О ЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ОТ МОДУЛЯ ВЫПУКЛОСТИ

В. И. Гурарий

Модулем выпуклости банахова пространства E называется функция

$$\delta(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\omega}} \left(1 - \frac{\|x+y\|}{2}\right) \quad (0 \leqslant \omega \leqslant 2).$$

Это понятие впервые было введено Кларксоном [1]. Основной целью настоящей заметки является установление неравенств, связывающих модуль выпуклости и некоторые другие геометрические характеристики банаховых пространств. Эти неравенства в известной мере дополняют результаты Кларксона и Грюнбаума ([1, 2]).

Условимся пользоваться следующей терминологией и обозначениями:

1. $Lx_1, \ldots, x_n$ — линейная оболочка над элементами $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Индексом совокупности $\{e_i\}$ (конечной или бесконечной) элементов пространства E называется величина

$$\gamma(\{e_i\}) = \inf_{i<j} \inf_{\substack{z \in L_{e_1, \ldots, e_i} \\ \|z\|=1}} \rho(z, L_{e_{i+1}, \ldots, e_j}),$$

где $\rho(x, R)$ означает расстояние элемента x от подпространства R, ([3, 6]).

3. Для банаховых пространств E_1 и E_2 будем рассматривать величину

$$d(E_1, E_2) = \inf_T (\|T\| \cdot \|T^{-1}\|) = \inf_{\|T^{-1}\|\leqslant 1} \|T\|,$$

где нижняя грань берется по всем изоморфизмам T пространства E_1 на E_2 (величина $\ln d(E_1, E_2)$ называется расстоянием Банаха — Мазура между E_1 и E_2, [4]).

4. Для подпространства P банахова пространства E полагаем

$$\lambda(P, E) = \inf_A \|A\|,$$

где A пробегает множество всех операторов проектирования из E на P. Проекционной постоянной пространства P называется величина (см., напр. [2]) $\lambda(P) = \inf_{E \succ P} \lambda(P, E)$ *.

Для любых банаховых пространств E_1 и E_2 имеет место неравенство [2]

$$\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E_2)\, d(E_1, E_2). \tag{1}$$

---

* Запись $E \succ P$ означает, что E содержит P как подпространство.

Установим ряд предложений (все рассматриваемые ниже пространства предполагаются банаховыми).

Предложение 1. *Пусть E — есть плоскость Минковского, x — фиксированный элемент из E, y — произвольный элемент из E, $x \neq 0$, $y \neq 0$ (O — нулевой элемент), φ — эвклидов угол между $\overline{Ox}$ и $\overline{Oy}$, отсчитываемый от $\overline{Ox}$ в определенном направлении (например, по часовой стрелке). Если для данных $a > 0$, $b > 0$: $\|x\| = a$, $\|y\| = b$, то $\|x + y\|$ есть монотонно не возрастающая функция от φ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и монотонно неубывающая функция от φ при $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $b = 1$. Пусть $x \in E$, $y_1 \in E$, $y_2 \in E$, $\|x\| = a$, $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$, и кривая γ есть единичная сфера в E. Пусть $\angle xOy_1 > \angle xOy_2$ и $x + y_1 = \overline{OB'}$; $x + y_2 = \overline{OC'}$; очевидно, $\overline{B'C'} = \overline{y_1y_2}$. Проведем $B''C'' \parallel y_1y_2$ до пересечения с OC' в точке C''; пусть D есть точка пересечения OC' с γ. Условимся эвклидову длину вектора $\overline{AB}$ обозначать через $|\overline{AB}|$. Из выпуклости γ ясно, что $|\overline{OC''}| \geqslant |\overline{OD}|$ (см. рис. 1). Поэтому имеем

$$\|x + y_2\| = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OD}|} \geqslant \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OC''}|} = \frac{|\overline{OB'}|}{|\overline{OB''}|} = \|x + y_1\|,$$

и, таким образом, $\|x + y\|$ есть невозрастающая функция от φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

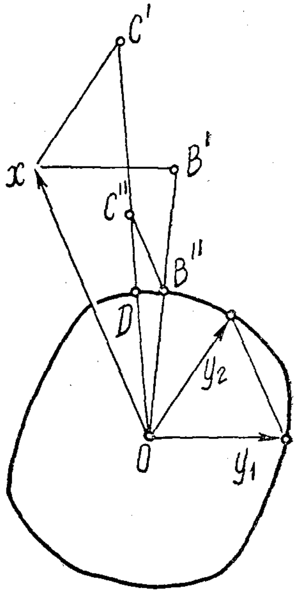

Рис. 1.

