ОБ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. Д. Головин

В статье [1] Ж. Дьедонне и Л. Шварц исследовали класс (LF) локально выпуклых топологических векторных пространств E, каждое из которых есть объединение последовательности пространств Фреше $E_1 \subset \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ (вложения топологические) и наделено сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны канонические отображения $E_n \to E$; в заключении упомянутой статьи подчеркнута желательность изучения более общей ситуации. Одно из свойств пространств (LF) состоит в следующем: при каждом $n = 1, 2, \ldots$ топология пространства E_n совпадает с индуцируемой из E. Долгое время оставался открытым вопрос (см. [2, 3]), верно ли это при более общих предположениях, когда вместо последовательности E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ рассматривается возрастающее фильтрующееся семейство пространств; отрицательный ответ дал лишь сравнительно недавно Ю. Кемура [4]. Ниже изучаются некоторые случаи положительного решения; попутно получены условия, достаточные для того, чтобы то или иное пространство было индуктивным пределом заданного семейства пространств. Для определенности всюду предполагается, что рассматриваемые векторные пространства имеют телом скаляров поле $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел.

1. Канонические мономорфизмы. Прежде всего напомним определение индуктивного предела (ср. [5,6]). Пусть I — упорядоченное, фильтрующееся вправо множество (т. е. каждое конечное подмножество в I ограничено сверху). Говорят, что локально выпуклые пространства E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ и непрерывные линейные отображения $f_{\iota\varkappa} : E_\iota \to E_\varkappa$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ образуют *индуктивную* систему $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, если $f_{\iota\lambda} = f_{\varkappa\lambda} \circ f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda)$ и $f_{\iota\iota}$ при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — тождественное отображение. Фактор-множество E объединения множеств E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ по отношению эквивалентности «$f_{\iota\lambda}(x_\iota) = f_{\varkappa\lambda}(x_\varkappa)$ при некотором $\lambda \geqslant \iota, \varkappa$» называется *индуктивным пределом* системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, если E наделено двумя следующими структурами: (1) единственной в E структурой векторного пространства, для которой линейны канонические отображения $f_\iota : E_\iota \to E$ $(\iota \in \mathrm{I})$ и, следовательно, законы композиции определяются с помощью равенств $x + y = f_\iota(x_\iota + y_\iota)$, $\lambda x = f_\iota(\lambda x_\iota)$; (2) сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны канонические отображения f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$. Из этого определения следует, что $f_\iota = f_\varkappa \circ f_{\iota\varkappa}$ при любых $\iota \leqslant \varkappa$ и отображения f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ взаимно однозначны в том и только в том случае, когда взаимно однозначны отображения $f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa)$. Далее, фундаментальную систему окрестностей нуля в E образуют всевозможные поглощающие закругленные выпуклые множества $V \subset E$ такие, что $f_\iota^{-1}(V)$ при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ есть окрестность нуля в E_ι. Наконец, имеет место свойство универсальности отображений: для каждого локально выпуклого пространства F и непрерывных линейных отображений $g_\iota : E_\iota \to$

$\to F\,(\iota \in \mathrm{I})$, удовлетворяющих условиям $g_\iota = g_\varkappa \circ f_{\iota\varkappa}\,(\iota \leqslant \varkappa)$, существует, и п[...] том единственное, непрерывное линейное отображение $g: E \to F$, та[...] что $g_\iota = g^\circ f_\iota$ при каждом $\iota \in \mathrm{I}$.

Пусть $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ — индуктивная система и E — ее индуктивный пред[...] нас будут интересовать условия, при которых для каждого $\iota \in \mathrm{I}$ кано[...] ческое отображение $f_\iota : E_\iota \to E$ является *мономорфизмом*, т. е. изом[...] физмом E_ι на $f_\iota(E_\iota)$. Необходимое условие состоит в том, что все отоб[...] жения $f_{\iota\varkappa}\,(\iota \leqslant \varkappa)$ должны быть мономорфизмами; действительно, для люб[...] окрестности нуля V_ι в E_ι существует окрестность нуля V в E такая, ч[...] $V_\iota \supset f_\iota^{-1}(V)$, т. е. $V_\iota \supset f_{\iota\varkappa}^{-1}(V_\varkappa)\,(\varkappa \geqslant \iota)$, где $V_\varkappa = f_\varkappa^{-1}(V)$ — окрестность ну[...] в $E_\varkappa$. Можно показать (см. [4]), что это необходимое условие не являе[...] достаточным.

