ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. Э. Кацнельсон

Как известно, функция, заданная на отрезке, может быть бесконечно дифференцируемой, не будучи аналитической. Однако, как доказал С. Н. Бернштейн [3], если $f(x)$ такова, что каждая ее производная сохраняет свой знак на этом отрезке, то $f(x)$ аналитична на этом отрезке*. Естественно предположение, что если не требовать знакопостоянства всех производных бесконечно дифференцируемой функции, а разрешить $f^{(k)}(x)$ N_k раз менять знак на этом отрезке, то при не очень быстром росте последовательности N_k аналитичность $f(x)$ сохранится.

Полиа и Винер [4] изучали с этой точки зрения бесконечно дифференцируемые периодические функции. Сформулируем основной результат их работы.

Пусть $f(x)$ — вещественнозначная бесконечно дифференцируемая периодическая функция периода 2π. Пусть $2\pi N_k$ — число перемен знака $f^{(k)}(x)$ на интервале длиной 2π. Тогда:

1. *Если $N_k = O(1)$, $(k \to \infty)$, то $f(x)$ — тригонометрический полином.*

2. *Если $N_k = O(k^\delta)$, где δ фиксировано, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, то $f(x)$ — целая функция конечного порядка, не превышающего $\frac{1-\delta}{1-2\delta}$.*

3. *Если $N_k = O(k^{\frac{1}{2}})$, то $f(x)$ — целая функция.*

Результаты 2 и 3 Полиа и Винера неточны: 2 дает для функции $f(x)$ сильно завышенный порядок, а 3 очень далеко от условия на N_k, необходимого для того чтобы $f(x)$ была целой функцией.

Несколько позже появления упомянутой выше работы [4] Полиа и Винера появилась работа Сегё [5], в которой он другим методом доказывает предложение 1 и уточняет предложения 2 и 3, получая точное в классе всех целых функций выражение для порядка $f(x)$ при заданных ограничениях на осцилляцию ее производных. Работа Сегё [5] — это первая работа цикла из четырех работ [5—8] различных авторов, обобщающих результат Полиа и Винера в различных направлениях.

С помощью теоремы Ролля легко получить, что

$$N_0 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots$$

---

* С. Н. Бернштейн показал также, что можно не требовать априори бесконечную дифференцируемость функции $f(x)$, а достаточно потребовать, чтобы при всех $k \geqslant 0$ и при всех x, h, таких, что точки, участвующие в выражении k-й конечной разности $\Delta_h^k(x)$, лежат в заданном интервале, выполнялось условие $\Delta_h^k(x) \geqslant 0$.

и значит существует $\lim\limits_{k\to\infty} N_k$. Фактически Винер и Полиа доказали больше, чем сформулировано в предложении 1. Из их доказательства видно, что для периодической функции

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \frac{\sigma}{\pi},$$

где $[-\sigma, \sigma]$ — наименьший сегмент, содержащий спектр $f(x)$. (Напомним, что в силу вещественности $f(x)$ ее спектр симметричен относительно нуля). Так как N_k — целое число, то либо $\sigma = \infty$, либо $\sigma < \infty$ — целое; в последнем случае $f(x)$ — тригонометрический полином, и существует такое m, что $\frac{1}{2} N_k = \sigma$ при $k \geqslant m$.

Теорема Полиа и Винера, при надлежащем обобщении входящих в нее величин N_k, может быть перенесена на случай почти периодических функций. Этому перенесению и посвящена в основном настоящая статья.

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая боровская почти периодическая функция.

Осцилляцию функций $f^{(k)}(x)$ будем измерять с помощью «верхней плотности знакоперемен» $\overline{N}_k$

$$\overline{N}_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k(-t, t)}{2t}, \tag{1}$$

где $n_k(\alpha, \beta)$ — число знакоперемен $f^{(k)}(x)$ в интервале (α, β). В случае, когда $f(x)$ периодична и имеет период 2π, определенная только что величина $2\pi\overline{N}_k$ совпадает с числом знакоперемен функции $f(x)$ на интервале длины, равной периоду, и в этом случае в (1) можно писать $\lim$, а не $\overline{\lim}$. Если в (1) можно писать $\lim$, а не $\overline{\lim}$, то мы будем обозначать этот предел N_k и называть его плотностью знакоперемен.

