ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЕ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ

В. Г. Амелькович

Рассмотрим последовательность линейных положительных операторов $L_n(f,\ x)$, определенных в пространстве непрерывных на промежутке $[a;\ b]$ функций $C[a;\ b]$, для которой справедлива теорема типа Вороновской, т. е. существует функция $\beta(x) \geqslant 0$ и последовательность чисел $R_n > 0$ такие, что для любой непрерывной функции $f(x)$, имеющей в точке x вторую производную,

$$\lim_{n\to\infty} R_n [L_n(f,\ x) - f(x)] = \beta(x) f''(x). \tag{1}$$

В работе доказывается в некотором смысле обратная теорема, исходя из которой легко решается вопрос о классах насыщения таких операторов.

Обозначим через $W^1H_1[a;\ b]$ класс функций, имеющих на промежутке $[a;\ b]$ производную, удовлетворяющую условию Lip 1.

Теорема 1. *Если $\beta(x)$ непрерывная, отличная от нуля на промежутке $[c;\ d] \subset [a;\ b]$ функция, то из непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$ и неравенства*

$$\max_{c\leqslant x\leqslant d} R_n |L_n(f,\ x) - f(x)| < C, \tag{2}$$

где C некоторая константа, следует, что $f(x)$ принадлежит классу $W^1H_1[c;\ d]$.

Если же кроме (2)

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n [L_n(f,\ x) - f(x)] = 0 \text{ при } x \in [c;\ d], \tag{3}$$

то $f(x)$ линейная функция на промежутке $[c;\ d]$.

Доказательство этой теоремы основано на одном свойстве непрерывных функций, не принадлежащих классу $W^1H_1[c;\ d]$, которое выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Для любой непрерывной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, не принадлежащей классу $W^1H_1[c;\ d]$, где $[c;\ d] \subset [a;\ b]$, и любого $M > 0$ найдется внутри промежутка $[c;\ d]$ точка η и непрерывная, имеющая в этой точке вторую производную, функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. $$\psi(\eta) = f(\eta)$$

2. $$\psi(x) \leqslant f(x) \text{ при } x \in [a;\ b] \text{ и } \psi''(\eta) > M \tag{4}$$

или

$$\psi(x) \geqslant f(x) \text{ при } x \in [a;\ b] \text{ и } \psi''(\eta) < -M.$$

Докажем сначала лемму.

Лемма 1. *Если на промежутке* $[a;\ b]$ *задана неубывающая, выпуклая вниз непрерывная функция* $f(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\text{а)}\ \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a};\quad \text{б)}\ \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}>2K\ (K>0),$$

то найдется точка $\eta\in(a;\ b)$ *и непрерывная, имеющая в этой точке вторую производную, функция* $f_1(x)$ *такая, что*

$$f_1(\eta)=f(\eta),\ f_1''(\eta)>K\ \text{и}\ f_1(x)\leqslant f(x)$$

в некоторой ε*-окрестности точки* η.

Доказательство. Возможны два случая: в некоторой точке $\eta\in(a;\ b)\,f'_+(\eta)>f'_-(\eta)$ или $f'(x)$ непрерывная неубывающая функция на промежутке $[a;\ b]$ (см. [1], стр. 114).

В первом случае функцию $f_1(x)$ можно определить следующим образом $f_1(x)=\alpha(x)+K(x-\eta)^2$, где $\alpha(x)$ линейная функция, для которой

$$f'_-(\eta)<\alpha'(\eta)<f'_+(\eta)\ \text{и}\ \alpha(\eta)=f(\eta).$$

Во втором случае, применяя теорему Лагранжа, условие б) запишем в виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=\frac{f'(Q)}{b-a}>2K,\ \text{где}\ Q\in(a;\ b).$$

Из полученного неравенства и условия а) следует, что

$$f'(Q)-f'(a)>2K(b-a).$$

Тогда на основании известной леммы (см. [2], стр. 183) заключаем, что существует точка $\eta\in(a;\ b)$, в которой все производные числа функции $f'(x)$ больше $2K_1=2K+2\delta$, где δ некоторое положительное число. Покажем, что функция

$$f_1(x)=f(\eta)+f'(\eta)(x-\eta)+\frac{1}{2}K_2(x-\eta)^2,\ \text{где}\ K<K_2<K_1,$$

удовлетворяет условиям леммы 1, т. е. $f_1(x)\leqslant f(x)$ в некоторой окрестности точки η.

