma_{(x)}^{(p)} \equiv \frac{\Gamma(p+1)}{x^p} S_{(x)}^{(p)} = \frac{p}{x^p} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt \to S\ (x \to +\infty).$$

Если $\sigma_{(x)}^{(p)} = O(1)$ для $0 \leqslant x < \infty$, то пишут

$$S(x) = O(1)(c;\ p) \quad \text{для } 0 \leqslant x < \infty.$$

В работе [2] мы ввели понятие (c) — множества комплекснозначной функции $S(x)$, определенной в промежутке $[0, +\infty)$. Пусть $\overline{G}$ — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости (это может быть: 1) замкнутая выпуклая область, ограниченная или неограниченная, 2) прямая,

3) луч, 4) отрезок, 5) точка), отличное от всей комплексной плоскости, и $\overline{G}_\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества $\overline{G}$.

Множество G мы назвали (c)-множеством функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность отрезков $[x_k;\ y_k]\,(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, что $S(x) \in \overline{G}_\varepsilon$ для $x_k \leqslant x \leqslant y_k$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1\,(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, $x_k \to +\infty\,(k \to \infty)$. Здесь число $\lambda > 1$ и последовательность отрезков $[x_k;\ y_k]$, вообще говоря, зависит от ε.

Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали (c)-точкой функции $S(x)$, если найдутся число $\lambda > 1$, последовательность отрезков $[x_k;\ y_k]$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_k\,(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ такие, что $S(x) \in \overline{G}_k$ для $x_k \leqslant x \leqslant y_k$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1\,(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, $x_k \to +\infty\,(k \to \infty)$, расстояние множества $\overline{G}_k$ от начала координат стремится к бесконечности при $k \to \infty$.

В той же работе [2] доказана

Теорема А. *Если интеграл (1) суммируется к числу S каким-нибудь (c; p)-методом и если множество $\overline{G}$ является (c)-множеством этого интеграла, то $S \in \overline{G}$. Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (c)-точкой интеграла (1), то $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} |\sigma^{(p)}_{(x)}| = \infty$ для каждого $p \geqslant 0$.*

В настоящей работе с помощью этой теоремы А мы докажем несколько теорем тауберова типа, относящихся к (c; p)-методам суммирования интегралов (1).

2. ЛЕММЫ

Комплексное число A, конечное или бесконечное, называется частичным пределом интеграла (1) при $x \to +\infty$, если существует последовательность положительных чисел x_k, стремящихся к $+\infty$ при $k \to \infty$, такая, что

$$S(x_k) \to A\,(k \to \infty).$$

Лемма 1. *Если интеграл (1) удовлетворяет условию:*

$$\varlimsup |S(y) - S(x)| = r < \infty, \tag{2}$$

когда $1 < \frac{y}{x} \to 1\,(x \to \infty)$, то каждый круг $|z - A| \leqslant r$, где A — конечный частичный предел интеграла (1), является (c)-множеством этого интеграла. Если имеет место равенство (2) и интеграл (1) есть неограниченная функция, то бесконечно удаленная точка является (c)-точкой этой функции.*

Доказательство. Пусть $x_k \to +\infty\,(k \to \infty)$, $S(x_k) \to A\,(k \to \infty)$. Прежде всего заметим, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что для $x > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|S(x) - A| \leqslant r + \varepsilon$, то, очевидно, круг $|z - A| \leqslant r$ является (c)-множеством функции $S(x)$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$|S(x_k) - A| < \frac{\varepsilon}{2}\,(k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Число $y_k > x_k$ выберем так, чтобы

$$|S(x) - S(x_k)| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k \tag{4}$$

* Если $r = 0$, то круг вырождается в точку.

