ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БАНАХА

В. И. Гурарий

В настоящей заметке рассматриваются изоморфные и проекционн свойства банаховых пространств (главным образом пространств c, c_0 и ($1 \leqslant p < \infty$)) с количественной точки зрения. Некоторые из получаем при этом результатов применяются к решению одной задачи Банаха изоморфизмах пространств c и c_0 [1].

§ 1. О ДОПОЛНЯЕМОСТИ И ИЗОМОРФИЗМАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть P и Q — подпространства банахова пространства E. Q наз вается прямым дополнением к P в E, если $P \dotplus Q = E$. Подпространств P называется дополняемым в E, если оно имеет прямое дополнение в Как показал А. Пелчинский [2], если E есть одно из пространств c_0 l_p ($1 \leqslant p < \infty$) и P — бесконечномерное дополняемое подпространство в то P изоморфно E^*. Основной целью настоящего параграфа являет установление соотношений между величинами, характеризующими указа ные дополняемость и изоморфизм. При этом в значительной части м пользуемся выкладками и результатами работы [2], дополняя их нужны нам оценками.

Условимся расположение подпространства P по отношению к по пространству Q характеризовать величиной

$$(\widehat{P, Q}) = \inf_{x \in P, y \in Q, \|x\|=1} \|x + y\|.$$

Очевидно, если $P_1 \supset P_2$, то $(\widehat{P_1, Q}) \leqslant (\widehat{P_2, Q})$. (1)

Имеет место следующий критерий (см., например, [3]): если $P \dotplus Q$ плотен в E, то для того, чтобы Q было прямым дополнением к P в E, необходимо и достаточно, чтобы $(\widehat{P, Q}) > 0$. Нетрудно показать, что

$$(\widehat{P, Q}) = \frac{1}{\|A\|}, \qquad (2)$$

где A — оператор проектирования из $P \dotplus Q$ на P параллельно Q (см., например, [4]). Поэтому характеристикой дополняемости подпространства P в пространстве E может служить величина

$$\lambda(P, E) = \inf_A \|A\|,$$

* Мы пользуемся общепринятой терминологией и обозначениями (см., например, [1]).

где нижняя грань берется по всем проекторам A из E на P ($\lambda(P, E)$ называется проекционной постоянной P в E). «Степень изоморфности» пространств X и Y мы будем характеризовать величиной

$$d(X, Y) = \inf_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\|,$$

где нижняя грань берется по всем изоморфизмам T X на Y (величина $\ln d(X, Y)$ была введена Банахом и Мазуром, см., например, [1]). Легко видеть, что имеет место мультипликативное неравенство треугольника

$$d(X, Z) \leqslant d(X, Y)\, d(Y, Z).$$

Мы будем рассматривать c — произведение $X \oplus_c Y$ и l — произведение $X \oplus_l Y$ пространств X и Y, определяемое как множество пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ с естественно определенными алгебраическими операциями и нормой $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, соответственно $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$*.

Установим ряд предложений, относящихся к введенным величинам.

Предложение 1. Если для подпространств P и Q банахова пространства $(\widehat{P, Q}) = \alpha > 0$, $(\widehat{Q, P}) = \beta > 0$, то

$$d(P \dotplus Q, P \oplus_c Q) \leqslant \max\left\{\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}\right\} \leqslant \frac{2(1+\alpha)}{\alpha},$$

$$d(P \dotplus Q, P \oplus_l Q) \leqslant \max\left\{\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}\right\} \leqslant \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Доказательство. Определим изоморфизм T $P \dotplus Q$ на $P \oplus_c Q$, полагая для $x \in P$, $y \in Q$:

$$T(x + y) = (x, y), \quad (x, y) \in P \oplus_c Q.$$

Нормы в пространствах $P \dotplus Q$ и $P \oplus Q$ обозначим соответственно $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$. Имеем

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2\max\{\|x\|, \|y\|\} = 2\|(x, y)\|'.$$

Таким образом, $\|T\| \leqslant 2$. Пусть $\|x\| \geqslant \|y\|$. Тогда $\|x + y\| \geqslant \alpha\|x\|$, $\|(x, y)\|' = \max\{\|x\|, \|y\|\} = \|x\|$, откуда

$$\|x + y\| \geqslant \alpha\|(x, y)\|'.$$

Если же $\|x\| \leqslant \|y\|$, то таким же образом получаем

$$\|x + y\| \geqslant \beta\|(x, y)\|'$$

и в обоих случаях имеем

$$\|T^{-1}\| \leqslant \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\},$$

$$d(P \dotplus Q, P \oplus_c Q) \leqslant \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant \max\left\{\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}\right\},$$

но так как $(\widehat{Q, P}) \geqslant \dfrac{(\widehat{P, Q})}{1 + (\widehat{P, Q})}$ (это легко показать, см., например, [5]), то

$$\max\left\{\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}\right\} \leqslant \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Второе неравенство устанавливается аналогично.