С помощью теоремы Ролля, как и в периодическом случае, легко получить, что

$$\overline{N}_0 \leqslant \overline{N}_1 \leqslant \overline{N}_2 \leqslant \ldots,$$

однако в отличие от периодического в почти периодическом случае $\overline{N}_k$ не обязаны быть целыми кратными некоторого числа, и поэтому в случае, когда

$$\lim_{k\to\infty} \overline{N}_k < \infty, \tag{*}$$

вовсе не обязательно все $\overline{N}_k$, начиная с некоторого, должны совпадать со своим пределом. Логически здесь возможны два разных случая. Ниже будет показано, что любой из них на самом деле может иметь место.

Эта статья состоит из двух частей. В первой из них доказывается, что при условии (*) функция $f(x)$ имеет ограниченный спектр и

$$\lim_{k\to\infty} \overline{N}_k = \frac{\sigma}{\pi},$$

где $[-\sigma, \sigma]$ — наименьший сегмент, содержащий спектр функции $f(x)$.

Во второй части статьи рассматриваются функции $f(x)$, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{N}_k < \infty$, и в терминах спектра функции $f(x)$ дается ответ на вопрос, когда все $\overline{N}_k$, начиная с некоторого места, совпадают со своим пределом. Оказывается, это имеет место тогда и только тогда, когда концы $-\sigma$, σ наименьшего сегмента, содержащего спектр $f(x)$, входят в спектр $f(x)$.

Определение. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция с ограниченным спектром, и пусть $[-\sigma, \sigma]$ — наименьший сегмент, содержащий* *спектр функции $f(x)$. Будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу* $[\sigma]$, *если точки* $-\sigma$ *и* σ *входят в спектр* $f(x)$.

Мы докажем, что если $f(x)$ класса $[\sigma]$, то, начиная с некоторого k, существуют плотности знакоперемен N_k. Однако у самой функции $f(x)$ класса $[\sigma]$ плотность знакоперемен не обязана существовать. То, что она на самом деле может не существовать, показывает приведенный в нашей работе пример.

I. ПЕРЕНЕСЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПОЛИА И ВИНЕРА НА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая вещественнозначная боровская почти периодическая функция. Пусть* $\sigma=\infty$, *если спектр функции* $f(x)$ не ограничен, и $[-\sigma, \sigma]$ — *наименьший сегмент, содержащий спектр функции* $f(x)$, если спектр $f(x)$ ограничен, и пусть $\overline{N}_k$ определено в (1). *Тогда существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{N}_k$, и имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\overline{N}_k=\frac{\sigma}{\pi}.$$

Доказательство. Легко видеть, что оператор G_δ, определенный формулой

$$G_\delta f(t)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\delta|t-s|}f(s)\,ds, \qquad (\delta>0)$$

переводит любую почти периодическую функцию в почти периодическую функцию, причем если

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\lambda_n t},$$

то

$$G_\delta f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot\frac{1}{\lambda_n^2+\delta^2}e^{i\lambda_n t}.$$

Кроме того,

$$(\delta^2 I-D^2)G_\delta=I,$$

где I — тождественный оператор, а D — оператор дифференцирования. Из теоремы Ролля легко следует, что если $u(t)$ — вещественная дважды дифференцируемая функция, то верхняя плотность знакоперемен функции $\delta^2u(t)-u''(t)=e^{-\delta t}(e^{2\delta t}(e^{-\delta t}u(t))')'$ не меньше, чем верхняя плотность знакоперемен функции $u(t)$, т. е. оператор $\delta^2 I-D^2$ не уменьшает верхней плотности знакоперемен, и, следовательно, оператор G_δ при любом $\delta>0$ не увеличивает верхней плотности знакоперемен.