Предложение 1. *Пусть E — индуктивный предел системы* $(E_\iota, f[...]$ *Тогда канонические отображения* $f_\iota : E_\iota \to E\,(\iota \in \mathrm{I})$ *являются мономорф[...] мами, если отображения* $f_{\iota\varkappa}\,(\iota \leqslant \varkappa)$ *взаимно однозначны и при люб[...]* $\iota \leqslant \varkappa$ *для каждой закругленной выпуклой окрестности нуля* V_ι *в [...] и каждого множества* A *из* $E_\varkappa$, *удовлетворяющего условию* $V_\iota \supset f_{\iota\varkappa}^{-1}([...]$ *существует выпуклая окрестность нуля* $V_\varkappa$ *в* $E_\varkappa$ *такая, что* $V_\varkappa \supset[...]$ *и* $V_\iota \supset f_{\iota\varkappa}^{-1}(V_\varkappa)$.

Доказательство. Зафиксировав $\iota \in \mathrm{I}$ и закругленную выпукл[...] окрестность нуля U_ι в E_ι, покажем, что $U_\iota \supset f_\iota^{-1}(V)$, где V — некотор[...] окрестность нуля в E. Для этого обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всев[...] можных семейств $V_\varkappa\,(\varkappa \in \mathrm{K})$, где $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$, $\iota \in \mathrm{K}$ и является там наименьш[...] элементом, а $V_\varkappa$ при каждом $\varkappa \in \mathrm{K}$ — закругленная выпуклая окрестно[...] нуля в $E_\varkappa$, причем $U_\iota = f_{\iota\varkappa}^{-1}(V_\varkappa)\,(\varkappa \in \mathrm{K})$ и $f_{\varkappa\lambda}(V_\varkappa) \subset V_\lambda$ при любых $\varkappa \leqslant[...]$ Множество $\mathfrak{B}$ наделим следующим отношением порядка: семейство $(V_\varkappa)_{\varkappa[...]}$ мажорируется семейством $(W_\varkappa)_{\varkappa \in \mathrm{K}'}$, если $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}'$ и $W_\varkappa = V_\varkappa$ при кажд[...] $\varkappa \in \mathrm{K}$; другими словами, второе семейство является продолжением перво[...] на множество K'. Множество $\mathfrak{B}$ не пусто, ибо содержит одноэлементн[...] семейство $\{V_\iota\}$. Кроме того, $\mathfrak{B}$ индуктивно; по теореме Цорна оно обл[...] дает максимальным элементом $(V_\varkappa)_{\varkappa \in \Lambda}$. Покажем, что множество Λ ко[...] финально в I. Действительно, если это не так, то в I существует эл[...] мент μ, не мажорируемый никаким элементом из Λ и сам мажориру[...] щий ι. Тогда множество $A = \bigcup f_{\varkappa\mu}(V_\varkappa)$ (объединение берется по всем $\varkappa \in [...]$ которые меньше μ) обладает тем свойством, что $V_\iota = f_{\iota\mu}^{-1}(A)$, так ка[...] $f_{\iota\mu}^{-1}(f_{\varkappa\mu}(V_\varkappa)) = f_{\iota\varkappa}^{-1}(V_\varkappa)\,(\iota \leqslant \varkappa < \mu)$, следовательно, существует закругленна[...] выпуклая окрестность нуля V_μ в E_μ такая, что $f_{\varkappa\mu}(V_\varkappa) \subset V_\mu\,(\varkappa \in \Lambda, \varkappa < [...])$ и $V_\iota = f_{\iota\mu}^{-1}(V_\mu)$, т. е. семейство окрестностей $V_\varkappa\,(\varkappa \in \Lambda \cup \{\mu\})$ принадлежи[...] множеству $\mathfrak{B}$ и мажорирует семейство $(V_\varkappa)_{\varkappa \in \Lambda}$, что противоречит макси[...] мальности последнего; тем самым конфинальность множества Λ доказан[...] Положим теперь $V = \bigcup_{\varkappa \in \Lambda} f_\varkappa(V_\varkappa)$; тогда V — поглощающее закругленное вы[...] пуклое множество в E и $f_\varkappa^{-1}(V)$ при каждом $\varkappa \in \mathrm{I}$ есть окрестность нул[...] в $E_\varkappa$; следовательно, V — окрестность нуля в E, причем $U_\iota = f_\iota^{-1}(V)$.