Предложение 1 доказано.

---

* Аналогичным образом можно определить l_p — произведение $(1 \leqslant p < \infty)$: $X \oplus_p Y$. Устанавливаемые в дальнейшем утверждения относительно c и l — произведения пространств остаются справедливыми и для l_p — произведения этих пространств.

Предложение 2. Для банаховых пространств P, Q, R

$$d(P\oplus_c Q, P\oplus_c R)\leqslant d(Q,R),$$
$$d(P\oplus_l Q, P\oplus_l R)\leqslant d(Q,R).$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon>0$ пусть T есть изоморфизм Q на R такой, что $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant d(Q,R)+\varepsilon$. Определим изоморфизм $\tilde T$ $P\oplus_c Q$ на $P\oplus_c R$ формулой $\tilde T(x,y)=(x,Ty)$. Имеем для любого $(x,y)\in P\oplus_c Q$:

$$\|\tilde T(x,y)\|=\|(x,Ty)\|=\max\{\|x\|,\|Ty\|\}\leqslant\max\{\|x\|,\|T\|\cdot\|y\|\}\leqslant \leqslant\|T\|\cdot\|(x,y)\|$$

и, следовательно, $\|\tilde T\|\leqslant\|T\|$; таким же образом устанавливаем, что $\|\tilde T^{-1}\|\leqslant\|T^{-1}\|$; поэтому

$$d(P\oplus_c Q, P\oplus_c R)\leqslant\|\tilde T\|\cdot\|\tilde T^{-1}\|\leqslant\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant d(Q,R)+\varepsilon,$$

что в силу произвольности ε доказывает первое неравенство; второе неравенство доказывается аналогично.

В дальнейшем, если $d(X,Y)\leqslant a$, то условимся писать $X\overset{a}{\hookrightarrow}Y$.

Предложение 3. Пусть E есть одно из пространств c_0, m, l_p $(1\leqslant p<\infty)$. Тогда

1. $(E\oplus E\oplus\ldots)_E\overset{1}{\hookrightarrow}E$*.
2. Для банаховых пространств X и Y

$$((X\oplus_c Y)\oplus(X\oplus_c Y)\oplus\ldots)_E\overset{2}{\hookrightarrow}(X\oplus X\oplus\ldots)_E\oplus_c(Y\oplus Y\oplus\ldots)_E{}^{**}.$$

3. Если для банаховых пространств X и Y $d(X,Y)\leqslant k$, то

$$(X\oplus X\oplus\ldots)_E\overset{k}{\hookrightarrow}(Y\oplus Y\oplus\ldots)_E.$$

Доказательство этого предложения фактически дано в [2] (стр. 212, предложение 3), где указаны соответствующие изоморфизмы. Оценки норм этих изоморфизмов не вызывают затруднений.

Предложение 4. Пусть E есть одно из пространств c_0, $l_p(1\leqslant p<\infty)$, U — его подпространство с базисом $\{u^{(k)}\}_1^\infty$ вида

$$u^{(k)}=\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n_{k-1}\text{ раз}},u_{n_{k-1}+1},\ u_{n_{k-1}+2}\ldots,\ u_{n_k}0,0\ldots\},\ k=1,2,\ldots\ n_0=0,$$

где $\{n_k\}_1^\infty$ — возрастающая натуральная последовательность. Тогда U изометрично E и имеет в E прямое дополнение Q такое, что $(\widehat{U,Q})=1$.

Доказательство. Легко видеть, что линейное продолжение соответствия $u^{(k)}\to e_k$, $k=1,2,\ldots$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — естественный базис в E, дает изометрию U на E. Пусть $E^{(k)}$ есть (n_k-n_{k-1}) — мерное подпространство в E, состоящее из всех элементов вида $\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n_{k-1}\text{ раз}},x_{n_{k-1}+1},\ldots,x_{n_k}0,0,\ldots\}$, $U^{(k)}$ — одномерное подпространство в $E^{(k)}$, порожденное элементом $u^{(k)}$. Так как $\dim U^{(k)}=1$, то на основании теоремы Хана—Банаха $U^{(k)}$ имеет прямое дополнение $Q^{(k)}$ в $E^{(k)}$, такое, что $(\widehat{U^{(k)},Q^{(k)}})=1, k=1,2,\ldots$. Очевидно, $U^{(1)}\dot{+}U^{(2)}\dot{+}\ldots=U$; обозначим $Q^{(1)}\dot{+}Q^{(2)}\dot{+}\ldots=Q$. Легко видеть, что $(\widehat{U,Q})=1$. Кроме того, $U\dot{+}Q$ плотно в E (так как $E^{(1)}\dot{+}E^{(2)}\dot{+}$

* Определение произведения $(E_1\oplus E_2\oplus\ldots)_E$ см., например, в [1].