Действительно, в силу способа определения точки η, существует такое $\varepsilon>0$, что для всех $z\in(\eta-\varepsilon;\ \eta+\varepsilon)$, $z\neq\eta$

$$\frac{f'(z)-f'(\eta)}{z-\eta}>2K_2. \qquad (5)$$

Из выпуклости вниз функции $f(x)$ следует, что для произвольных x и z, принадлежащих промежутку $[a;\ b]$,

$$f(x)\geqslant f(z)+f'(z)(x-z). \qquad (6)$$

Пусть $x\in(\eta-\varepsilon;\ \eta+\varepsilon)$, $z=\eta+\frac{1}{2}(x-\eta)$. Тогда имеет место оценка (5) и неравенство (6) примет вид:

$$f(x)\geqslant f(z)+2K_2\cdot\frac{1}{4}(x-\eta)^2+f'(\eta)(x-z).$$

Следовательно,

$$f(x)-f_1(x)\geqslant f(z)-f(\eta)-f'(\eta)(z-\eta)\geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть M произвольное фиксированное положительное число. Докажем возможность построения функции $\psi(x)$ по заданному M, притом достаточно потребовать выполнения неравенств $f(x)\geqslant\psi(x)$ или $f(x)\leqslant\psi(x)$ хотя бы в некоторой окрестности точки η, так как изменением функции вне этой окрестности с сохранением свойства непрерывности всегда можно добиться выполнения нужных неравенств на всем промежутке $[a; b]$.

Необходимым и достаточным условием того, что функция $f(x)$ принадлежит классу W^1H_1 $[c; d]$, является равномерная относительно x и h ограниченность отношения

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

Необходимость очевидна, достаточность следует из теоремы Валле Пуссена (см. [3], стр. 326).

Так как по условию теоремы $f(x) \overline{\in} W^1H_1[c; d]$, то найдутся такие значения x_1, $h_1([x_1-h_1; x_1+h_1] \subset [c; d])$, что это отношение по абсолютной величине больше $8M$. Для определенности предположим, что

$$\frac{f(x_1+h_1)-2f(x_1)+f(x_1-h_1)}{h_1^2} > 8M. \tag{7}$$

В этом случае мы получим функцию $\psi(x) \leqslant f(x)$, в противоположном — $\psi(x) \geqslant f(x)$, причем последний случай можно свести к первому путем замены функции $f(x)$ на $-f(x)$).

Определим новую функцию $F(x) = a_0x + a_1 + f(x)$ так, чтобы $F(x_1-h_1) = F(x_1) = 0$. Тогда $F(x_1+h_1) > 0$.

$F(x)$ — непрерывная функция. На промежутке $[x_1-h_1; x_1+h_1]$ она достигает наименьшего значения в некоторой внутренней точке x_0. Если

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = L > 0,$$

то за η можно принять x_0 и положить

$$\psi(x) = \alpha_1(x) + M(x-x_0)^2 - a_0x - a_1,$$

где $\alpha_1(x)$ — линейная функция, для которой $0 < \alpha_1'(x_0) < L$, $\alpha_1(x_0) = F(x_0)$. Пусть теперь

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = 0. \tag{8}$$

Из способа выбора точки x_0, (7) и того, что $x_1+h_1-x_0 < 2h_1$, следует неравенство

$$\frac{F(x_1+h_1)-F(x_0)}{(x_1+h_1-x_0)^2} > \frac{F(x_1+h_1)-F(x_0)}{(2h_1)^2} > 2M. \tag{9}$$