Из теоремы Ролля легко следует, что $\overline{N}_0\leqslant\overline{N}_1\leqslant\overline{N}_2\ \ldots$, так что

$$\lim_{k\to\infty}\overline{N}_k\equiv\frac{\sigma_1}{\pi}$$

существует. Нам надо доказать, что $\sigma=\sigma_1$. Докажем сначала, что $\sigma\leqslant\sigma_1$. Для простоты проведем сначала доказательство этой части теоремы 1 при дополнительном предположении, а именно, будем считать, что все $f_{(k)}(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ — боровские почти периодические функции. (Напомним, что производная от почти периодической функции не обязана быть почти периодической функцией).

Предположим теперь, что

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}, \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n,$$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{N}_k = \frac{\sigma_1}{\pi}$$

но $\sigma > \sigma_1$, т. е. спектр $f(x)$ не сосредоточен в сегменте $[-\sigma_1, \sigma_1]$. Тогда для некоторого $j > 0$ будет $c_j \neq 0$, $\lambda_j > \sigma$. Так как оператор G_δ при любом $\delta > 0$ не увеличивает верхнюю плотность знакоперемен, то верхняя плотность знакоперемен функции $G_{\lambda_j}^k f^{(k)}(t)$ не превышает $\overline{N}_k$, где через $G_{\lambda_j}^k \varphi(x)$ обозначается функция, полученная k-кратным применением оператора G_{λ_j} к функции $\varphi(x)$. Заметим, что

$$(2\lambda_j)^k G_{\lambda_j}^k f^{(k)}(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot i^k \left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^k e^{i\lambda_j t}.$$

Так как функция

$$\frac{2u\delta}{u^2+\delta^2}$$

имеет единственный абсолютный максимум при $u = \delta$ (равный 1), то множитель $\frac{2\lambda_j\lambda_j}{\lambda_j^2+\lambda_j^2} = 1$ — наибольший среди множителей вида

$$\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}.$$

Так как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

то по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ можно найти $N(\varepsilon) > j$ так, чтобы выполнялось

$$\sum_{|n| > N(\varepsilon)} |c_n|^2 < \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| (2\lambda_j)^k G_{\lambda_j}^k f^{(k)}(t) - \sum_{n=-N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)} c_n \cdot i^k \left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^k \cdot e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt =$$

$$= \sum_{|n| > N(\varepsilon)} |c_n|^2 \cdot \left|\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right|^k \leqslant \sum_{|n| > N(\varepsilon)} |c_n|^2 < \varepsilon.$$

Обозначим

$$E_{a,k,N} = \left\{t : \left|(2\lambda_j)^k G_{\lambda_j}^k f^{(k)}(t) - \sum_{n=-N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)} c_n \cdot i^k \left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^k e^{i\lambda_n t}\right| > a\right\}$$

$$E_{a,k,N}(T) = E_{a,k,N} \cap (-T, T)$$

$$E^+ = \{t : c_j e^{i\lambda_j t} + \bar{c}_j e^{-i\lambda_j t} > |c_j|\}$$

$$E^- = \{t : c_j e^{i\lambda_j t} + \bar{c}_j e^{-i\lambda_j t} < -|c_j|\}$$

Множества E^+ и E^- состоят из периодической с периодом $\frac{2\pi}{\lambda_j}$ системы интервалов длиной $\frac{2\pi}{3\lambda_j}$.

$$\inf_{t_1\in E^+,\, t_2\in E^-} |t_2 - t_1| = \frac{\pi}{3\lambda_j}.$$

Так как

$$a^2\frac{\mu E_{a,\,k,\,N(\varepsilon)}(T)}{2T}\leqslant\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left|(2\lambda_j)^k G_{\lambda_j}^k f^{(k)}(t)-\sum_{n=-N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)}c_n i^k\left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^k e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt,$$