и в сколь угодно малой окрестности точки y_k найдется точка $\overset{*}{y}_k > y_k$, для которой

$$|S(y_k^*) - S(x_k)| > r + \frac{\varepsilon}{2}\,(k = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (5)$$

Можем считать $\overset{*}{y}_k - y_k < 1\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$. В силу непрерывности функции $S(x)$ такая точка y_k существует. Покажем, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} = \lambda_1 > 1. \qquad (6)$$

Действительно, если это не так, то найдется подпоследовательность y_{k_m}/x_{k_m}, сходящаяся к единице. Тогда

$$1 < \frac{\overset{*}{y}_{k_m}}{x_{k_m}} \to 1\ (m \to \infty)$$

и в силу (2)

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left|S(y^*_{k_m}) - S(x_{k_m})\right| \leqslant r.$$

Для $m > m_0$ имеем

$$\left|S(y^*_{k_m}) - S(x_{k_m})\right| < r + \frac{\varepsilon}{4},$$

что противоречит неравенствам (5). Этим неравенство (6) доказано. Из неравенства (6) следует

$$\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1 \text{ для } k > k_0,$$

где $1 < \lambda < \lambda_1$.

Так как в силу (3) и (4):

$$|S(x) - A| \leqslant r + \varepsilon \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k,\ \frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1\ (k > k_0),$$

то круг $|z - A| \leqslant r$ является (c)-множеством функции $S(x)$.

Предположим теперь, что имеет место неравенство (2) и что функция $S(x)$ (1) в промежутке $[0;\ +\infty)$ не ограничена. Тогда существует последовательность $x_k \to \infty\ (k \to \infty)$ такая, что $S(x_k) \to \infty\ (k \to \infty)$. Числа $y_k > x_k$ выберем так, чтобы:

$$|S(x) - S(x_k)| \leqslant r + 1 \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k, \qquad (7)$$

и в сколь угодно малой окрестности точки y_k найдется точка $\overset{*}{y}_k > y_k$, для которой

$$|S(\overset{*}{y}_k) - S(x_k)| > r + 1\ (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Можем считать $\overset{*}{y}_k - y_k < 1\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$. Здесь, как и выше, легко показать, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} = \lambda_2 > 1.$$

Отсюда

$$\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda^* > 1\ (k > k_0), \text{ где } 1 < \lambda^* < \lambda_2.$$

Так как $S(x)$, в силу (4), принадлежит кругу

$$\overline{G}_k\,(|z - S(x_k)| \leqslant r + 1) \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k$$

и $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda^* > 1\ (k > k_0)$, а расстояние круга $\overline{G}_k$ от начала координат стремится к бесконечности при $k \to \infty$, то бесконечно удаленная точка есть (c)-точка функции $S(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть x_k — заданная последовательность положительных сел, $x_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Если интеграл (1) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |S(x)-S(x_k)| = r < \infty, \tag{8}$$

гда

$$1 < \frac{x}{x_k} \to 1\ (k \to \infty),$$

ли условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |S(x_k)-S(x)| = r < \infty, \tag{9}$$

когда

$$1 < \frac{x_k}{x} \to 1\ (k \to \infty),$$

то каждый круг $|z-A| \leqslant r$, где A — конечный частичный предел последовательности $S(x_k)$, является (с)-множеством этого интеграла. Если имеет место равенство (8) или (9) и $S(x_k)$ есть неограниченная последовательность, то бесконечно удаленная точка является (с)-точкой интеграла (1).

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1, и мы его здесь опускаем.

Лемма 3. Пусть x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, и пусть интеграл (1), в котором $s(t)$ — действительная функция, удовлетворяет условию:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\ (S(y)-S(x_k)) \geqslant -r\ (0 \leqslant r < \infty), \tag{10}$$

когда

$$1 < \frac{y}{x_k} \to 1\ (k \to \infty).$$

Если $S(x) = O(1)\,(c;\ p)$ для $0 \leqslant x < \infty$ при некотором $p \geqslant 0$, то $S(x_k) < M < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где M не зависит от k. Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = S(c;\ p)$ *при некотором $p \geqslant 0$,* то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ S(x_k) \leqslant S + r.$$