** Очевидно, если $E=l_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, то $((X\oplus_p Y)\oplus(X\oplus_p Y)\oplus\ldots)_E\overset{1}{\hookrightarrow}\overset{1}{\hookrightarrow}(X\oplus X\oplus)_E\oplus_p(Y\oplus Y\oplus\ldots)_E$.

$\dot{+}\ldots\subset U\dot{+}Q$, и очевидно, $E^{(1)}\dot{+}E^{(2)}\dot{+}\ldots$ плотно в E). Поэтому Q — прямое дополнение к U в E.

Предложение 5. Пусть Q есть прямое дополнение к P в E, $(\widehat{P,Q})\geqslant\beta>0$, и пусть R — подпространство в E, такое что $\theta(P,R)<\gamma<\frac{\beta}{1+\beta}$, где $\theta(P,R)$ — раствор подпространств P и R. Тогда Q есть прямое дополнение к R в E, причем

$$(\widehat{R,Q})>\beta-\gamma-\beta\gamma.$$

Доказательство. Пусть $r\in R$, $q\in Q$, $\|r\|=1$; очевидно, существует $p\in P$ такое, что $\|r-p\|<\gamma$; тогда $\|p\|>1-\gamma$. Имеем

$$\|r+q\|=\|(r-p)+(p+q)\|>\|p+q\|-\gamma\geqslant\beta\|p\|-\gamma>$$
$$>\beta(1-\gamma)-\gamma=\beta-\gamma-\beta\gamma.$$

Это означает, что $(\widehat{R,Q})>\beta-\gamma-\beta\gamma$.

Покажем, что $R\dot{+}Q$ плотно в E. Предположим противное, тогда в силу того, что $\gamma<\beta$ найдется $z\in E$, $\|z\|=1$ такой, что

$$\rho(z,R\dot{+}Q)>\frac{\gamma}{\beta}. \tag{3}$$

Имеем $z=p+q$, где $p\in P$, $q\in Q$; $\|p\|\leqslant\frac{1}{\beta}$; далее, так как $\theta(P,R)<\gamma$, то при некоторых $r\in R$ и h, $p=r+h$, имеем

$$\|h\|=\|p-r\|\leqslant\gamma\|p\|\leqslant\frac{\gamma}{\beta}.$$

Так как $z=r+q+h$ и $r+q\in P\dot{+}Q$, то $\rho(z,R\dot{+}Q)\leqslant\|h\|\leqslant\frac{\gamma}{\beta}$, что противоречит (3). Таким образом, $R\dot{+}Q$ плотно в E; $(\widehat{R,Q})>\beta-\gamma-\beta\gamma$ и так как $\gamma<\frac{\beta}{1+\beta}$, то последняя величина положительна. Следовательно, Q есть прямое дополнение к R в E.

Предложение 6. Пусть P, Q, S — подпространства в E такие, что

$$(\widehat{P,Q})\geqslant\alpha>0,\quad\theta(Q,S)<\delta,$$

тогда

$$(\widehat{P,S})>\frac{\alpha-\delta}{\delta+1}.$$

Доказательство. Пусть $x\in P$, $y\in S$, $\|x\|=1$. Оценивая $\|x+y\|$, рассмотрим два случая:

1. $\|y\|\leqslant a$ ($a>0$ выберем позже). Так как $\theta(Q,S)<\delta$, то найдется $z\in Q$, такое, что $\|y-z\|<a\delta$. Имеем $\|x+y\|=\|(x+z)-(z-y)\|\geqslant\geqslant\|x+z\|-\|z-y\|>\alpha-a\delta$.

2. $\|y\|>a$. Тогда $\|x+y\|>a-1$. Выбирая a как корень уравнения $\alpha-a\delta=a-1$, в обоих случаях получаем $\|x+y\|>\frac{\alpha-\delta}{\delta+1}$, что и доказывает предложение 6.

Из предложений 5—6 вытекает следующее.