2. **Вес и степень фильтруемости.** *Весом* топологического векторног[...] пространства E называется наименьшая из мощностей всевозможных фун[...] даментальных систем окрестностей нуля в E. Назовем *степенью фильт[...] руемости* упорядоченного, фильтрующегося вправо множества I (без наи[...] большего элемента) наименьшую из мощностей всевозможных не ограни[...] ченных сверху подмножеств в I. В частности, если I совершенно упоря[...] дочено, то его степень фильтруемости совпадает с наименьшей из мощ[...] ностей конфинальных подмножеств.

Лемма 1. *Пусть $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ — индуктивная система, F — топологическое векторное пространство и $f_\iota: E_\iota \to F$ $(\iota \in \mathrm{I})$ — гомоморфизмы. Если вес пространства F строго мажорируется степенью фильтруемости множества I и объединение образов $f_\iota(E_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$ совпадает с F, то фильтр окрестностей нуля в F есть пересечение фильтров с базисами $f_\iota(\mathfrak{B}_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$,* где $\mathfrak{B}_\iota$ *при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — фильтр окрестностей нуля в E_ι.*

Доказательство. В силу непрерывности отображений f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ фильтр окрестностей нуля в F мажорируется пересечением фильтров с базисами $f_\iota(V_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$. Достаточно поэтому доказать, что каждое объединение образов $f_\iota(V_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$, где V_ι — окрестность нуля в E_ι, является окрестностью нуля в F. Если это не так, то $U \not\supset V$ для некоторого $U = \bigcup f_\iota(V_\iota)$ и каждого V из фундаментальной системы $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля в F, мощность которой можно предположить равной весу пространства F. Тогда для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ существует $\iota = \iota(V) \in \mathrm{I}$ такое, что $U \not\supset V \cap f_\iota(E_\iota)$. По предположению существует $\varkappa \in \mathrm{I}$, для которого $\iota(V) \leqslant \varkappa$ $(V \in \mathfrak{B})$ и $U \not\supset V \cap f_\varkappa(E_\varkappa)$, откуда $f_\varkappa(V_\varkappa) \not\supset V \cap f_\varkappa(E_\varkappa)$, что невозможно, ибо $f_\varkappa$ — гомоморфизм.

Предложение 2. *Пусть E — индуктивный предел системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ и вес пространства E строго мажорируется степенью фильтруемости множества I. Тогда канонические отображения $f_\iota: E_\iota \to E$ $(\iota \in \mathrm{I})$ являются мономорфизмами в том и только в том случае, когда $f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ — мономорфизмы и фильтр окрестностей нуля в E есть пересечение фильтров с базисами $f_\iota(\mathfrak{B}_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$, где $\mathfrak{B}_\iota$ при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — фильтр окрестностей нуля в E_ι.*

Доказательство. Действительно, если f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ — мономорфизмы, то $f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ — мономорфизмы и по лемме 1 фильтр окрестностей нуля в E совпадает с пересечением фильтров с базисами $f_\iota(\mathfrak{B}_\iota)$ $(\iota \in \mathrm{I})$. Обратно, если условия предложения выполнены, то для каждого $\iota \in \mathrm{I}$ и каждой окрестности нуля V_ι в E_ι существует окрестность нуля V в E такая, что $V_\iota \supset f_\iota^{-1}(V)$; действительно, достаточно положить $V = \bigcup\limits_{\varkappa \geqslant \iota} f_\varkappa(V_\varkappa)$, выбрав предварительно при каждом $\varkappa \geqslant \iota$ окрестность нуля $V_\varkappa$ в $E_\varkappa$ так, чтобы $V_\iota \supset f_{\iota\varkappa}^{-1}(V_\varkappa)$.

Предложение 3. *Пусть E — локально выпуклое пространство, являющееся объединением фильтрующегося по включению семейства подпространств E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$, и $f_{\iota\varkappa}$ при $E_\iota \subset E_\varkappa$ — каноническое отображение $E_\iota \to E_\varkappa$. Тогда пространство E является индуктивным пределом системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, если его вес строго мажорируется степенью фильтруемости семейства (E_ι).*

Доказательство. Действительно, канонические отображения $f_\iota: E_\iota \to E$ $(\iota \in \mathrm{I})$ являются мономорфизмами и, следовательно, по лемме 1 объединения $\bigcup\limits_{\iota \in \mathrm{I}} V_\iota$, где V_ι при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — окрестность нуля в E_ι, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E. Тем самым доказано, что топология пространства E является сильнейшей среди всех топологий, для которых непрерывны канонические отображения f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$.

