К ОЦЕНКЕ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ТЕЙЛОРА ОДНОЛИСТНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

И. М. Гальперин

§ 1. Обозначим через S класс функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$.

Одной из центральных задач в теории однолистных функций является, как известно, проблема коэффициентов. Эта проблема впервые была выдвинута в 1916 г. Бибербахом [10], который высказал предположение, что $|a_n| \leqslant n$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Самому Бибербаху, при помощи доказанной им теоремы площадей, удалось только показать, что $|a_2| \leqslant 2$.

В 1923 г. Левнер [19] (а затем и другие [5], [13], [15], [29]), развив значительно более сильный метод, доказал неравенство $|a_3| \leqslant 3$.

В дальнейшем в решении проблемы коэффициентов намечается два направления, из которых второе дополняет первое. С одной стороны, делаются попытки решить проблему в общем виде (для произвольного n); с другой стороны, пытаются улучшить общие, но пока еще неточные оценки для некоторых первых значений n.

В направлении общего решения задачи первая попытка принадлежит Литтльвуду [18], который в 1924 г. доказал, что $|a_n| < ne (n = 2, 3, \ldots)$.

Улучшению этой оценки посвящены работы [17], [31], [4], [6], [1], [2], [3], [7], [33].

Ко второму направлению относятся публикации [21], [30], [16], [20], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [9], [28], [12], [32], [14], [11], [8].

Из приведенных выше работ можно выделить следующие лучшие из известных в настоящее время оценок:

$$|a_n| \leqslant n, \quad n = 2, 3, 4 \tag{1}$$

$$|a_5| < 5{,}5079, \quad |a_6| < 7{,}0542,$$

$$|a_n| < 1{,}243n, \quad n \geqslant 7,$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{n} < 1, \text{ если } f(z) \not\equiv z(1 - z\theta)^{-2}, \ |\theta| = 1.$$

§ 2. В настоящем параграфе мы, в развитие работ Правитца [21] и Тао-Чинг-Чана [32] и в дополнение к работе Милина [33] докажем следующую теорему:

Если

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \in S,$$

то имеют место следующие оценки:

$$|a_5| < 5{,}377, \quad |a_6| < 6{,}783, \quad |a_7| < 8{,}317,$$
$$|a_8| < 9{,}934.$$

Для доказательства теоремы приведем вывод рекурентной формулы связывающей $|a_{n+1}|$ и $|a_{n+1-k}|$, $k = 1, 2, \ldots n$, $a_1 = 1$.

Положим

$$\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\alpha) z^n \quad (\alpha > 0). \qquad (2)$$

По теореме Правитца [21] имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \alpha) |b_n(\alpha)|^2 \leqslant \alpha. \qquad (3)$$

Дифференцируя обе части (2) по z, находим:

$$-\alpha \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{-\alpha-1} \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(\alpha) z^{n-1}$$

или

$$-\alpha \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{-\alpha} \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{z}\right] = \frac{f(z)}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(\alpha) z^{n-1}$$

и

$$-\alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\alpha) z^n\right] \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} z^{n-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^n\right] \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(\alpha) z^{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{n-1} в обеих частях последнего тождества, получаем

$$-\alpha \sum_{k=1}^{n} k b_{n-k}(\alpha) a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} k b_k(\alpha) a_{n+1-k},$$

где

$$b_0(\alpha) = a_1 = 1,$$

откуда находим

$$\alpha n |a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} [k + (n-k)\alpha] |b_k(\alpha)| |a_{n+1-k}|.$$

Используя неравенство Шварца и соотношение (3), получаем для интервала $0 < \alpha < 1$:

$$\alpha^2 n^2 |a_{n+1}|^2 \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} [k + (n-k)\alpha] |b_k(\alpha)| |a_{n+1-k}|\right\}^2 =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k-\alpha} |b_k(\alpha)| \frac{[k + (n-k)\alpha] |a_{n+1-k}|}{\sqrt{k-\alpha}}\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (k-\alpha) |b_k(\alpha)|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[k + (n-k)\alpha]^2 |a_{n+1-k}|^2}{k-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{[k + (n-k)\alpha]^2 |a_{n+1-k}|^2}{k-\alpha},$$

откуда

$$|a_{n+1}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{[k+(n-k)\alpha]^2 |a_{n+1-k}|^2}{\alpha(k-\alpha)n^2}, \quad a_1 = 1, \quad 0<\alpha<1. \tag{4}$$

Для $n=4$ эта формула с учетом оценок (1) дает

$$|a_5|^2 \leqslant \frac{(1+3\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{9}{4}\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha(2-\alpha)} + \frac{(3+\alpha)^2}{4\alpha(3-\alpha)} + \frac{1}{\alpha(4-\alpha)}.$$

Исследование на экстремум выражения, стоящего в правой части последнего неравенства, показывает, что оно достигает минимума при значении α, являющимся корнем уравнения

$$105\alpha^8 - 1730\alpha^7 + 11500\alpha^6 - 38996\alpha^5 + 68785\alpha^4 - 51410\alpha^3 - \\ - 8750\alpha^2 + 30000\alpha - 7200 = 0$$

интервале (0, 1).