то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{\mu E_{a,\,k,\,N(\varepsilon)}(T)}{2T}\geqslant\frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Поэтому, если обозначить через $m^{\pm}(T)$ число интервалов множеств $E^{\pm}(T)$, целиком содержащихся в интервале $(-T, T)$ и не содержащихся в множестве $E_{a,\,k,\,N(\varepsilon)}(T)$, то

$$\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{m^{+}E_{a,\,k,\,N(\varepsilon)}(T)}{2T}\geqslant\frac{\lambda_j}{2\pi}\left(1-\frac{3\varepsilon}{a^2}\right),$$

$$\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{m^{-}E_{a,\,k,\,N(\varepsilon)}(T)}{2T}\geqslant\frac{\lambda_j}{2\pi}\left(1-\frac{3\varepsilon}{a^2}\right),$$

и если $\varepsilon<\left(1-\frac{\sigma_1}{\lambda_j}\right)\frac{|c_j|^2}{12}$, то для любого k существуют точки t_ν,

$$t_{\nu+1}>t_\nu,\quad \nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

такие, что

$$N^{+}=\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{n^{+}(T)}{2T}>\frac{\sigma_1}{2\pi};\quad N^{-}=\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{n^{-}(T)}{2T}>\frac{\sigma_1}{2\pi};$$

$$t_{2s}\in E^{+}\cap CE_{\frac{|c_j|}{2},\,k,\,N(\varepsilon)},\quad t_{2s+1}\in E^{-}\cap CE_{\frac{|c_j|}{2},\,k,\,N(\varepsilon)},\ (s=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

то есть

$$c_j e^{i\lambda_j t_{2s}}+\bar{c}_j e^{-i\lambda_j t_{2s}}>|c_j|,\quad c_j e^{i\lambda_j t_{2s+1}}+\bar{c}_j e^{-i\lambda_j t_{2s+1}}<-|c_j|.$$

$$\left|(2\lambda_j)^k f^{(k)}(t_\nu)-\sum_{|n|\leqslant N(\varepsilon)}c_n i^k\left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^k e^{i\lambda_n t_\nu}\right|<\frac{1}{2}|c_j|,\ (\nu=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

где CE — теоретико-множественное дополнение E, а $n^{+}(T)$, $(n^{-}(T))$ количество точек $t_{2s}(t_{2s+1})$, лежащих в интервале $(-T, T)$. Отметим также, что $|t_{\nu+1}-t_\nu|>\frac{2\pi}{3\lambda_j}$.

Теперь, зафиксировав $N(\varepsilon)$, выберем $k=k_0$ таким большим, чтобы

$$\sum_{|n|\leqslant N(\varepsilon),\ n\neq j}|c_n|\cdot\left|\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right|^{(k_0)}<\frac{|c_j|}{2}.$$

При таком выборе k имеем

$$(-1)^\nu(2\lambda_j)^{k_0}G_{\lambda_j}^{k_0}f^{(k_0)}(t_\nu)\geqslant(-1)^\nu\{c_j e^{i\lambda_j t_\nu}+\bar{c}_j e^{-i\lambda_j t_\nu}\}-$$
$$-\sum_{|n|\leqslant N(\varepsilon),\ n\neq j}|c_n|\cdot\left|\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right|^{k_0}-\left|(2\lambda_j)^{k_0}G_{\lambda_j}^{k_0}f^{(k_0)}(t_\nu)-\right.$$
$$\left.-\sum_{|n|\leqslant N(\varepsilon)}c_n i^k\left(\frac{2\lambda_j\lambda_n}{\lambda_j^2+\lambda_n^2}\right)^{k_0}e^{i\lambda_n t_\nu}\right|\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\overline{N}^{k_0}>\frac{\sigma_1}{\pi},$$

что противоречит условию теоремы, а значит $\sigma\leqslant\sigma_1$.