Предложение 2. *Если $x \in E$, $y \in E$, $\rho(x, L_y) = \|x\|$, то*

$$\|x + y\| \geqslant \|x\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{\|y\|}{\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}}\right)\right]. \quad (2)$$

Доказательство этого предложения дано в работе [5].

Предложение 3. *Для любых $x \in E$, $y \in E$ имеет место неравенство*

$$\max\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \geqslant \|x\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{\|y\|}{\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}}\right)\right]. \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $y' \in L_{x,y}$, $\|y'\| = \|y\|$, такой, что

$$\rho(x, L_{y'}) = 1.$$

Пусть φ и φ' — углы между Ox и Oy и между Ox и Oy', отсчитываемые от Ox по часовой стрелке. Не нарушая общности, можно считать, что $\varphi \leqslant \pi$, $\varphi' \leqslant \pi$ (см. рис. 2). Пусть $\varphi \leqslant \varphi'$.
Тогда на основании предложения 1 имеем

$$\|x + y\| \geqslant \|x + y'\|. \quad (4)$$

Если же $\varphi \geqslant \varphi'$, то точно также устанавливаем, что

$$\|x - y\| \geqslant \|x - y'\|. \quad (5)$$

Так как на основании предложения 2

$$\|x \pm y'\| \geqslant \|x\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{\|y'\|}{\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y'\|^2)}}\right)\right],$$

то из (4) и (5), учитывая, что $\|y'\| = \|y\|$, получаем (3).

Предложение 4. *Если $x \in E$, $y \in E$, $\|y\| \leqslant \|x\|$, то*

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \|x\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{\|y\|}{2\|x\|}\right)\right]. \qquad (6)$$

Если $\|x\| \leqslant \|y\|$, то

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \|y\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{\|x\|}{2\|y\|}\right)\right]. \qquad (6')$$

Доказательство. Если $\|y\| \leqslant \|x\|$, то

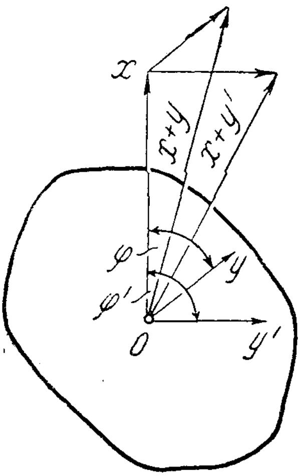

Рис. 2.

$$\frac{\|y\|}{\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} \geqslant \frac{\|y\|}{2\|x\|},$$

поэтому из (3) и монотонного возрастания функции $\delta_E(\omega)$ в интервале $0 \leqslant \omega \leqslant 2$ получаем (6). Меняя в (6) x и y местами, получим (6').

Частным случаем (6) и (6') является неравенство

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \max\{\|x\|, \|y\|\}. \qquad (7)$$

Предложение 5. *Для любых $x \in E$, $y \in E$ имеет место неравенство*

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \min\{\|x\|, \|y\|\} \left[1 + \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (8)$$

Доказательство. Если $\|y\| \geqslant \|x\|$, то так как $\frac{\|y\|}{\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}}$ есть монотонно возрастающая функция от $\|y\|$, имеем

$$\frac{\|y\|}{\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} \geqslant \frac{\|x\|}{\sqrt{2(\|x\|^2+\|x\|^2)}} = \frac{1}{2}$$

и в силу монотонного возрастания функции $\delta_E(\omega)$ в интервале $0 \leqslant \omega \leqslant 2$ из (3) получаем

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \|x\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (9)$$

Если же $\|x\| \geqslant \|y\|$, то точно также получаем

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \geqslant \|y\| \left[1 + \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (10)$$

Сопоставляя (9) и (10), приходим к (8).