Предложение 7. Пусть P, Q, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ — подпространства в E такие, что

$$(\widehat{P,Q})\geqslant\beta>0,\quad\theta(\tilde{P},P)<\gamma,\quad\theta(\tilde{Q},Q)<\gamma.$$

Тогда

$$(\widehat{\tilde{P}, \tilde{Q}}) > \frac{\beta - \beta\gamma - 2\gamma}{\gamma + 1}.$$

Теорема 1. *Пусть E есть одно из пространств c_0, m, l_p $(1 \leqslant p < \infty$, X — дополняемое подпространство в E, Y — дополняемое в X подпр странство, изоморфное E. Тогда X изоморфно E, причем*

$$d(X, E) \leqslant 2^7 d^2(Y, E)[\lambda(X, E) + 1]^3 [\lambda(Y, X) + 1]^2.$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ X имеет прямое дополнени X_1 в E и Y имеет прямое дополнение Y_1 в X, такие, что

$$(\widehat{X, X_1}) > \frac{1}{\lambda(X, E) + \varepsilon}, \quad (\widehat{Y, Y_1}) > \frac{1}{\lambda(Y, X) + \varepsilon}.$$

На основании предложения 1 имеем

$$d(E, X \oplus_c X_1) = d(X \dot{+} X_1, X \oplus_c X_1) \leqslant 2[\lambda(X, E) + 1 + \varepsilon].$$

Таким же образом

$$d(X, Y \oplus_c Y_1) = d(Y \dot{+} Y_1, Y \oplus_c Y_1) \leqslant 2[\lambda(Y, X) + 1 + \varepsilon].$$

Обозначая $2[\lambda(X, E) + 1 + \varepsilon] = a$, $2[\lambda(Y, X) + 1 + \varepsilon] = b$, $d(E, Y) = c$ применяя предложения 2—3 и учитывая, что операция произведени пространств ассоциативна, имеем: *

$$E \overset{a}{\hookrightarrow} X \oplus_c X_1 \overset{b}{\hookrightarrow} (Y \oplus_c Y_1) \oplus_c X_1 \overset{c}{\hookrightarrow} (E \oplus_c Y_1) \oplus_c X_1 \overset{1}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{1}{\hookrightarrow} E \oplus_c (Y_1 \oplus_c X_1) \overset{1}{\hookrightarrow} (E \oplus E \oplus \ldots)_E \oplus_c (Y_1 \oplus_c X_1) \overset{a}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{a}{\hookrightarrow} ((X \oplus_c X_1) \oplus (X \oplus_c X_1) \oplus \ldots)_E \oplus_c (Y_1 \oplus_c X_1) \overset{2}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{2}{\hookrightarrow} ((X \oplus X \oplus \ldots)_E \oplus_c (X_1 \oplus X_1 \oplus \ldots)_E) \oplus_c (X_1 \oplus_c Y_1) \overset{1}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{1}{\hookrightarrow} ((X \oplus X \oplus \ldots)_E \oplus_c (X_1 \oplus X_1 \oplus \ldots)_E) \oplus_c Y_1 \overset{2}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{2}{\hookrightarrow} ((X \oplus_c X_1) \oplus (X \oplus_c X_1) \oplus \ldots)_E \oplus_c Y_1 \overset{a}{\hookrightarrow} (E \oplus E \oplus \ldots)_E \oplus_c Y_1 \overset{1}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{1}{\hookrightarrow} E \oplus_c Y_1 \overset{c}{\hookrightarrow} Y \oplus_c Y_1 \overset{b}{\hookrightarrow} X.$$

Отсюда, применяя неравенство треугольника, получаем

$$d(E, X) \leqslant 4a^3 b^2 c^2 = 2^7 d^2(E, Y)[\lambda(X, E) + 1 + \varepsilon]^3 [\lambda(Y, X) + 1 + \varepsilon]^2$$

и, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, окончим доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть E есть одно из пространств $c_0 l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, P — бесконечномерное подпространство в E. Для данного $\varepsilon > 0$ найдется подпространство X в P, такое, что*

$$d(X, E) < 1 + \varepsilon,$$
$$\lambda(X, E) < 1 + \varepsilon.$$

Доказательство**. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — естественный базис в E. Так как для любого $x = \{x_i\}_1^{\infty} \in E$ $\lim\limits_{i \to \infty} \| \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{i \text{ раз}}, x_{i+1}, \ldots \| = 0$, то най-

* В проводимой выкладке мы считаем, что E — одно из пространств c_0, m. Если $E = l_p (1 \leqslant p < \infty)$, то достаточно вместо c-произведения рассматривать l_p-произведение соответствующих пространств.