Для удобства обозначим $x_1+h_1-x_0 = h_0$. На промежутке $[x_0; x_0+h_0]$ определим функцию $\omega(x)$ равенством

$$\omega(x) = \min_{x\leqslant t\leqslant x_0+h_0} F(t).$$

Из неравенств (8), (9) и способа определения функции $\omega(x)$ вытекает, что

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{\omega(x)-\omega(x_0)}{x-x_0} = 0; \quad \frac{\omega(x_0+h_0)-\omega(x_0)}{h_0^2} > 2M \tag{10}$$

$$\omega(x) \leqslant F(x) \text{ при } x \in [x_0; x_0+h_0].$$

Заметим, что в точках, в которых существуют положительные вторые производные числа Шварца ($D''\omega(x) > 0$), выполняется равенство

$$\omega(x) = F(x).$$

Действительно, если $\omega(x') \neq F(x')$, то найдется точка $x'' > x'$, в которой

$$\omega(x') = \min_{x' \leqslant t \leqslant x_0 + h_0} F(t) = F(x'').$$

На промежутке $[x'; x'']$ $\omega(x) = \text{const}$, а $D''\omega(x') \leqslant 0$, так как $\omega(x)$ — неубывающая функция на промежутке $[x_0; x_0 + h_0]$.

Если $\omega(x)$ — выпуклая функция, то ввиду последнего замечания, существование функции $\psi(x)$ следует из леммы 1.

В противном случае строим на промежутке $[x_0; x_0 + h_0]$ новую функцию $u(x)$ как предел равномерно сходящейся последовательности выпуклых непрерывных функций $u_n(x)$, удовлетворяющих при любом $n = 1, 2, \ldots$ условиям:

$$u_n(x_0) = \omega(x_0);\ u_n(x_0 + h_0) = \omega(x_0 + h_0);$$
$$u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant \omega(x) \text{ при } x \in [x_0;\ x_0 + h_0]. \tag{11}$$

Последовательность $\{u_n(x)\}$ строим следующим образом.

Обозначим: $t_0(x) = \omega(x_0)$; $t_2(x)$ — прямую, проходящую через точку $(x_0 + h_0;\ \omega(x_0 + h_0))$, и такую, что

$$\omega(x) \geqslant t_2(x) \text{ при } x \in [x_0;\ x_0 + h_0].$$

(Как и в дальнейшем, здесь имеем в виду, что $y = t_2(x)$ уравнение этой прямой). Прямая $t_2(x)$ существует при условии, что в точке $x_0 + h_0$ имеется конечная левая производная. В противном случае заменим h_0 на h'_0 так, чтобы неравенства (10) сохранялись и чтобы в точке $x_0 + h'_0$ существовала производная. Это возможно, так как $\omega(x)$ — монотонная функция. Обозначение оставим прежнее.

Проведем прямую $h_0(x)$, соединяющую точки $(x_0;\ \omega(x_0))$ и $(x_0 + h_0;\ \omega(x_0 + h_0))$. Так как $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{\omega(x) - \omega(x_0)}{x - x_0} = 0$, то найдутся точки, в которых

$$\omega(x) < h_0(x);\ x \in (x_0;\ x_0 + h_0).$$

Пусть $t_1(x)$ — прямая, параллельная прямой $h_0(x)$, имеющая общие точки с кривой $\omega(x)$ на промежутке $[x_0;\ x_0 + h_0]$ и такая, что $t_1(x) \leqslant \omega(x)$ при $x \in [x_0;\ x_0 + h_0]$.

Три прямые $t_0(x)$, $t_1(x)$, $t_3(x)$, пересекаясь, образуют выпуклую ломаную линию $u_1(x)$, удовлетворяющую условиям (11). Кроме этого, каждое линейное звено ломаной $u_1(x)$ имеет хотя бы одну общую точку с кривой $\omega(x)$, что важно для дальнейшего.