Предложение 6. *Если для данных $x \in E$, $y \in E$: $\|x+y\| \geqslant \|x\|$, то функция $\|x+ty\|$ монотонно не убывает в интервале $1 \leqslant t \leqslant \infty$.*

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем считать, что E является плоскостью Минковского и что $\|x\| = 1$, т. е. $x \in \gamma$, где кривая γ есть единичная окружность в E. В силу выпуклости γ ясно, что ни одна из точек вида $x+ty$ $\|t\| \geqslant 1$ не может лежать внутри γ. Пусть $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ и $x + t_1 y = \overline{OC_1}$, $x + t_2 y = \overline{OC_2}$. Обозначим через D_1 и D_2 точки пересечения OC_1 и соответственно OC_2 с γ (см. рис. 3). Из выпуклости γ вытекает, что если через D_1 провести прямую, параллельную AC_1, то точка $\mathscr{E}$ ее пересечения с OC_2 лежит между D_2 и C_2, т. е. $|\overline{OD_2}| \leqslant |\overline{O\mathscr{E}}|$. Поэтому имеем

$$\|x + t_1 y\| = \frac{|\overline{OC_1}|}{|\overline{OD_1}|} = \frac{|\overline{OC_2}|}{|\overline{O\mathscr{E}}|} \leqslant \frac{|\overline{OC_2}|}{|\overline{OD_2}|} = \|x + t_2 y\|,$$

что и доказывает предложение 6.

Предложение 7. *Если P и Q — подпространства банахова пространства E, то для данных $a > 0$, $b > 0$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{x \in P,\ y \in Q \\ \|x\| < a,\ \|y\| < b}} \|x + y\| = \sup_{\substack{x \in P,\ y \in Q \\ \|x\| = a,\ \|y\| = b}} \|x + y\|. \quad (11)$$

Доказательство вытекает из (7) и предложения 6.

Предложение 8. *Если для последовательности $\{e_i\}_1^\infty$ в E $\gamma(\{e_i\}_1^\infty) \geqslant \gamma \geqslant 0$, то имеет место неравенство*

$$\rho(e_1, L_{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots}) \geqslant \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\|e_i\|, \quad i = 1, 2, \ldots . \quad (12)$$

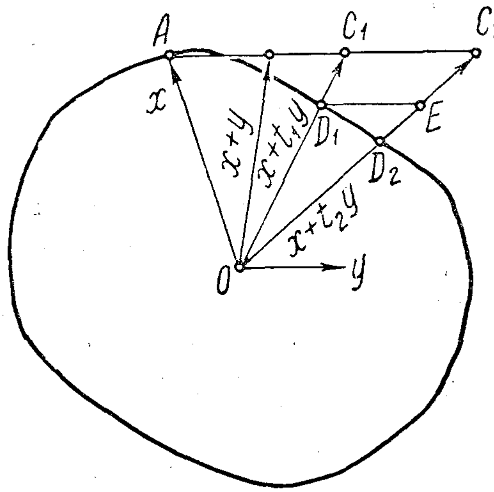

Рис. 3.

Доказательство. Если для подпространств P и Q банахова пространства $\inf\limits_{z \in P,\ \|z\| = 1} \rho(z, Q) \geqslant \delta \geqslant 0$, то справедливо неравенство (см., например, [7]):

$$\inf_{u \in Q,\ \|u\| = 1} \rho(u, P) \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}. \quad (13)$$

Пусть $x \in L_{e_1, \ldots, e_{i-1}}$, $y \in L_{e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots}$. Имеем, применяя (13),

$$\|e_i + x + y\| \geqslant \rho(e_i, L_{e_1, \ldots, e_{i-1}}) \inf_{\substack{z \in L_{e_1, \ldots, e_i} \\ \|z\| = 1}} \rho(z, L_{e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma}{1+\gamma}\|e_i\| \cdot \gamma = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\|e_i\|, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

что и означает справедливость (12).

Теорема 1. *Для любой совокупности $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\|x_i\| \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$ элементов банахова пространства E имеет место неравенство*

$$\max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \geqslant A_n n^\alpha, \quad (14)$$

где

$$\alpha = \log_2\left[1 + \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$A_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2^k,\ k = 1, 2, \ldots \\ 2^{-\alpha} \text{ при остальных } n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть при некотором натуральном k справедливо (14) для $n = 2^k$. Рассмотрим какую-либо совокупность элементов $\{x_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}$, $\|x_i\| \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k+1}$. Согласно предположению, найдется совокупность чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $i = 1, 2, \ldots, 2^{k+1}$, такая, если обозначить

$$y = \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i x_i, \quad z = \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \varepsilon_i x_i,$$