** Фактически эта теорема получена в [2]. Мы приводим доказательство для полноты изложения.

дется натуральное n_1 и элемент $x^{(1)} = u^{(1)} + v^{(1)} \in P$, где $u^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, 0, 0, \ldots\}$, $v_1 = \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n_1 \text{ раз}}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots\}$ такой, что $\|u^{(1)}\| = 1$, $\|v^{(1)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6 \cdot 2^1}$. Так как $\dim P = \infty$, то найдется натуральное $n_2 > n_1$ и элемент $x^{(2)} = u^{(2)} + v^{(2)}$

$$u^{(2)} = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n_1 \text{ раз}}, x_{n_1+1}^{(2)}, x_{n_1+2}^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, 0, 0, \ldots\},$$

$$v^{(2)} = \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n_2 \text{ раз}}, x_{n_2+1}^{(2)}, x_{n_2+2}^{(2)}, \ldots\},$$

такие, что $\|u^{(2)}\| = 1$, $\|v^{(2)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6 \cdot 2^2}$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим существование возрастающей натуральной последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$ и последовательности $\{x^{(k)}\}_1^\infty$, $x^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)} \in P$, $\|u^{(k)}\| = 1$, $\|v^{(k)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6 \cdot 2^k}$

$$u^{(k)} = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n_{k-1} \text{ раз}}, x_{n_{k-1}+1}^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}, 0, 0, \ldots\},$$

$$v^{(k)} = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n_k \text{ раз}}, x_{n_k+1}^{(k)}, x_{n_k+2}^{(k)}, \ldots\}.$$

Подпространства, натянутые на $\{x^{(k)}\}_1^\infty$ и $\{u^{(k)}\}_1^\infty$, обозначим соответственно через X и U. Соответствие $u^{(k)} \to e^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ линейно продолжается как изометрия U на E и, таким образом, $d(U, E) = 1$. Так как расстояние элемента $u^{(k)}$ до линейной оболочки остальных элементов последовательности $\{u^{(k)}\}_1^\infty$ равно единице и $\|x^{(k)} - u^{(k)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6 \cdot 2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, то, как показано при доказательстве теоремы 3 в [6], соответствие $u^{(k)} \to x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ линейно продолжается как изоморфизм T U на X, причем $\|T\| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{6}$, $\|T^{-1}\| \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right)^{-1}$ и таким образом,

$$d(X, E) = d(X, U) \leqslant \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{6}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right)^{-1} < 1 + \varepsilon.$$

Кроме того, как показано там же, для $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$, $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^k$

$$\|x - u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \|x\|.$$

Отсюда легко следует, что $\|u\| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right) \|x\|$, и таким образом,

$$\|x - u\| \leqslant \frac{\frac{\varepsilon}{6}}{1 - \frac{\varepsilon}{6}} \|u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|u\|.$$

Это означает, что $\theta(X, U) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ и так как на основании предложения 4 существует прямое дополнение Q к U в E такое, что $(\widehat{U, Q}) = 1$,

то, применяя предложение 5, заключаем, что Q есть прямое дополнен
к X в E, причем $(\widehat{X, Q}) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. По (2) это означает, что

$$\lambda(X, E) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} < 1 + \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если E есть одно из пространств c_0 l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, то всякое бесконечномерное подпространство X, дополняемое в E, изоморфно E, причем*

$$d(E, X) \leqslant 2^9 [\lambda(X, E) + 1]^3 \qquad (4)$$

Доказательство. На основании теоремы 2 для данного $\varepsilon > 0$ в X найдется бесконечномерное подпространство Y такое, что

$$d(Y, E) < 1 + \varepsilon, \quad \lambda(Y, E) < 1 + \varepsilon,$$

и так как, очевидно,

$$\lambda(Y, X) \leqslant \lambda(Y, E),$$

то, применяя теорему 1, имеем

$$d(E, X) \leqslant 2^7 (1 + \varepsilon)^2 [\lambda(X, E) + 1]^3 (2 + \varepsilon)^2.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (4).

Теорема 3 доказана.

Нам представляются интересными следующие вопросы.

1. Пусть P — бесконечномерное подпространство в E, где $E = c_0$ или $E = l_p (1 \leqslant p < \infty)$ и $\lambda(P, E) = 1$. Можно ли утверждать, что $r(P, E) = 1$?

2. Пусть P есть n-мерное подпространство в $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ и $\lambda(P, l_p) = 1$. Можно ли утверждать, что P изометрично пространству $l_{p, n}$*?

§ 2. О ПРОДОЛЖЕНИИ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПРОЕКТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматриваемые в этом параграфе вопросы относятся к расширениям проектирующих операторов с «почти сохранением нормы», т. е. к возможности для данного $\varepsilon > 0$ найти расширение оператора с повышением нормы не более чем на ε. При этом наиболее полный результат удается получить для пространств c_0 и $l_p (1 \leqslant p < \infty)$.