Доказательство. Пусть имеет место (10) и $\sigma^{(p)}(x) = O(1)$ для $0 \leqslant x < \infty$. Ведя доказательство методом рассуждения от противного, допустим, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} S(x_k) = +\infty$. Заметим, что из равенства $\sigma^{(p)} = O(1)$ следует тот факт, что $S(x)$ при $x \to +\infty$ не может стремиться к $+\infty$. Пусть $S(x_{k_m}) \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Точку $y_m > x_{k_m}$ выберем так, чтобы

$$S(x) - S(x_{k_m}) \geqslant -r-1 \text{ для } x_{k_m} \leqslant x \leqslant y_m, \tag{11}$$

и в сколь угодно малой окрестности точки y_m найдется точка $y_m^* > y_m$, для которой

$$S(y_m^*) - S(x_{k_m}) < -r-1. \tag{12}$$

Такая точка y_m (для $m > m_0$) существует в силу непрерывности функции $S(x)$ и сделанного выше замечания. Можем считать $y_m^* - y_m < 1$ $(m > m_0)$. Ради простоты записи обозначим x_{k_m} через x'_m.

Нетрудно видеть, что

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}\ \frac{y_m}{x'_m} = \beta > 1. \tag{13}$$

Действительно, если это не так, то найдется подпоследовательность $\frac{y_{m_\nu}}{x'_{m_\nu}}$, сходящаяся к единице. Так как

$$1 < \frac{\overset{*}{y}_{m_\nu}}{x'_{m_\nu}} \to 1 \ (\nu \to \infty),$$

то, в силу (10), имеем

$$\varliminf_{\nu \to \infty} (S(\overset{*}{y}_{m_\nu}) - S(x'_{m_\nu})) \geqslant -r$$

и, следовательно, для $\nu > \nu_0$

$$S(\overset{*}{y}_{m_\nu}) - S(x'_{m_\nu}) \geqslant -r - \frac{1}{2},$$

что противоречит неравенствам (12). Из (11) и (13) при $m > m_0$ имеем

$$S(x) \geqslant S(x'_m) - r - 1 \text{ для } x'_m \leqslant x \leqslant y_m,$$

причем

$$\frac{y_m}{x'_m} \geqslant \beta_1 > 1, \text{ где } 1 < \beta_1 < \beta.$$

Отсюда и из равенства $\lim\limits_{m \to \infty} S(x'_m) = +\infty$ вытекает тот факт, что бесконечно удаленная точка является (c)-точкой функции $S(x)$.

По теореме A имеем:

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |\sigma^{(p)}_{(x)}| = \infty,$$

что противоречит одному из условий леммы. Первая часть леммы 3 доказана.

Докажем вторую часть этой леммы. Предположим, вопреки утверждению второй части нашей леммы, что

$$\varlimsup_{k \to \infty} S(x_k) \equiv S^* > S + r. \tag{14}$$

Пусть $S(x_{k_m}) \to S^* \ (m \to \infty)$. Можем считать, что

$$S(x_{k_m}) > S^* - \frac{\varepsilon}{2} \ (m = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

где $0 < \varepsilon < \frac{S^* - S - r}{2}$.

Точку $y_m > x_m$ выберем так, чтобы

$$S(x) \geqslant S^* - r - \varepsilon \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_m, \tag{16}$$

и в сколь угодно малой окрестности точки y_m найдется точка $\overset{*}{y}_m > y_m$, для которой

$$S(\overset{*}{y}_m) < S^* - r - \varepsilon. \tag{17}$$

Такая точка y_m (для $m > m_0$) существует в силу непрерывности $S(x)$ и очевидного неравенства

$$\varliminf_{x \to +\infty} S(x) \leqslant S = \lim_{x \to +\infty} \sigma^{(p)}_{(x)} \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} S(x).$$

Можем считать $\overset{*}{y}_m - y_m < 1 \ (m > m_0)$.

Обозначим ради краткости x_{k_m} через x'_m.