то

$$\| y \| \geqslant 2^{k\alpha}, \quad \| z \| \geqslant 2^{k\alpha}.$$

Но тогда по неравенству (8):

$$\max \{\| y + z \|, \; \| y - z \|\} \geqslant 2^{k\alpha} \left[1 + \delta_E \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 2^{(k+1)\alpha}.$$

Это означает, что (14) справедливо для $n = 2^{k+1}$ и, проводя полну индукцию по k, получим, что (14) справедливо для любого $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь n — произвольное натуральное число, $\{x_i\}_{i=1}^n$ прои вольная совокупность элементов, $n = n_1 + n_2$, $n_1 = 2^k \geqslant \frac{n}{2}$ (k — цел Тогда имеем, применяя (7),

$$\max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \geqslant \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \varepsilon_i x_i \right\| \geqslant n_1^\alpha \geqslant \left(\frac{n}{2} \right)^\alpha = 2^{-\alpha} n^\alpha,$$

где $\alpha = \log_2 \left[1 + \delta_E \left(\frac{1}{2} \right) \right]$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть E^n есть n-мерное пространство Минковског тогда справедливо неравенство*

$$d(E^n, c^n) \geqslant A_n n^\alpha, \tag{1}$$

где α и A_n имеют то же значение, что и в теореме 1.*

Доказательство. Пусть T есть произвольный изоморфизм c^n на E^n и $\{e_i\}_1^n$ — естественный базис** в c^n, $x_i = Te_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n$ Мы можем считать, что $\|T^{-1}\| \leqslant 1$. Тогда $\| x_i \| \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и по теореме 1 найдется совокупность чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ такая, что

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \geqslant A_n n^\alpha$$

при вышеуказанных A_n и α. Пусть $e = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$; имеем: $\| e \| = 1$

$$\| Te \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \geqslant A_n n^\alpha$$

* c^n и l^n — пространства совокупностей из n вещественных чисел с естестве определенными векторными операциями и нормами соответственно

$$\|\{\xi_i\}_1^n\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|, \quad \|\{\xi_i\}_1^n\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$$

** Естественный базис в c^n или l^n — это базис вида

$$e_i = \underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i-1 \text{ раз}} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

и, следовательно, $\|T\| \geqslant A_n n^\alpha$. Отсюда получаем

$$d(E^n, c^n) = \inf_{T,\ \|T^{-1}\|<1} \|T\| \geqslant A_n n^\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если для* $x \in E$, $y \in E$, $x \neq \theta$, $y \neq \theta$:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant d,$$

где $d \leqslant \sqrt{3}$, *то*

$$\|x + y\| \leqslant 2 \max\{\|x\|, \|y\|\}[1 - \delta_E(d)].$$

Постоянную $\sqrt{3}$ нельзя улучшить.

Доказательство. Если $\|x\| = \|y\|$, то непосредственно из определения модуля выпуклости получаем

$$\|x + y\| \leqslant 2\|x\|[1 - \delta_E(d)]. \tag{16}$$

Пусть теперь $\|x\| \leqslant \|y\|$. Обозначим $\tilde{x} = \frac{\|y\|}{\|x\|} x$. Очевидно,

$$\|\tilde{x}\| = \|y\|, \quad \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant d.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\|x + y\| \geqslant \|y\|$.

Тогда на основании (16) и предложения 6 имеем

$$\|x + y\| \leqslant \|\tilde{x} + y\| \leqslant 2\|y\|[1 - \delta_E(d)] = 2\max\{\|x\|, \|y\|\}[1 - \delta_E(d)].$$

2. $\|x + y\| \leqslant \|y\|$.

Поскольку $\delta_E(\omega) \leqslant \delta_H(\omega)$, $0 \leqslant \omega \leqslant 2$ [8], где H — гильбертово пространство, и $\delta_H(\omega) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4}}$, т. е. $\delta_H(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$, то $\delta_E(d) \leqslant \frac{1}{2}$, и мы получим

$$\|x + y\| \leqslant \|y\| \leqslant 2\|y\|[1 - \delta_E(d)] = 2\max\{\|x\|, \|y\|\}[1 - \delta_E(d)].$$

Случай $\|x\| \geqslant \|y\|$ рассматривается аналогично.

Мы представляем читателю простую проверку того, что в случае эвклидова пространства E постоянная $\sqrt{3}$ является точной.

Теорема 4. *Если для* $x \in E$, $y \in E$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant d > 0,$$

то имеет место неравенство

$$\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leqslant 2\max\{\|x\|, \|y\|\}[1 - \delta_E(d)]. \tag{17}$$

Доказательство вытекает из (16) и предложения 6.