Теорема 4. *Пусть P и Q — подпространства бесконечномерного банахова пространства E, $\dim P < \infty$. Для данного $\varepsilon > 0$ существует подпространство Q_ε конечной коразмерности в E* такое, что *$Q_\varepsilon \supset Q$ и*

$$(\widehat{P, Q_\varepsilon}) > (\widehat{P, Q}) - \varepsilon.$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ найдется $n = n(\varepsilon)$ элементов $\{x_i\}_1^n$, $x_i \in P$, $\|x_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образующих ε-сеть на единичной сфере в P. Определим функционалы f_i над множеством элементов вида $\alpha x_i + y$, $y \in Q$, полагая $f_i(\alpha x_i + y) = \alpha$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что

$$\|f_i\| = \frac{1}{\rho(x_i, Q)} \leqslant \frac{1}{(\widehat{P, Q})}.$$

* $l_{p, n}$ — пространство совокупностей из n вещественных чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ с естественно определенными алгебраическими операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^n\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p}$.

Обозначим через $\tilde{f}_i$ продолжение f_i на все E с сохранением нормы. Пусть $\tilde{Q}_i$ — множество элементов $x \in E$, для которых $\tilde{f}_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и пусть $\tilde{Q} = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i$. Так как $\tilde{Q}_i$ — это подпространство коразмерности 1 в E, то коразмерность $\tilde{Q}$ в E не превышает n. Так как $\tilde{Q}_i \supset Q$ $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\tilde{Q} \supset Q$. Пусть $\hat{f}_i$ — сужение $\tilde{f}_i$ на элементы вида $\alpha x_i + z$, $z \in Q$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, $\|\hat{f}_i\| = \|\tilde{f}_i\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Имеем

$$\rho(x_i, \tilde{Q}) = \frac{1}{\|\hat{f}_i\|} = \frac{1}{\|\tilde{f}_i\|} \geqslant (\widehat{P, Q})$$

и, следовательно, для любого элемента $x \in P$, $\|x\| = 1$:

$$\rho(x, \tilde{Q}) > (\widehat{P, Q}) - \varepsilon,$$

что и доказывает теорему 4.

Из теоремы 4 и (2) вытекает следующая теорема о возможности расширения области определения проектирующего оператора с почти сохранением нормы.

Теорема 4′. *Пусть E — бесконечномерное банахово пространство и A — оператор проектирования из подпространства $R \subset E$ на подпространство $P \subset R$ $\dim P < \infty$. Для данного $\varepsilon > 0$ существует оператор проектирования A_ε из подпространства $R_\varepsilon \supset R$ на P, где R_ε имеет конечную коразмерность в E, такой, что A_ε совпадает с A на R и*

$$\|A_\varepsilon\| < \|A\| + \varepsilon.$$

Что касается расширения области значений проектирующего оператора, то, как будет показано в следующем параграфе, утверждение, аналогичное теореме 4 (теореме 4′), в общем случае не имеет места даже при самых жестких ограничениях на размерности подпространств. Тем не менее справедлива

Теорема 5. *Пусть E есть одно из пространств c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, P и Q — конечномерные подпространства в E. Для данного $\varepsilon > 0$ существует подпространство P_ε конечной коразмерности в E такое, что $P_\varepsilon \supset P$ и*

$$(\widehat{P_\varepsilon, Q}) > (\widehat{P, Q}) - \varepsilon.$$

Доказательство. Можно считать, что $(\widehat{P, Q}) = a > 0$ (иначе утверждение теоремы очевидно). Мы рассмотрим случай $E = l_p$ (случай $E = c_0$ рассматривается аналогично). Так как единичный шар в $P \dotplus Q$ — есть компакт, то для данного $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $n = n(\varepsilon_1)$, что для любого $x = \{x_k\}_1^\infty \in P \dotplus Q$

$$\|\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ раз}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}\| \leqslant \varepsilon_1 \|x\|.$$

Введем обозначения: P_1 — множество всех элементов, получающихся из элементов P заменой всех координат, начиная с $(n+1)$-й, нулями; P_2 — множество всех элементов, получающихся из элементов P заменой первых n координат нулями. Аналогично определим Q_1 и Q_2, отправляясь от подпространства Q. Пусть $\tilde{P}$ — множество всех элементов из E вида

$$\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ раз}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\theta(P \dotplus \widetilde{P}, P_1 \dotplus \widetilde{P}) < \varepsilon_1,$$
$$\theta(Q_1, Q) < \varepsilon_1, \quad \theta(P_1, P) < \varepsilon_1.$$

На основании предложения 7 имеем

$$(\widehat{P_1, Q_1}) > \frac{a - a\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}.$$

Обозначим $(\widehat{P_1, Q_1}) = a_1$. Покажем, что

$$(\widehat{P_1 \dotplus \widetilde{P}, Q_1}) \geqslant (\widehat{P_1, Q_1}). \tag{7}$$

Действительно, пусть

$$x = \{x_1, \ \ldots \ , x_n, 0, 0, \ \ldots\} \in P_1, \quad y = \{0, 0, \ \ldots \ , 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ \ldots\} \in \widetilde{P},$$
$$z = x + y = \{x_1, \ \ldots \ , x_n, x_{n+1}, \ \ldots\},$$
$$u = \{u_1, \ \ldots \ , u_n, 0, 0, \ \ldots\} \in Q_1.$$