Следствие. *Пусть E — локально выпуклое пространство веса $\mathfrak{m}$, (E_ι) — семейство всех подпространств в E размерности $<\mathfrak{m}$, упорядоченное по включению, и $f_{\iota\varkappa}$ при $E_\iota \subset E_\varkappa$ — каноническое вложение $E_\iota \to E_\varkappa$. Тогда пространство E есть индуктивный предел системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$.*

Пример 1. Пусть I — множество всех счетных подмножеств комплексной плоскости C, упорядоченное по включению, а E_ι при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — векторное пространство всевозможных ограниченных комплексных числовых функций, определенных на C и равных нулю вне ι. Тогда пространства E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$, наделенные топологией равномерной сходимости на C, и канонические отображения $f_{\iota\varkappa}: E_\iota \to E_\varkappa$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ образуют индуктивную систему. Ее индуктивным пределом является векторное пространство $E = \bigcup E_\iota$ (пространство всех ограниченных функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого счетного множества), наделенное топологией равномерной сходимости на C. Действительно, это следует из предложения 3, ибо пространство E имеет счетный вес, а степень фильтруемости множества I более чем счетна.

Пример 2. Пусть I — множество всех конечных подмножеств в C, упорядоченное по включению, и E_ι при каждом $\iota \in$ I — пространство комплексных числовых функций, определенных на C и равных нулю вне ι, наделенное топологией равномерной сходимости на C. Пусть $f_{\iota\varkappa}$ при $\iota \leqslant \varkappa$ — каноническое отображение $E_\iota \to E_\varkappa$ и $E = \bigcup E_\iota$ — наделенное топологией равномерной сходимости на C пространство комплексных числовых функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного множества. Тогда вес пространства E счетен и совпадает со степенью фильтруемости множества I, так что условия предложения 3 не выполнены. Более того, пространство E не является индуктивным пределом системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$. Действительно, пусть (λ_n) — последовательность попарно различных комплексных чисел и V — множество тех $x \in E$, для которых $|x(\lambda_n)| < 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда V — поглощающее закругленное выпуклое множество в E, для которого $V \cap E_\iota$ при каждом $\iota \in$ I — окрестность нуля в E_ι, но V не является окрестностью нуля в E.

3. Наследственность. Как показал впервые А. Гротендик [7], существует локально выпуклое пространство E, являющееся индуктивным пределом последовательности своих подпространств E_n ($n \in N$ — множество целых положительных чисел), в котором некоторое незамкнутое подпространство F имеет замкнутые пересечения $F \cap E_n$ $(n \in N)$ (ср. [8], где имеется усиление этого результата). Тем не менее справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть E — индуктивный предел системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, канонические отображения $f_\iota: E_\iota \to E$ являются мономорфизмами и вес пространства E строго мажорируется степенью фильтруемости множества* I. *Тогда множество $A \subset E$ в том и только в том случае замкнуто, когда при каждом $\iota \in$ I замкнуто множество $f_\iota^{-1}(A)$ в E_ι.*

Доказательство. Пусть $x \notin A$ и K — множество всевозможных $\iota \in$ I, для каждого из которых существует элемент $x_\iota \in E_\iota$ такой, что $x = f_\iota(x_\iota)$. Тогда множество K конфинально в I и для каждого $\iota \in$ I существует окрестность нуля V_ι в E_ι такая, что $(x_\iota + V_\iota) \cap f_\iota^{-1}(A) = \varnothing$. Следовательно, $(x + f_\iota(V_\iota)) \cap A = \varnothing$ при каждом $\iota \in$ K, откуда $(x + V) \cap A = \varnothing$, где $V = \bigcup\limits_{\iota \in K} f_\iota(V_\iota)$ — окрестность нуля в E.