Установим одно неравенство, нужное для дальнейшего. Учитывая, что на основании (7)

$$\max\left\{\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|, \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|\right\} \geqslant 1 \quad (x \neq \theta,\ y \neq \theta),$$

мы из теоремы 3 получим для любых $x \in E$, $y \in E$

$$\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leqslant 2\max\{\|x\|, \|y\|\}[1 - \delta_E(1)]. \tag{18}$$

Теорема 5. *Для любой совокупности* $\{x_i\}_1^n$, $\|x_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$ *элементов банахова пространства* E *имеет место неравенство*

$$\min_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant B_n n^{\beta}, \tag{19}$$

где

$$\beta = 1 + \log_2 [1 - \delta_E(1)],$$

$$B_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2^k, \ k = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2^{\beta}}{2^{\beta} - 1} \text{ при остальных } n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть при некотором натуральном k справедливо (19) при $n = 2^k$. Рассмотрим какую-либо совокупность элементов $\{x_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}$, $\|x_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k+1}$. Согласно предположению, найдется совокупность чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k+1}$ такая, что если обозначить $y = \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i x_i$, $z = \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \varepsilon_i x_i$, то $\|y\| \leqslant 2^{k\beta}$, $\|z\| \leqslant 2^{k\beta}$.

Но тогда по неравенству (18), учитывая, что $1 - \delta_E(1) = 2^{\beta-1}$, имеем

$$\min\{\|y + z\|, \|y - z\|\} \leqslant 2 \cdot 2^{k\beta} [1 - \delta_E(1)] = 2^{(k+1)\beta}.$$

Это означает, что (19) справедливо для $n = 2^{k+1}$, и проводя полную индукцию по k, получим, что (19) справедливо для любого $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь n — данное натуральное число и предположим, что (19) справедливо для любого $n' < n$. Пусть $n = n_1 + n_2$, $n_1 = 2^k$, $n_2 \leqslant \frac{n}{2}$. Тогда имеем

$$\min_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant \min_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \varepsilon_i x_i \right\| + \min_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=n_1+1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant$$

$$\leqslant n_1^{\beta} + B_{n_2} n_2^{\beta} \leqslant n^{\beta} + \frac{2^{\beta}}{2^{\beta} - 1} \left(\frac{n}{2}\right)^{\beta} = \frac{2^{\beta}}{2^{\beta} - 1} n^{\beta}.$$

Отсюда по индукции получаем, что (19) справедливо для любого натурального n. Теорема 5 доказана*.

Теорема 6. *Для любого n-мерного пространства Минковского* E^n *справедливо неравенство*

$$d(E^n, l^n) \geqslant \frac{1}{B_n} n^{1-\beta},$$

где β *и* B_n *имеют то же значение, что и в теореме 5.*

Доказательство. Пусть T есть произвольный изоморфизм l^n на E^n и $\{e_i\}_1^n$ — естественный базис в l^n, $Te_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Мы можем считать, что $\|T\| \leqslant 1$. Тогда $\|x_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и по теореме 5 найдется совокупность чисел $\{\varepsilon_i\}_1^n$ такая, что

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant B_n n^{\beta}$$

---

* Если $\delta(1) > 0$, то из неравенства $\delta_E(1) \leqslant \delta_H(1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ имеем

$$\frac{1}{2} \log_2 3 \leqslant \beta < 1.$$

при вышеуказанных β и B_n. Пусть $e = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$; имеем

$$\|e\| = n, \quad \|Te\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant B_n n^{\beta}$$

и, следовательно, $\|T^{-1}\| \geqslant \frac{n^{1-\beta}}{B_n}$. Отсюда получаем

$$d(E^n, l^n) = \inf_{\|T\| \leqslant 1} \|T^{-1}\| \geqslant \frac{n^{1-\beta}}{B_n},$$

что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть точки A и B лежат на единичной окружности γ двумерного пространства Минковского, D — середина отрезка AB. C — лежит на AD, $\mathscr{E}$ — ближайшая к C точка пересечения продолжения OC с γ. Если $\|\overline{D\mathscr{E}}\| = \alpha$, $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = t$, то $\|\overline{CF}\| \geqslant 2t\alpha$.*