Проведем теперь доказательство неравенства $\sigma\leqslant\sigma_1$ не предполагая, что все $f^{(k)}(t)$ — боровские почти периодические функции. Пусть

$$\pi\lim_{k\to\infty}\overline{N}_k\equiv\sigma_1<\sigma.$$

Тогда для некоторого $j>0$ будет $|c_j|>0$, $\lambda_j>\delta_1$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства функции

$$\varphi_{h,\,\delta}(u) = \frac{2 \sin \frac{h}{2} u}{u^2 + \delta^2} \qquad (u \geqslant 0).$$

Так как $\varphi_{h,\,\delta}(0) = 0$, $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi_{h,\,\delta}(u) = 0$, то функция $\varphi_{h,\,\delta}(u)$ достигает своего наибольшего на полуоси значения $m_{h,\,\delta}$, причем очевидно, что все точки, в которых функция $\varphi_{h,\,\delta}(u)$ принимает значение $m_{h,\,\delta}$, лежат в интервале $\left(0, \frac{\pi}{h}\right)$. Из неравенств

$$\frac{2}{\pi} h \frac{u}{u^2 + \delta^2} < \frac{2 \sin \frac{h}{2} u}{u^2 + \delta^2} < h \frac{u}{u^2 + \delta^2}$$

следует, что $m_{h,\,\delta} > \frac{h}{\pi \delta}$ и что все точки, в которых $\varphi_{h,\,\delta}(u)$ принимает значение $m_{h,\,\delta}$, лежат в интервале $(\xi_1 \delta, \xi_2 \delta)$, где ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения $\xi^2 - \pi \xi + 1 = 0$. В интервале $\xi_1 \delta < u < \xi_2 \delta$ функции $\varphi^{(j)}_{h,\,\delta}(u)$, $(j = 0, 1, 2)$ при $h \to 0$ ведут себя так же, как и функции $(hu/u^2 + \delta^2)^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2)$, точнее, равномерно по $\delta\,(0 < \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 < \infty)$ и по u $(\xi_1 \delta < u < \xi_2 \delta)$.

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} \varphi^{(j)}_{h,\,\delta}(u) = \left(\frac{u}{u^2 + \delta^2}\right)^{(j)}. \quad (j = 0,\ 1,\ 2).$$

Поэтому существует такое малое $k(\xi)$, $(0 < \xi < 1)$, что при $h < \frac{k(\xi)}{\delta}$ выполняется:

1. функция $\varphi_{h,\,\delta}(u)$ достигает значения $m_{h,\,\delta}$ только в одной точке $u_{h,\,\delta}$; $\lim\limits_{h \to 0} u_{h,\,\delta} = \delta$;

2. существует и единственно $\delta(h, \lambda_j)$, $(1 - \xi)\lambda_j < \delta(h, \lambda_j) < (1 + \xi)\lambda_j$, такое, что, $u_{h,\,\delta(h,\,\lambda_j)} = \lambda_i$,

очевидно, $\lim\limits_{h \to 0} \delta(h, \lambda_j) = \lambda_j$;

3. $$\sup_{|u - \delta| \geqslant \xi \delta} \frac{\varphi_{h,\,\delta}(u)}{m_{h,\,\delta}} < m(\xi) < 1.$$

Пусть

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}$$

$$\sum_{|n| > |N(\varepsilon)} |c_n|^2 < \varepsilon.$$

Ряд Фурье почти периодической функции

$$G^k_\delta \Delta^k_h f(t) = \Delta^k_h G^k_\delta f(t)$$

имеет вид

$$G^k_\delta \Delta^k_h f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{\lambda_n^2 + \delta^2}\right)^k c_n e^{i\lambda_n t}.$$

Отметим, что

$$\left|\frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{\lambda_n^2 + \delta^2}\right| = \varphi_{h,\,\delta}(|\lambda_n|).$$

Выберем теперь $\varepsilon < (1 - \sigma_1/\lambda_j) \frac{|c_j|^2}{12}$ и зафиксируем $N(\varepsilon)$. Затем выберем $0 < \xi < \min\limits_{|n| \leqslant N(\varepsilon),\, n \neq j} |\lambda_n - \lambda_j|$. Выберем $k = k_0$ так, чтобы выполнялось

$$\sum_{|n| \leqslant N(\varepsilon),\ |n| \neq j} |c_n| \cdot [m(\xi)]^{k_0} < \frac{|c_j|}{2}.$$

Выберем, наконец,

$$h = h_0 < \min\left\{\frac{k(\xi)}{2\lambda_j};\ \frac{\pi}{3k_0\lambda_j}\right\}.$$