Следствие. *Если выполнены условия предыдущего предложения, то топология пространства E является сильнейшей среди всех топологий (не обязательно согласующихся со структурой векторного пространства) в E, для которых непрерывны отображения f_ι $(\iota \in$ I).*

Замечание. Вообще говоря, топология пространства E, являющегося индуктивным пределом системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, отлична даже от сильнейшей из топологий, согласующихся со структурой векторного пространства E, для которых непрерывны канонические отображения $f_\iota: E_\iota \to E$ $(\iota \in$ I) (см., например, [9]).

Предложение 5. *Пусть вес локально выпуклого пространства E, являющегося индуктивным пределом системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, строго мажорируется степенью фильтруемости множества* I, *а канонические отображения $f_\iota: E_\iota \to E$ $(\iota \in$ I) являются мономорфизмами. Тогда каждое подпространство F в E является индуктивным пределом системы $(F_\iota, g_{\iota\varkappa})$, где $F_\iota = f_\iota^{-1}(F)$ $(\iota \in$ I) и $g_{\iota\varkappa}$ при любых $\iota \leqslant \varkappa$ — сужение $f_{\iota\varkappa}$ на F_ι.*

Доказательство. Каждая окрестность нуля для топологии индуктивного предела в F содержит множество вида $\bigcup f_\iota(V_\iota \cap F_\iota) = V \cap F$, где $V = \bigcup f_\iota(V_\iota)$ — окрестность нуля в E. С другой стороны, при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ сужение отображения f_ι на F_ι непрерывно; следовательно, топология индуктивного предела в F совпадает с индуцируемой из E.

Предложение 6. *Пусть мощность множества* A *и вес локально выпуклого пространства* E^α, *при каждом* $\alpha \in \mathrm{A}$, *являющегося индуктивным пределом системы* $(E_\iota^\alpha, f_{\iota\varkappa}^\alpha)$, *строго мажорируются степенью фильтруемости множества* I, *а канонические отображения* $f_\iota^\alpha : E_\iota^\alpha \to E^\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A}, \iota \in \mathrm{I})$ *являются мономорфизмами. Тогда пространство* $E = \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} E^\alpha$ *является индуктивным пределом системы* $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, *где* $E_\iota = \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} E_\iota^\alpha$ $(\iota \in \mathrm{I})$ и $f_{\iota\varkappa} = (f_{\iota\varkappa}^\alpha)$ $(\iota \leqslant \varkappa)$.

Доказательство. Очевидно, что отображения $f_\iota = (f_\iota^\alpha)$ — мономорфизмы; кроме того, вес пространства E строго мажорируется степенью фильтруемости множества I. Тем самым наше утверждение следует из предложения 3.

Предложение 7. *Пусть* E — *индуктивный предел индуктивной системы локально выпуклых пространств* E_n $(n \in N)$, *топология каждого из которых отлична от слабейшей, и мономорфизмов* $f_{mn} : E_m \to E_n$ $(m \leqslant n)$, *и пусть фильтр окрестностей нуля в* E *совпадает с пересечением фильтров с базисами* $f_n(\mathfrak{B}_n)$, *где* $\mathfrak{B}_n$ *при каждом* $n \in N$ — *фильтр окрестностей нуля в* E_n. *Тогда каждое ограниченное множество в* E *является при некотором* $n \in N$ *каноническим образом ограниченного множества из* E_n.

Доказательство. Пусть B — ограниченное множество в E. Тогда существует элемент $x \in E$ такой, что $0 \notin \overline{x + B}$. Действительно, в противном случае множество B было бы плотным в E, а это невозможно, ибо топология в E не является слабейшей. Покажем, что множество $M = x + B$ содержится в одном из множеств $f_n(E_n)$ $(n \in N)$. Для этого обозначим через V окрестность нуля в E, не пересекающуюся с M. Можно считать, что $V = \bigcup_{n \in N} f_n(V_n)$; в таком случае положим $U = \bigcup_{n \in N} f_n\left(\frac{1}{n} V_n\right)$. Тогда $M \subset \lambda U$ при некотором $\lambda \in C$, причем $M \cap \bigcup_{n \geqslant |\lambda|} f_n\left(\frac{\lambda}{n} V_n\right) = \varnothing$. Следовательно, $M \subset f_n(E_n)$ при наибольшем n, для которого $|\lambda| > n$; тем самым множество B является образом множества $f_n^{-1}(B)$, ограниченного в E_n.

4. **Плотность.** Назовем индуктивную систему $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ *плотной*, если для любых $\iota \leqslant \varkappa$ множество $f_{\iota\varkappa}(E_\iota)$ всюду плотно в E_ι.