Доказательство. Пусть F' — точка пересечения $A\mathscr{E}$ с OF. Выберем прямые $O\mathscr{E}$ и AB за оси новой системы координат. Не нарушая общности (производя в случае надобности афинное преобразование), можно считать, что $\|\overline{O\mathscr{E}}\| = \|\overline{AD}\| = 1$. Тогда координаты точек $O, A, D, \mathscr{E}, C$ будут: $O(\alpha - 1, 0)$, $A(0, 1)$, $D(0, 0)$, $\mathscr{E}(\alpha, 0)$, $C(0, 1 - 2t)$. Уравнение OC имеет вид: $x + \frac{\alpha - 1}{1 - 2t} y + 1 - \alpha = 0$, а уравнение $A\mathscr{E}$: $x + \alpha y - \alpha = 0$. Решая систему этих уравнений, находим абсциссу точки F':

$$x_{F'} = \frac{2t\alpha(1 - \alpha)}{1 - 2\alpha t},$$

имеем

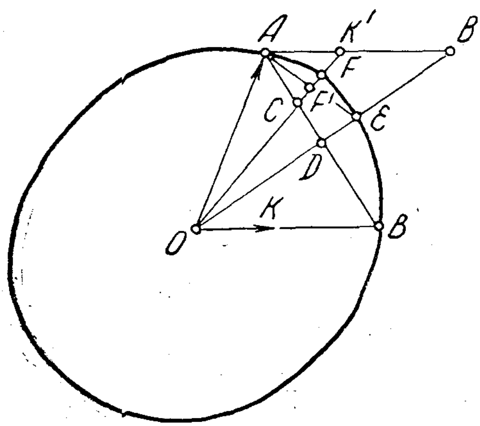

Рис. 4.

$$\|\overline{CF}\| = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OF}|} \geqslant \frac{|\overline{CF'}|}{|\overline{OF'}|} = \frac{x_{F'} - x_D}{x_{F'} - x_O} = 2t\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 7. *В банаховом пространстве E для $x \in E$, $y \in E$ таких, что $\|y\| \leqslant \|x\|$, $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = d$ имеет место неравенство*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \left[1 - \delta_E(d) - \delta_E(d) \frac{\|y\|}{\|x\|}\right] \|y\|. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть E — двумерная плоскость Минковского и $\|x\| = 1$. Будем считать, что $x = \overline{OA}$, $y = \overline{OK}$ (см. рис. 4). Пусть $\overline{OB} = \frac{\overline{OK}}{\|\overline{OK}\|}$; $\overline{OB'} = \overline{OA} + \overline{OB}$, $\overline{AK'} = \overline{OK}$, $\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{OB'}$, $\mathscr{E}$ — точка пересечения OB' с γ; C, F', F — точки пересечения OK' соответственно с AB, $A\mathscr{E}$, γ, где γ — единичная окружность в E. Не нарушая общности, можно считать, что K' лежит вне γ (в противном случае теорема очевидна). Нетрудно видеть, что

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|} \geqslant \frac{|\overline{AK'}|}{|\overline{AB'}|} = \frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OB}|} = \|y\|.$$

Отсюда, учитывая, что $|\overline{AD}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$, имеем

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AC}|}{2|\overline{AD}|},$$

т. е. $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} \geqslant \frac{\|y\|}{2}$. Далее, применяя лемму, получаем

$$\|\overline{CF}\| \geqslant 2\|\overline{D\mathscr{E}}\| \cdot \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} \geqslant 2\delta_E(d)\frac{\|y\|}{2} = \delta_E(d)\|y\|$$

и поскольку, как легко видеть, $\frac{|\overline{K'C}|}{|\overline{OC}|} = \|y\|$, то имеем

$$\|x+y\| = \frac{|\overline{OK'}|}{|\overline{OF}|} = 1 + \frac{|\overline{K'F}|}{|\overline{OF}|} = 1 + \frac{|\overline{K'C}|}{|\overline{OF}|} - \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OF}|} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{|\overline{K'C}|}{|\overline{OC}|} \cdot \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OF}|} - \|\overline{CF}\| = 1 + \|y\|(1 - \|\overline{CF}\|) - \|\overline{CF}\| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \|y\|[1 - \|y\|\delta_E(d)] - \|y\|\delta_E(d).$$

Таким образом,

$$\|x+y\| \leqslant 1 + [1 - \delta_E(d) - \delta_E(d)\|y\|]\|y\|,$$

откуда сразу вытекает (20).