Нетрудно видеть, что

$$\varliminf_{m \to \infty} \frac{y_m}{x'_m} \equiv \gamma > 1. \tag{18}$$

В самом деле, если это не так, то найдется подпоследовательность $\frac{y_{m_\nu}}{x'_{m_\nu}}$, сходящаяся к единице. Так как

$$1<\frac{y^*_{m_\nu}}{x'_{m_\nu}}\to 1\ (\nu\to\infty),$$

то, в силу (10), имеем

$$\varliminf_{\nu\to\infty}(S(y^*_{m_\nu})-S(x'_{m_\nu}))\geqslant -r$$

и, следовательно, для $\nu>\nu_0$

$$S(y^*_{m_\nu})-S(x'_{m_\nu})\geqslant -r-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{19}$$

Из (15) и (16) получаем

$$S(y^*_{m_\nu})-S(x'_{m_\nu})<-r-\frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит неравенствам (19). Этим неравенство (18) доказано.

Из (16) и (18) находим:

$$S(x)\geqslant S^*-r-\varepsilon \text{ для } x'_m\leqslant x\leqslant y_m,$$

где

$$\frac{y_m}{x'_m}\geqslant\gamma_1>1\ (m>m_0),\ 1<\gamma_1<\gamma.$$

Таким образом, промежуток $[S^*-r,\ +\infty)$ является (c)-множеством функции $S(x)$ и по теореме А число $S\in[S^*-r,\ +\infty)$, т. е. $S\geqslant S^*-r$, что противоречит неравенству (14). Этим доказано утверждение второй части леммы 3.

Аналогичным образом доказывается

Лемма 4. *Пусть x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k\to+\infty\ (k\to\infty)$ и пусть интеграл (1), в котором $a(t)$ действительная функция, удовлетворяет условию:*

$$\varliminf_{k\to\infty}(S(x_k)-S(y))\geqslant -r\ (0\leqslant r<\infty),$$

когда

$$1<\frac{x_k}{y}\to 1\ (k\to\infty).$$

Если $S(x)=O(1)(c;\ p)$ для $0\leqslant x<\infty$ при некотором $p\geqslant 0$, то $S(x_k)>M>-\infty\ (k=1,\ 2,\ \ldots)$, где M не зависит от k.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=S(c;\ p)$ при некотором $p\geqslant 0$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty}S(x_k)\geqslant S-r$.

3. ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

Теорема 1. *Пусть интеграл (1) удовлетворяет условию:*

$$\varlimsup_{x\to+\infty}|S(y)-S(x)|=r<\infty,$$

когда

$$1<\frac{y}{x}\to 1\ (x\to+\infty).$$

Если $S(x)=O(1)(c;\ p)$ для $0\leqslant x<\infty$ при некотором $p\geqslant 0$, то $S(x)=O(1)$ для $0\leqslant x<\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=S(c;\ p)$ при некотором $p\geqslant 0$, то $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}|S(x)-S|\leqslant r$.

Доказательство. Пусть выполнены условия первой части теоремы и допустим, что $S(x)$ — неограниченная функция. Тогда по лемме бесконечно удаленная точка будет (c)-точкой функции $S(x)$. По теореме А п. 1 имеем:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} |\sigma_{(x)}^{(p)}| = \infty,$$

что противоречит одному из условий теоремы. Первая часть теоремы доказана. Пусть выполнены условия второй части теоремы. Тогда $S(x)$ ограничена в промежутке $0 \leqslant x < \infty$ и по лемме 1 каждый круг $|z - A| \leqslant r$, где A — частичный предел функции $S(x)$ при $x \to +\infty$, будет являться (c)-множеством функции $S(x)$. По теореме А число S принадлежит кругу $|z - A| \leqslant r$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |S(x) - S| \leqslant r$.