Предложение 8. *Пусть* E — *индуктивный предел плотной индуктивной системы* $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$. *Тогда канонические отображения* $f_\iota : E_\iota \to E$ $(\iota \in \mathrm{I})$ *являются мономорфизмами в том и только в том случае, когда* $f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ — *мономорфизмы.*

Доказательство. Пусть V_ι — замкнутая закругленная выпуклая окрестность нуля в E_ι и $V_\varkappa = \overline{f_{\iota\varkappa}(V_\iota)}$ $(\varkappa \geqslant \iota)$. Тогда $V_\varkappa$ — окрестность нуля в $E_\varkappa$. Пусть $V = \bigcup_{\varkappa \geqslant \iota} f_\varkappa(V_\varkappa)$; тогда V — окрестность нуля в E, ибо $f_\varkappa^{-1}(V) \supset V_\varkappa$ $(\varkappa \geqslant \iota)$ и V — поглощающее закругленное выпуклое множество, поскольку $f_\varkappa(V_\varkappa)$ $(\varkappa \geqslant \iota)$ — закругленные выпуклые множества и $f_\varkappa(V_\varkappa) \subset f_\lambda(V_\lambda)$ при $\varkappa \leqslant \lambda$. Наконец, $f_\iota^{-1}(V) = \bigcup_{\varkappa \geqslant \iota} f_{\iota\varkappa}^{-1}(\overline{f_{\iota\varkappa}(V_\iota)}) \subset V_\iota$.

Лемма 2. Пусть E — *индуктивный предел индуктивной системы* $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ *и* $f_\iota : E_\iota \to E$ $(\iota \in \mathrm{I})$ — *канонические отображения. Тогда подмножество* $F \subset E$ *плотно в* E, *если* $f_\iota^{-1}(F)$ *плотно в* E_ι *при каждом* $\iota \in \mathrm{I}$.

Доказательство. Для каждого $x \in E$ и каждой окрестности ну[ля] V в E существует $\iota \in \mathrm{I}$ и окрестность V_ι в E_ι, такие, что $x = f_\iota(x_\iota)$, г[де] $x_\iota \in E_\iota$, и $V \supset f_\iota(V_\iota)$. Следовательно, $(x + V) \cap F \supset f_\iota((x_\iota + V_\iota) \cap f_\iota^{-1}(F)) \neq \varnothing$.

Замечание. Из того, что F плотно в E, вообще говоря, не сл[е]дует, что $f_\iota^{-1}(F)$ при некотором $\iota \in \mathrm{I}$ плотно в E_ι.

Следствие. *Пусть $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ — плотная индуктивная система, E — ее индуктивный предел и $f_\iota : E_\iota \to E\,(\iota \in \mathrm{I})$ — канонические отображени[я]. Тогда при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ множество $f_\iota(E_\iota)$ плотно в E.*

Доказательство. Действительно, $f_\varkappa^{-1}(f_\iota(E_\iota)) \supset f_{\iota\varkappa}(E_\iota)$ при любы[х] $\iota \leqslant \varkappa$ и поэтому достаточно воспользоваться леммой 2, положив $F = f_\iota(E_\iota)$.

Предложение 9. *Пусть E и F — индуктивные пределы соответст[в]енно индуктивных систем $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$ и $(F_\iota, g_{\iota\varkappa})$, где F_ι — подпространст[во] в E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$, а $g_{\iota\varkappa}$ — сужение на F_ι отображения $f_{\iota\varkappa}$ $(\iota \leqslant \varkappa)$; пусть, кро[ме] того, при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ прообраз $f_\iota^{-1}(F)$ пространства F относительн[о] канонического отображения $f_\iota : E_\iota \to E$ плотен в E_ι. Тогда локально выпу[к]лая топология $\mathfrak{T}$ в векторном пространстве E совпадает с топологи[ей] индуктивного предела, если выполняются следующие условия:*

а) *отображения f_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ непрерывны, когда векторное пространство E наделено топологией $\mathfrak{T}$;*