Из (20), в частности, вытекает, что если $\|y\| \leqslant \|x\|$, то

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + [1 - \delta_E(d)]\|y\|,$$

где $d = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$.

Теорема 8. *Пусть $\{e_i\}_1^n$ совокупность элементов банахова пространства E такая, что $\gamma(\{e_i\}_1^n) = \gamma > 0$. Имеет место неравенство*

$$\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| \leqslant M_n n^{\mu} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|, \tag{21}$$

где

$$\mu = 1 + \log_2[1 - \delta(\gamma)]$$

$$M_n = \begin{cases} 1 \ \text{при}\ n = 2^k,\ k = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2^{\mu}}{2^{\mu} - 1} \ \text{при остальных}\ n. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что правое неравенство в (21) верно для $n = 2^k$ при некотором натуральном k. Пусть $\{e_i\}_1^{2^{k+1}}$ совокупность из 2^{k+1} элементов. Имеем по теореме 3, учитывая, что $\gamma \leqslant 1$ и $1 - \delta_E(\gamma) = 2^{\mu-1}$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^{k+1}} e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{2^k} e_i + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} e_i \right\| \leqslant 2^{k\mu} \cdot 2[1 - \delta_E(\gamma)] \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^{k+1}} \|e_i\| =$$

$$= 2^{(k+1)\mu} \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^{k+1}} \|e_i\|$$

и по индукции заключаем, что правая часть неравенства (21) верна для любого $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь n — данное натуральное число, $n = n_1 + n_2$, $n_1 = 2^k$, $n_2 < \frac{n}{2}$ и предположим, что правое неравенство в (21) справедливо для любого $n' < n$. Тогда имеем

$$\| \sum_{i=1}^{n} e_i \| \leqslant \| \sum_{i=1}^{n_1} e_i \| + \| \sum_{i=n_1+1}^{n} e_i \| \leqslant n_1^{\mu} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| e_i \| + M_{n_2} n_2^{\mu} \max_{n_1+1 \leqslant i \leqslant n} \| e_i \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| e_i \| \left[n^{\mu} + M_n \left(\frac{n}{2} \right)^{\mu} \right] = (1 + M_n 2^{-\mu}) n^{\mu} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| e_i \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\mu}}{2^{\mu} - 1} n^{\mu} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| e_i \|$$

и, таким образом, правое неравенство в (21) справедливо для любого натурального n. Левое неравенство в (21) вытекает из (12).

Теорема 9. *Если в n-мерном пространстве Минковского E^n существует базис $\{e_i\}_1^n$ с индексом $\gamma > 0$, то справедливо неравенство*

$$d(E^n, c^n) \leqslant \frac{M_n (1 + \gamma)}{\gamma^2} n^{\mu}, \tag{22}$$

где μ и M_n имеют то же значение, что и в теореме 8.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\| e_i \| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{g_i\}_1^n$ — естественный базис в c^n. Определим изоморфизм T c^n на E^n, полагая $Tg_i = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из (21) следует, что $\| T \| \leqslant M_n n^{\mu}$, $\| T^{-1} \| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2}$, откуда и получаем (22).

Из (1) и теоремы 9 вытекает

Теорема 10. *Если в n-мерном пространстве Минковского E^n существует базис с индексом $\gamma > 0$, то*

$$\lambda(E^n) \leqslant \frac{M_n (1 + \gamma)}{\gamma^2} n^{\mu},$$

где μ и M_n имеют то же значение, что и в теореме 8.

Отметим, что, как показал Б. Гринбаум [2], для любого n-мерного пространства Минковского E^n справедливо неравенство

$$\lambda(E^n) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Clarcson. Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol 40, № 3 (1936), pp. 396—414.
2. B. Grünbaum. Projection constants, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 451—465.
3. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (В). ДАН СССР, **31**, № 5, 428—432, 1941.
4. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Вид-во «Радянська школа», Київ, 1948.
5. В. И. Гурарий. О равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1, Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
6. В. И. Гурарий. О наклонах подпространств и условных базисах пространства Банаха. ДАН СССР, **145**, № 3, 504—506, 1962.
7. В. И. Гурарий. Некоторые геометрические вопросы теории базисов в линейных нормированных пространствах. Канд. дисс., Харьков, 1963.
8. M. M. Day. Some characterizations of innerproduct spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 320—337.