Имеем

$$\| x + y \| \geqslant a_1 \| x \|.$$

Поэтому

$$\| z + u \| = \| (x + u) + y \| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} | x_i + u_i |^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} | y_i |^p} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[p]{a_1^p \sum_{i=1}^{n} | x_i |^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} | y_i |^p} \geqslant a_1 \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} | y_i |^p} =$$
$$= a_1 \| x + y \| = a_1 \| z \|,$$

что и доказывает (7). Далее, учитывая (5), (7) и применяя предложение 7, имеем

$$(\widehat{P \dotplus \widetilde{P}, Q}) > \frac{a_1 - a_1\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}. \tag{8}$$

Так как при $\varepsilon_1 \to 0$ правая часть (8) стремится к a_1, а правая часть (6) стремится к a, то, выбирая с самого начала для данного $\varepsilon > 0$ ε_1 достаточно малым и обозначая $P \dotplus \widetilde{P} = P_\varepsilon$, получим, что

$$(\widehat{P_\varepsilon, Q}) > a - \varepsilon.$$

Кроме того, очевидно, P_ε имеет конечную коразмерность в E и $P_\varepsilon \supset P$. Теорема 5 доказана.

На основании (2) теорему 5 можно переформулировать в виде следующего утверждения возможности расширения области значений проектирующего оператора с почти сохранением нормы.

Теорема 5'. *Пусть E — одно из пространств c_0, $l_p (1 \leqslant p < \infty)$, A — оператор проектирования из подпространства $R \subset E$ на подпространство $P \subset R$ конечной коразмерности в E. Для данного $\varepsilon > 0$ существуют подпространства $P_\varepsilon \supset P$ и R_ε, $R_\varepsilon \supset P_\varepsilon$, $R_\varepsilon \supset R$, P_ε имеет конечную коразмерность в E, и оператор проектирования A_ε из R_ε на P_ε такие, что*

1. *A_ε совпадает с A на R;*
2. $\| A_\varepsilon \| < \| A \| + \varepsilon.$

В связи с теоремой 5 введем следующие величины:

$$\psi(P, Q, E) = \sup_{R \supset P} \frac{(\widehat{R, Q})}{(\widehat{P, Q})},$$

где P и Q данные подпространства в банаховом пространстве E, а $R \supset P$ пробегает всевозможные подпространства конечной коразмерности в E,

$$\psi(E) = \inf_{P, Q} \psi(P, Q, E),$$

где P и Q пробегают всевозможные конечномерные подпространства в E.

Теорема 5 означает, что $\psi(c_0) = 1$ и $\psi(l_p) = 1$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Нетрудно видеть, что если E_1 — бесконечномерное подпространство в E, то $\psi(E_1) \geqslant \psi(E)$ и так как $\psi(E) \leqslant 1$, то справедлива следующая

Теорема 6. *Если P есть бесконечномерное подпространство пространства c_0, или пространства l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, то $\psi(P) = 1$.*

Теорема 7. *Если для бесконечномерного банахова пространства E $\psi(E) = 1$, то в E есть бесконечномерное подпространство с безусловным базисом.*

Доказательство. Пусть $0 < \gamma < 1$ и $\{e_i\}_{i=1}^n$ — совокупность элементов в E, обладающая следующим свойством: для любой выборки попарно различных индексов

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, r_1, r_2, \ldots, r_m$$

из чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет место соотношение

$$(\widehat{P_{k_1, k_2, \ldots, k_l} P_{r_1, r_2, \ldots, r_m}}) > \gamma, \tag{9}$$

где через $P_{s_1, s_2, \ldots, s_j}$ обозначена линейная оболочка над элементами $e_{s_1}, e_{s_2}, \ldots, e_{s_j}$.

Для каждой такой выборки рассмотрим подпространство $\widetilde{P}_{k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m}$ конечной коразмерности в E, такое, что $\widetilde{P}_{k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m} \supset P_{k_1, \ldots, k_l}$ и

$$(\widehat{\widetilde{P}_{k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m}, \widetilde{P}_{r_1, \ldots, r_m}}) > \gamma \tag{10}$$

(существование таких подпространств $\widetilde{P}_{k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m}$ следует из того, что $\psi(E) = 1$). Тогда подпространство

$$\widetilde{P} = \bigcap \widetilde{P}_{k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m},$$