Теперь, как и раньше, устанавливается существование точек t_ν $(-\infty < \nu < \infty)$, $t_{\nu+1} > t_\nu$ таких, что

$$t_{\nu+1} - t_\nu > \frac{\pi}{3\lambda_j}$$

и

$$(-1)^\nu [\Delta_{h_0}^{k_0} G_{\delta(h_0,\lambda_j)}^{k_0} f(t)]_{t=t_\nu} > 0,$$

причем нижняя плотность множества точек $\{t_{2s}\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{t_{2s+1}\}_{-\infty}^{\infty}$ превышает $\frac{\sigma_1}{2\pi}$. Так как для любой k раз непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ имеет место

$$\Delta_h^k g(t) = h^k g^{(k)}(t'),\ t' \in (t,\ t + kh)$$

то в интервале $(t_\nu,\ t_\nu + k_0 h_0)$ найдется точка t'_ν такая, что

$$(-1)^\nu \frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} [G_{\delta(h_0,\lambda_j)}^{k_0} f(t)]_{t=t'_\nu} > 0,$$

причем вследствие неравенств $t_{\nu+1} - t_\nu > \frac{\pi}{3\lambda_j}$, $k_0 h_0 < \frac{\pi}{3\lambda_j}$ будет иметь место

$$t'_{\nu+1} > t'_\nu.$$

Поэтому функция

$$\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} G_{\delta(h_0,\lambda_j)}^{k_0} f(t)$$

имеет верхнюю плотность знакоперемен большую, чем $\frac{\sigma_1}{2\pi}$. Так как оператор $\delta^2(h_0, \lambda_j) - D^2$ не уменьшает верхней плотности знакоперемен, перестановочен с оператором D^k и является обратным по отношению к оператору $G_{\delta(h_0,\lambda_j)}$, то функция

$$f^{(k_0)}(t) = \frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} [\delta^2(h_0, \lambda_j) I - D^2]^{k_0} G_{\delta(h_0\lambda_j)}^{k_0} f(t) =$$

$$= [\sigma^2(h_0\lambda_j) I - D^2]^{k_0} \frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} G_{\delta(h_0,\lambda_j)}^{k_0} f(t)$$

имеет верхнюю плотность знакоперемен большую, чем функция

$$\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} G_{\delta(h_0,\lambda_j)}^{k_0} f(t).$$

Значит $N_{k_0} > \frac{\sigma_1}{2\pi}$, что противоречит условию теоремы.

Доказательство неравенства $\sigma \leqslant \sigma_1$ проведено в полном объеме.

Приступим теперь к доказательству неравенства $\sigma_1 \leqslant \sigma$, где σ_1 и σ те же, что и выше. В случае $\sigma = \infty$ неравенство очевидно, и мы будем доказывать его лишь в случае $\sigma < \infty$. Хорошо известно [1], что если

$\sigma < \infty$, то $f(x)$ может быть продолжена в комплексную плоскость как целая функция конечной степени σ. Тогда все $f^{(k)}(t)$ ограничены на вещественной оси и, следовательно, являются целыми функциями вполне регулярного роста ([2], стр. 324), индикаторная диаграмма каждой из которых — отрезок $[-i\sigma, i\sigma]$. По теореме Б. Я. Левина ([2], стр. 120) плотность нулей $f^{(k)}(t)$ внутри любого угла, содержащегося в правой полуплоскости и содержащего положительную полуось, не превышает σ/π, то же относится и к отрицательной полуоси, а значит верхняя плотность знакоперемен функций $f^{(k)}(t)$ не превышает σ/π $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, т. е. $\sigma_1 \leqslant \sigma$.

Доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание 1. При доказательстве неравенства $\sigma_1 \leqslant \sigma$ можно было не пользоваться сравнительно сложной теоремой Б. Я. Левина о функциях вполне регулярного роста, а использовать более традиционную для теорий почти периодических функций технику, развитую Йессеном (см. [1], часть II, гл. 2).