б) *топология пространства F совпадает с той, которую индуциру[ет] в F топология $\mathfrak{T}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}'$ — топология индуктивного преде[ла] в E; тогда $\mathfrak{T} \leqslant \mathfrak{T}'$ и множество F плотно в векторном пространстве E, наделенном топологией $\mathfrak{T}'$ в силу леммы 2. Очевидно, что топология пр[о]странства F мажорирует индуцируемую из E; следовательно, топологи[и] в F, индуцируемые соответственно топологиями $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$, совпадают. Таки[м] образом, для любой замкнутой в топологии $\mathfrak{T}'$ окрестности нуля U д[ля] $\mathfrak{T}'$ существует открытая в топологии $\mathfrak{T}$ окрестность нуля V для $\mathfrak{T}$, така[я], что $U \supset V \cap F$, т. е. $CU \cap V \cap F = \varnothing$. Так как множество $CU \cap V$ от[]крыто, а F плотно в E, наделенном топологией $\mathfrak{T}'$, то $CU \cap V = \varnothing$ и следовательно, $\mathfrak{T}' \leqslant \mathfrak{T}$.

Следствие. *Пусть локально выпуклое пространство E есть объеди[]нение семейства подпространств E_ι $(\iota \in \mathrm{I})$, причем E_ι плотно в $E_\varkappa$ пр[и] любых $\iota \leqslant \varkappa$. Тогда пространство E является индуктивным пределом си[]стемы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$, где $f_{\iota\varkappa}$ при $E_\iota \subset E_\varkappa$ — каноническое отображение $E_\iota \to E_\varkappa$.*

Пример 3. Пусть I — упорядоченное по включению множество все[х] счетных подмножеств комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, и E_ι при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ — векторное пространство всевозможных отображений комплексной плоскости в расширенную комплексную плоскость $\overline{\boldsymbol{C}}$, конечных в каждой точке до[]полнения к множеству ι. Пусть E_ι при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ наделено топологией простой (т. е. поточечной) сходимости на дополнении к множеству ι; тогд[а] при любых $\iota \leqslant \varkappa$ $E_\iota \subset E_\varkappa$ и каноническое отображение $f_{\iota\varkappa} : E_\iota \to E_\varkappa$ непре[]рывно. Покажем, что пространство $E = \bigcup E_\iota$ всех отображений $\boldsymbol{C} \to \overline{\boldsymbol{C}}$, каждое из которых конечно вне некоторого счетного множества, наделен[]ное слабейшей топологией, является индуктивным пределом системы $(E_\iota, f_{\iota\varkappa})$. Для этого обозначим через F_ι при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ векторное подпростран[]ство пространства E_ι, состоящее из тех функций, которые равны нулю вне ι; очевидно, что топология в F_ι (индуцируемая из E_ι) является слабей[]шей. Пространства F_ι $(\iota \in \mathrm{I})$ и канонические отображения $g_{\iota\varkappa} : F_\iota \to F_\varkappa$ $(\iota \leqslant \varkappa)$ образуют индуктивную систему. Индуктивным пределом этой системы яв[]ляется векторное пространство $F = \bigcup F_\iota$, наделенное слабейшей тополо[]гией. Действительно, степень фильтруемости множества I бесконечна, а вес пространства F конечен (равен 1). Тем самым наше утверждение следует из предложения 9, ибо пересечение $F \cap E_\iota$ при каждом $\iota \in \mathrm{I}$ плотно в E_ι.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Dieudonné et L. Schwartz. La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1 (1949), 61—101. (Русск. перевод в сб. «Математика», 2 : 2, 77—117 (1958).

2. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства, Изд-во иностр. лит., М., 1959.

3. G. Köthe. Topologische lineare Räume, I, Berlin, 1960.

4. Y. Kōmura. Some examples on linear topological spaces, Math. Ann., 153, № 2, 150—162 (1964).

5. J. Sebastião e Silva. Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, Rendiconti di mathematica e della sue applicazioni, Roma, (5), 14, 388—410 (1955). (Русск. перевод в сб. «Математика», 1 : 1, 60—77 (1957).

6. Д. А. Райков. Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств, Труды Московск. матем. об-ва, 7, 413—438, (1958).

7. A. Grothendieck. Sur les espaces (F) et (DF), Summa Bras. Math., 3, 57—123, (1954). (Русск. перевод в сб. «Математика», 2 : 3, 81—127 (1958).

8. Б. М. Макаров. О некоторых патологических свойствах индуктивных пределов B-пространств, «Усп. матем. наук», 18, № 3, 171—178 (1963).

9. V. L. Klee. Jr., Convex sets in linear spaces, III, Duke Math. Journ., 20, № 1, 105—111 (1953).