где пересечение берется по всем указанным выборкам $k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m$, имеет также конечную коразмерность в E. Рассмотрим какой-либо элемент $e_{n+1} \in \widetilde{P}$ и присоединим его к $\{e_i\}_{i=1}^n$. В силу (10) и (1) для новой совокупности $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ также имеет место соотношение (9) при любой выборке попарно различных индексов $k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m$ из чисел $1, 2, \ldots, n+1$. Очевидно, для любого γ $(0 < \gamma < 1)$ в E найдется пара элементов e_1, e_2, для которой (9) имеет место. Поэтому описанным индуктивным путем мы получим последовательность $\{e_i\}_1^\infty$, для которой справедливо (9) при любой конечной выборке попарно различных чисел $k_1, \ldots, k_l, r_1, \ldots, r_m$. Но тогда последовательность $\{e_i\}_1^\infty$ является безусловным базисом в замыкании своей линейной оболочки [7].

Теорема 7 доказана.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БАНАХА ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ c и c_0

Два банаховых пространства E_1 и E_2 называются почти изометри-ными, если $d(E_1, E_2) = 1$ [1]. Известны примеры двух почти изометричны но неизометричных банаховых пространств *. Банах в примечаниях к свое книге [1] обратил внимание на задачу: показать, что пространства c и (которые не являются изометричными) не являются и почти изометри-ными. Ниже будет показано, что c не почти изометрично как простра-ству c_0, так и любому его подпространству. Этот вывод мы получа с помощью следующей теоремы, показывающей, что в c область значен некоторых проектирующих операторов нельзя расширить даже на одн-мерное подпространство без существенного повышения нормы.

Теорема 8. *В пространстве c существуют одномерные подпростра-ства P и Q такие, что $\widehat{(P, Q)} = 1$ и для любого подпространства $\tilde{P} \supset$ $\widehat{(\tilde{P}, Q)} \leqslant \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Пусть P и Q — одномерные подпространст в c, порожденные соответственно векторами $x = \{1, 1, \ldots\}$, $y = \{0, 1, \ldots\}$, $\tilde{P}$ — подпространство в c, содержащее P. Очевидно, $\widehat{(P, Q)} = 1$. Так как $\dim \tilde{P} \geqslant 2$, то найдется $z \in \tilde{P}$, $\|z\| = 1$ вида $z = \{0, z_2, z_3, \ldots\}$. При этом можно считать (умножая в случае надобности z на $e^{i\alpha}$ при со-ответственно выбранном α), что либо для некоторого k_0 $z_{k_0} = 1$, либо $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = 1$. Тогда, как нетрудно видеть, для вектора $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ будет иметь: $\|u\| = 1$. Так как

$$u_k - \frac{1}{2}y_k = u_k - \frac{1}{2}x_k = \frac{1}{2}z_k, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

то $\left|u_k - \frac{1}{2}y_k\right| \leqslant \frac{1}{2}\|z\| = \frac{1}{2}$, $k = 2, 3, \ldots$ и в силу того, что $u_1 - \frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2}$, имеем

$$\left\|u - \frac{1}{2}y\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Так как $u \in \tilde{P}$, $\|u\| = 1$, $y \in Q$, то последнее неравенство означает, что $\widehat{(\tilde{P}, Q)} \leqslant \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Частным случаем теоремы 8 является следующая

Теорема 9. $\psi(c) \leqslant \frac{1}{2}$.

Очевидна следующая

Лемма. *Для любых банаховых пространств E_1 и E_2*

$$\frac{\psi(E_1)}{\psi(E_2)} \leqslant d(E_1, E_2).$$

Из этой леммы и теорем 6 и 9 вытекает

Теорема 10. *Если E — пространство c_0 или какое-либо его подпро-странство, то*

$$d(c, E) \geqslant 2.$$

* Два различных примера таких пространств сообщили автору А. Л. Пелчинский и М. И. Кадец.

Очевидно, теорема 10, в частности, дает решение вышеуказанной задачи Банаха.

Автор благодарен М. И. Кадецу и В. Д. Мильману за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Вид-во «Радянська школа», Київ, 1948.

2. A. Pełczyński. Projections in certain Banach spaces, Studia Math. XIX, 209—228 (1960).

3. М. М. Гринблюм. О представлении пространства типа (*B*) в виде прямой суммы подпространств. ДАН СССР, 70, 747—752, 1950.

4. В. И. Гурарий. О некоторых геометрических характеристиках подпространств и базисов в банаховых пространствах. Colloquium Math., XIII, 59—63, 1965.

5. В. И. Гурарий. О наклонах и растворах подпространств банахова пространства. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. I. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.

6. В. И. Гурарий и М. И. Кадец. О минимальных системах и квазидополнениях в пространстве Банаха. ДАН СССР, **145**, № 2, 256—258, 1962.

7. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (*B*). ДАН СССР, **31**, № 5, 428—432, 1941.