Если ломаная $u_n(x)$ $(n \geqslant 1)$, обладающая этими свойствами, определена, то $u_{n+1}(x)$ строим следующим образом.

Пусть ломаная $u_n(x)$ состоит из k линейных звеньев и каждое звено имеет точки, общие с кривой $\omega(x)$. Обозначим $p_{n,i}$, $p'_{n,i}$ $i = 1, 2, \ldots, k$ соответственно абсциссы крайних левых и правых точек i-го звена, общих с кривой $\omega(x)$, которые, в частности, могут совпадать.

На промежутках $[p_{n,i};\ p'_{n,i}]$ положим $u_{n+1}(x) = u_n(x)$.

Соединим хордами $h_{n,i}(x)$ каждые две соседние точки, лежащие на разных линейных звеньях ломаной $u_n(x)$, т. е. точки $(p'_{n,i};\ \omega \subset p'_{n,i})$ и $(p_{n,i+1};\ \omega(p_{n,i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.

Если при некотором i на интервале $(p'_{n,i};\ p_{n,i+1})$ справедливо неравенство $h_{n,i}(x) \leqslant \omega(x)$, то на этом интервале положим $u_{n+1}(x) = h_{n,i}(x)$.

В противном случае проводим прямую $t_{n,i}(x)$, параллельную $h_{n,i}(x)$, имеющую общие точки с кривой $\omega(x)$ на промежутке $[p'_{n,i};\ p_{n,i+1}]$, для которой справедливо неравенство

$$t_{n,i}(x) \leqslant \omega(x) \text{ при } x \in [p'_{n,i};\ p_{n,i+1}].$$

Обозначим через $m_{n,i}$, $m'_{n,i}$ значения x, при которых $t_{n,i}(x)$ пересекаются с $u_n(x)$, и определим $u_{n+1}(x)$ на интервале $(p'_{n,i};\ p_{n,i+1})$ следующим образом:

$$u_{n+1}(x) = \begin{cases} t_{n,i}(x) & \text{при } x \in [m_{n,i};\ m'_{n,i}] \\ u_n(x) & \text{для остальных значений } x. \end{cases}$$

Получаем новую ломаную $u_{n+1}(x)$, которая обладает требуемыми свойствами.

Из способа построения последовательности $\{u_n(x)\}$ видно, что она равностепенно непрерывна (угловой коэффициент каждого линейного звена не превосходит углового коэффициента прямой $t_2(x)$). Следовательно, построенная последовательность функций сходится равномерно.

Предельная функция $u(x)$ непрерывная, выпуклая, удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = 0;\ \frac{u(x_0+h_0)-u(x_0)}{h_0^2} > 2M,$$

при этом

$$u(x) \leqslant \omega(x) \leqslant F(x).$$

В силу леммы 1 существует точка $\eta \in (x_0;\ x_0+h_0)$ и имеющая в этой точке вторую производную функция $\psi_1(x)$, такая, что

$$\psi_1(\eta) = u(\eta);\ \psi''(\eta) > M \ \text{ и } \ \psi_1(x) \leqslant u(x)$$

в некоторой окрестности точки η.

Остается показать, что

$$u(\eta) = \omega(\eta) = F(\eta)$$

и положить

$$\psi(x) = \psi_1(x) - a_0x - a_1.$$

Пусть внутри некоторого промежутка $[t_1;\ t_2]$ $u(x) < \omega(x)$, а $u(t_1) = \omega(t_1)$, $u(t_2) = \omega(t_2)$.

Покажем, что тогда $u(t)$ — линейная функция на этом промежутке. Отсюда, ввиду неравенства $\psi_1''(\eta) > M$, будет следовать, что $u(\eta) = \omega(\eta)$ и, значит, $\omega(\eta) = F(\eta)$, так как $D''\omega(\eta) > M$.