Решая это уравнение (на машине «Киев» — Институт кибернетики АН УССР), находим, что $\alpha = 0{,}294430542$. Подстановка этого значения в правую часть последнего неравенства дает

$$|a_5|^2 < 17{,}073104 + 7{,}507367 + 3{,}406113 + 0{,}916563 = 28{,}903147 \tag{5}$$

$$|a_5| < 5{,}377.$$

Далее, для $n=5$, $\alpha=0{,}26$ получаем из (4) с учетом (1) и (5)

$$|a_6|^2 < 25{,}006931 + 10{,}933192 + 6{,}261292 + 2{,}986031 + \\ + 0{,}811425 = 45{,}998871 \tag{6}$$

и

$$|a_6| < 6{,}783;$$

для $n=6$, $\alpha=0{,}22$ из (4) с учетом (1), (5) и (6) находим

$$|a_7|^2 < 32{,}837190 + 17{,}005325 + 9{,}734337 + 5{,}926407 + \\ + 2{,}879042 + 0{,}786412 = 69{,}168713 \tag{7}$$

и

$$|a_7| < 8{,}317;$$

для $n=7$, $\alpha=0{,}22$ находим

$$|a_8|^2 < 44{,}276400 + 23{,}037312 + 14{,}519274 + 8{,}526706 + 5{,}168847 + \\ + 2{,}483672 + 0{,}670422 = 98{,}682633 \tag{8}$$

и

$$|a_8| < 9{,}934;$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Базилевич. Мат. сб. 22 (64) : 3, 381—390, 1948.
2. И. Е. Базилевич. ДАН СССР, т. 65, № 3, 253—255, 1949.
3. И. Е. Базилевич. Матем. сб. 28 (70) : 1, 147—164, 1951.
4. Г. М. Голузин. Матем. сб. 22 (64) : 3, 373—380, 1948.
5. Л. А. Люстерник и М. А. Лаврентьев. Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, ГТТИ, 1935, 379—386.
6. И. М. Милин и И. А. Лебедев. ДАН СССР, т. 67, № 2, 221—223, 1949.
7. В. К. Хейман. Многолистные функции. Изд-во иностр. лит., 1—179, 1960.
8. В. К. Хейман. Математика (периодический сборник иностранных статей) 8 : 1, 142—150, 1964.
9. И. З. Штокало. Сб. научно-иссл. работ Харьковского текст. и-та, т. II, 223—230, 1940.
10. L. Bieberbach Sitz. — Ber. Preuss. Acad. Wiss., 940—955, 1916.

11. Z. Charzynski, M. Schiffer. Arch. Ration. Mech. and Analysys, vol. 5, Nr. 3 187—193 (1960).
12. B. Friedman. Duke Math. journ. vol. 13, 1946, 171—177.
13. P. Garabedian, M. Schiffer. Ann. Math. (2) 61, 116—136 (1955).
14. P. Garabedian, M. Schiffer. J. Rat. Mech. Anal. 4, 427—465 (1955)
15. J. A. Jenkins. Trans. Amer. Math. Soc. 79, 423—428 (1955).
16. K. König. Mitt. Math. Ges. Hamburg, 7, 9—12 (1931).
17. E. Landau. Math. Z. bd 30, H. 4, 635—638 (1929).
18. J. E. Littlewood. Proc. London. Math. Soc. (2) 23, 481—519 (1924).
19. K. Löwner. Math. Ann. 89, 1923, 103—121.
20. S. Ozaki. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku (A), 1, 283—287 (1933).
21. H. Prawitz. Arkiv for Mat, Astr. och Fysik, bd 20. Nr. 6, 1—12 (1927—28).
22. A. Rosenblat. S. Turski. C. R. t. 200, Nr. 15, 1270—1272 (1935).
23. A. Rosenblat. C. R. t. 207, Nr. 9, 442—444 (1938).
24. A. Rosenblat. Revista de ciencias, Lima, Nr. 424, 165—167 (1938).
25. A. Rosenblat. Revista de ciencias, Lima, Nr. 424, 177—179 (1938), 181—182, 183—184.
26. A. Rosenblat. Bull. de la Soc. Math. de Grèce. T. XIX, 2, 3, 127—128 (1938).
27. A. Rosenblat. Revista de ciencias, Lima, 40, 541—545, 547—553 (1939).
28. G. Roque. Actas Acad. Ci. Lima 4, 76—81 (1941).
29. A. Schaeffer, D. Spencer. Duke Math. j. vol 10, 1943, 611—635; vol 12, 107—125 (1945).
30. G. Szegö. Math. Ann. bd 100, 188—211 (1928).
31. S. Takanaschi. Proc. of the Imp. Acad. Tokyo vol IX, Nr. 9, 461—464 (1933).
32. Too — Sching — Shan. I. of the Chinese math. Soc. (new series), vol 1, Nr. 1, 98—107 (1951).
33. И. М. Милин, ДАН СССР, т. 160, № 4, 769—771, 1965.