Теорема 2. *Пусть x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, и пусть интеграл (1) удовлетворяет условию:*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |S(y) - S(x_k)| = r < \infty, \tag{20}$$

когда

$$1 < \frac{y}{x_k} \to 1 \ (k \to \infty),$$

или условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |S(x_k) - S(y)| = r < \infty, \tag{21}$$

когда

$$1 < \frac{x_k}{y} \to 1 \ (k \to \infty).$$

Если $S(x) = O(1)(c;\ p)$ для $0 \leqslant x < \infty$ при некотором $p \geqslant 0$, то $S(x_k) = O(1)(k = 1, 2, \ldots)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = S(c;\ p)$ при некотором $p \geqslant 0$, то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S(x_k) - S| \leqslant r$.

Доказательство. Пусть, например, выполнено условие (20) и $S(x) = O(1)(c;\ p)$. Если бы $S(x)$ была неограниченной в промежутке $[0;\ +\infty)$, то по лемме 2 бесконечно удаленная точка была бы (c)-точкой функции $S(x)$ и по теореме А п. 1 имели бы $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |\sigma_{(x)}^{(p)}| = \infty$, что противоречит одному из условий теоремы. Утверждение первой части теоремы доказано.

Пусть выполнены условия второй части теоремы. Тогда по лемме 2 круг $|z - A| \leqslant r$, где A — частичный предел последовательности $S(x_k)$, будет являться (c)-множеством функции $S(x)$. По теореме А число S принадлежит кругу $|z - A| \leqslant r$. Этим неравенство $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S(x_k) - S| \leqslant r$ доказано.

Теорема 3. *Пусть x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, и пусть интеграл (1), в котором $a(t)$ — действительная функция, удовлетворяет условию*

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} (S(y) - S(x_k)) \geqslant -r_1 \ (0 \leqslant r_1 < \infty),$$

когда

$$1 < \frac{y}{x_k} \to 1 \ (k \to \infty),$$

а также условию

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} (S(x_k) - S(y)) \geqslant -r_2 \quad (0 \leqslant r_2 < \infty),$$

когда

$$1 < \frac{x_k}{y} \to 1 \ (k \to \infty).$$

Если $S(x) = O(1)(c;\ p)$ *для* $0 \leqslant x < \infty$ *при некотором* $p \geqslant 0$, *то* $S(x_k) = O(1)$ *для* $k = 1, 2, \ldots$

Если $\lim_{x \to +\infty} S(x) = S(c;\ p)$ *при некотором* $p \geqslant 0$, *то*

$$S - r_2 \leqslant \underline{\lim}_{x \to +\infty} S(x_k) \leqslant \overline{\lim}_{k \to \infty} S(x_k) \leqslant S + r_1.$$

Эта теорема является простым следствием лемм 3 и 4.

Частным случаем теоремы 3 является

Теорема 4. *Пусть интеграл (1), в котором* $a(t)$ — *действительная функция, удовлетворяет условию:*

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} (S(y) - S(x)) \geqslant -r \quad (0 \leqslant r < \infty),$$

когда

$$1 < \frac{y}{x} \to 1 \ (x \to +\infty).$$

Если $S(x) = O(1)(c;\ p)$ *для* $0 \leqslant x < \infty$ *при некотором* $p \geqslant 0$, *то* $S(x) = O(1)$ *для* $0 \leqslant x < \infty$.

Если $\lim_{x \to +\infty} S(x) = S(c;\ p)$ *при некотором* $p \geqslant 0$, *то*

$$S - r \leqslant \underline{\lim}_{x \to +\infty} S(x) \leqslant \overline{\lim}_{x \to +\infty} S(x) \leqslant S + r.$$

Теоремы 1 и 4 при $r = 0$ хорошо известны. Теоремы 2 и 3 обобщают наши теоремы 3 и 4 работы [2]. Все теоремы 1—4 являются аналогами соответствующих теорем работы [3], доказанных для рядов, суммируемых $(c;\ p)$-методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951.

2. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса. «Матем. сб.», т. 48 (90) : 4, 429—446, 1959.

3. Н. А. Давыдов. (c)-свойство методов Чезаро и Абеля—Пуассона и теоремы тауберова типа. «Матем. сб.», т. 60 (102) : 2, 185—206, 1963.