Допустим противное. Это значит, существуют значения t_0, h такие, что

$$u(t_0+h) - 2u(t_0) + u(t_0-h) = \varepsilon > 0, \text{ где } [t_0-h;\ t_0+h] \in [t_1;\ t_2].$$

Тогда из равномерной сходимости последовательности $\{u_n(t)\}$ вытекает что, начиная с некоторого номера N,

$$u_n(t_0+h) - 2u_n(t_0) + u_n(t_0-h) > 0.$$

Это значит, что все ломаные $u_n(x)$ при $n > N$ на промежутке $[t_1;\ t_2]$ состоят из двух линейных звеньев, так как по условию $u(x) < \omega(x)$ внутри рассматриваемого промежутка и каждое звено должно иметь общие точки с кривой $\omega(x)$.

Сделаем дополнительное построение. Соединим хордой $h(x)$ точки $(t_1;\ \omega(t_1))$ и $(t_2;\ \omega(t_2))$. Обозначим ее угловой коэффициент через r.

При $x = t_1$ проведем правую касательную $h_1(x)$, при $x = t_2$ — левую касательную $h_2(x)$ к кривой $u(x)$ с угловым коэффициентом k_1 и k_2.

Из выпуклости вниз функции $u(x)$ и того, что на промежутке $[t_1;\ t_2]$ она отлична от линейной, следует неравенство

$$k_1 < r < k_2. \tag{12}$$

На промежутке $[t_1;\ t_2]$ касательные $h_1(x)$, $h_2(x)$ образуют ломаную $z(x)$ с вершиной во внутренней точке этого промежутка и $z(x) \leqslant u(x)$.

Предположим, что $n > N$, $n > 2$ и определена ломаная $u_n(x)$.

Пусть $l_{n,1}(x)$ — линейное звено, которому принадлежит точка $(t_1; u_n(t_1))$; $l_{n,2}(x)$ — $(t_2 \cdot u_n(t_2))$, а $k_{n,1}$, $k_{n,2}$ — их угловые коэффициенты. Обозначим через $l_{n,1}$ наибольшее значение x, при котором $u_n(x) = l_{n,1}(x) = u(x)$, через $l_{n,2}$ — наименьшее значение x, при котором $u_n(x) = l_{n,2}(x) = u(x)$.

Очевидны следующие неравенства:

$$l_{n,1} \leqslant t_1; \quad l_{n,2} \geqslant t_2; \quad k_{n,1} \leqslant u'_+(l_{n,1}) < k_2; \quad k_{n,2} \geqslant u'_-(l_{n,2}) \geqslant k_2.$$

Значит, $u_n(x) \leqslant z(x) < \omega(x)$ на промежутке $[t_0; t_1]$ и для определения $u_{n+1}(x)$ на этом промежутке нужно сначала провести хорду $h_n(x)$, соединяющую точки $(l_{n,1}; u_n(l_{n,1}))$ и $(l_{n,2}; u_n(l_{n,2}))$, а потом прямую, параллельную $h_n(x)$, которая должна стать одним из линейных звеньев ломаной $u_{n+1}(x)$ на промежутке $[t_1; t_2]$ и, следовательно, угловой коэффициент этой хорды h_n должен удовлетворять одному из неравенств $h_n \leqslant k_1$ или $h_n \geqslant k_2$.

Процесс повторяется. Получаем монотонные последовательности чисел

$$l_{n,1} \leqslant l_{n+1,1} \leqslant \ldots \leqslant l_{n+m,1} \leqslant \ldots \leqslant t_1;$$
$$l_{n,2} \geqslant l_{n+1,2} \geqslant \ldots \geqslant l_{n+m,2} \geqslant \ldots \geqslant t_2.$$

Так как $k_{n+m,1} \leqslant k_1$, $k_{n+m,2} \geqslant k_2$ для любого m, то из того, что

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+m}(x) = u(x),$$

следует равенство

$$\lim_{m\to\infty} l_{n+m,1} = t_1; \quad \lim_{m\to\infty} l_{n+m,2} = t_2, \quad \text{а} \quad \lim_{m\to\infty} h_{n+m} = r.$$

Значит, m можно взять настолько большим, что ввиду справедливости неравенства (12)

$$k_1 < h_{n+m} < k_2, \tag{13}$$

но с другой стороны при любом m для углового коэффициента хорды, которая параллельна одному из линейных звеньев $u_{n+m+1}(x)$ должно выполняться одно из неравенств

$$h_{n+m} \leqslant k_1 \text{ или } h_{n+m} \geqslant k_2.$$

Это противоречит (13). Следовательно, $u(x)$ линейная функция на промежутке $[t_1; t_2]$.

Теорема 2 доказана.

Легко видеть, что теорема 2 остается в силе, если функция $f(x)$ непрерывная 2π — периодическая, в этом случае промежуток $[a; b]$ — вся числовая ось, причем $\psi(x)$ можно подобрать так, чтобы она тоже была непрерывной 2π-периодической функцией.

Доказательство теоремы 1.

Предположим противное, т. е., что $f(x) \overline{\in} W^1H_1[c; d]$.

Согласно теореме 2 определим функцию $\psi(x)$ при $M = \frac{2C}{\mu}$, где

$$\mu = \min_{c \leqslant t \leqslant d} \beta(t) \neq 0.$$

Тогда в силу положительности $L_n(f, x)$ и свойств функции $\psi(x)$ будет иметь место одно из неравенств:

$$R_n[L_n(f, \eta) - f(\eta)] \geqslant R_n[L_n(\psi, \eta) - \psi(\eta)]$$

или

$$R_n[L_n(f, \eta) - f(\eta)] \leqslant R_n[L_n(\psi, \eta) - \psi(\eta)]$$

в зависимости от того, будет ли

$$\psi''(\eta) > \frac{2C}{\mu} \text{ и } \psi(x) \leqslant f(x)$$

или

$$\psi''(\eta) < -\frac{2C}{\mu} \text{ и } \psi(x) \geqslant f(x).$$

В обоих случаях, начиная с некоторого n,

$$|R_n[L_n(f, \eta) - f(\eta)]| > C,$$

так как по условию теоремы при $n \to \infty$

$$R_n[L_n(\psi, \eta) - \psi(\eta)] \to \psi''(\eta)\beta(\eta), \text{ а } |\psi''(\eta)\beta(\eta)| > 2C.$$

Полученное неравенство противоречит условию (2). Значит,

$$f(x) \in W^1H_1[c; d].$$

Если же кроме этого имеет место (3), то из того, что $f(x) \in W^1H_1[c; d]$ и (1) вытекает, что $f'(x)$ — абсолютно непрерывная функция, производная которой почти всюду равна нулю, т. е. $f'(x) = \mathrm{const}$, а $f(x)$ — линейная функция на промежутке $[c; d]$.

Теорема 1 доказана.

Очевидно, что из выполнения неравенства (2) для некоторой подпоследовательности последовательности операторов $L_n(f, x)$ тоже следует, что $f(x) \in W^1H_1[c; d]$.

На основе замечания, сделанного в конце доказательства теоремы 2, делаем заключение, что теорема 1 справедлива и для последовательностей линейных положительных операторов, определенных в пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi}$, переводящих это пространство в себя, для которых имеет место равенство типа (1), если только $f(x) \in C_{2\pi}$ и в точке x существует вторая производная $f''(x)$.

В этом случае из выполнения условий (2) и (3) для некоторой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ при $d - c \geqslant 2\pi$ следует, что $f(x) = \mathrm{const}$.

Пусть для последовательности линейных положительных операторов $L_n(f, x)$, определенных в пространстве функций $f(x) \in C[a; b]$, существует последовательность положительных чисел $\varphi(n) \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что для любой принадлежащей этому пространству функции $f(x) \neq Ax + B$, начиная с некоторого n,

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |L_n(f, x) - f(x)| > p\varphi(n),$$

а для любой функции $f(x) = Ax + B$ и хотя бы одной отличной от линейной функции $f(x) \in C[a; b]$

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |L_n(f, x) - f(x)| < g\varphi(n),$$

где p и g положительные числа, зависящие только от функции $f(x)$.

Такую последовательность операторов мы будем называть насыщенной с порядком насыщения $\varphi(n)$.

Класс функций, для которых

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |L_n(f, x) - f(x)| \leqslant p\varphi(n)$$

назовем классом насыщения.

Данные определения остаются в силе для операторов, определенных в пространстве $C_{2\pi}$ и переводящих это пространство в себя, если потребовать, чтобы указанные выше неравенства выполнялись для функций $f(x) \in C_{2\pi}$ при $x \in [0; 2\pi]$.

По существу это определение класса насыщения дано в работе [4].

Последовательности положительных операторов, удовлетворяющие условиям теоремы 1 при $d-c=b-a$ или $d-c>2\pi$ в периодическом случае и такие, что для функций соответственно класса $W^1H_1[a;\ b]$ или $\tilde{W}^1H_1$ (класс 2π-периодических функций, имеющих всюду производную, удовлетворяющую условию $\mathrm{Lip}\,1$), равномерно относительно $x\in[a;\ b]$ ($x\in[0;\ 2\pi]$)

$$R_n[L_n(f,\ x)-f(x)]=O(1) \tag{14}$$

по теореме 1 будут насыщены, причем порядок насыщения равен $\frac{1}{R_n}$ и класс насыщения есть $W^1H_1[a;\ b]$ (или $\tilde{W}^1H_1$ в периодическом случае).

При этом легко показать, что равенство (14) выполняется для любой функции $f(x)\in W^1H_1[a;\ b]$, если оно справедливо для функций

$$h_k(x)=x^k,\ k=0,\ 1,\ 2. \tag{15}$$

В периодическом случае условия (15) можно изменить следующим образом.

Пусть $\lambda_\delta(t)$ 2π-периодическая функция, определенная равенством

$$\lambda_\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{если } |t-x|<\delta\\ 1, & \text{если } 2\pi\geqslant|t-x|\geqslant\delta\end{cases}\quad(\pi>\delta>0).$$

Если для последовательности линейных положительных операторов $L_n(f,\ x)$, определенной на множестве ограниченных 2π-периодических функций, при некотором $\pi>\delta>0$ равномерно относительно x

$$R_nL_n[\lambda_\delta(t);\ x]=O(1);\quad R_n[L_n(1,\ x)-1]=O(1);$$

$$R_nL_n[\sin(t-x);\ x]=O(1);\quad R_nL_n\left[\sin^2\frac{t-x}{2}\ ;\ x\right]=O(1), \tag{16}$$

то для любой функции $f(x)\in\tilde{W}^1H_1$

$$R_n[L_n(f,\ x)-f(x)]=O(1)$$

равномерно относительно x.

Отсюда вытекают результаты М. Заманского, А. Х. Турецкого относительно классов насыщения для операторов Джексона, Валле Пуссена, Фейера, а также результат K. Leeuv, относящийся к полиномам Бернштейна (см. [4], [5], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди, Литтльвуд и Полиа. Неравенства, Изд-во иностр. лит., М., 1948.

2. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

3. Валле Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. 3. Петроград, 1922.

4. А. Х. Турецкий. О классах насыщения для некоторых методов суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций. Успехи математических наук, т. XV, 6, (96), 1960.

5. M. Zamansky. Classes de saturation des procédes de sommation des séries de Fourier et applications aus series trigonométriques, Ann. Sci. Ecole Norm. sup., (3), 67 (1950).

6. K. Leeuv. On the degree of approximation by Bernstein polynomials, J. analyse math., 7,1 (1959).