Замечание 2. Можно не требовать a'priori бесконечной дифференцируемости $f(x)$, а потребовать лишь, чтобы при всех достаточно малых h верхняя плотность знакоперемен функций

$$\Delta_h^k f(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

была ограничена одной и той же константой M и доказать, что $f(x)$ — целая функция конечной степени, не превышающей M.

Это доказательство получается несущественным изменением предыдущего.

II. КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КЛАССУ $[\sigma]$

Теорема 1 утверждает, что

$$\lim_{k \to \infty} \overline{N}_k = \frac{\sigma}{\pi}.$$

В этой части работы устанавливается, что для функций класса $[\sigma]$ и только для них, начиная с некоторого номера, выполняется равенство $\overline{N}_k = \frac{\sigma}{\pi}$, а также обсуждается вопрос о существовании плотности знакоперемен на вещественной оси у вещественной целой почти периодической функции и ее производных.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — вещественнозначная боровская почти периодическая функция с ограниченным спектром. Для того, чтобы существовало такое m, что при всех $k \geqslant m$ имело место равенство $\overline{N}_k = \frac{\sigma}{\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $[\sigma]$. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $[\sigma]$, то найдется такое m, что при $k \geqslant m$ существуют плотности знакоперемен N_k.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $[\sigma]$. Тогда

$$f(t) = c_\sigma e^{i\sigma t} + \bar{c}_\sigma e^{-i\sigma t} + \sum_{|\lambda_n| < \sigma} c_n e^{i\lambda_n t}.$$

По теореме аппроксимации почти периодических функций для любого $\varepsilon > 0$ существует почти периодический полином $T_\varepsilon(t)$ со спектром, принадлежащим спектру $f(t)$, такой, что

$$|f(t) - T_\varepsilon(t)| < \varepsilon. \quad (-\infty < t < \infty).$$

Выберем почти периодический полином

$$T(t)=\sum_{|\lambda_n|<\sigma} c_n e^{i\lambda_n t}$$

так, чтобы выполнялось

$$|f(t)-T(t)-c_\sigma e^{i\sigma t}-\bar{c}_\sigma e^{-i\sigma t}|<\frac{|c_\sigma|}{2\sqrt{2}}.$$

Применяя неравенство С. Н. Бернштейна ([2], стр. 449), получим

$$|f^{(k)}(t)-T^{(k)}(t)-c_\sigma(i\sigma)^k e^{i\sigma t}-\bar{c}_\sigma(-i\sigma)^k e^{-i\sigma t}|<\frac{|c_\sigma|}{2\sqrt{2}}\sigma^k.$$

Выберем теперь m так, чтобы при $k\geqslant m$

$$|T^{(k)}(t)|\leqslant\frac{|c_\sigma|}{2\sqrt{2}}\sigma^k.$$

Тогда при $k\geqslant m$

$$|f^{(k)}(t)-c_\sigma(i\sigma)^k e^{i\sigma t}-\bar{c}_\sigma(-i\sigma)^k e^{-i\sigma t}|<\frac{|c_\sigma|}{\sqrt{2}}\sigma^k,$$

откуда и вытекает, что при $k\geqslant m$ существуют N_k,

$$\overline{N}_k=N_k=\frac{\sigma}{\pi}.$$

Пусть теперь концы спектра $f(x)$ (точки $-\sigma$ и σ) не входят в спектр $f(x)$. Так как спектр $f^{(k)}(x)$ совпадает со спектром $f(x)$ при любом k, то точки $-\sigma$ и σ не входят в спектр $f^{(k)}(x)$ ни при каком k, а тогда каждая функция $f^{(k)}(z)$ имеет нули со сколь угодно большой мнимой частью ([2], стр. 349), и уж во всяком случае имеет невещественные нули. Пусть z_0 — невещественный нуль функции $f^{(k)}(z)$. Из аналитичности и почти периодичности функции $f^{(k)}(z)$ следует, что она имеет бесконечное множество нулей в полосе $\frac{1}{2}Imz_0<Imz<\frac{3}{2}Imz_0$, причем эти нули расположены относительно плотно. Если теперь обозначить через $n(t_1, t_2, s_1, s_2)$ число нулей функции $f^{(k)}(z)$ в прямоугольнике $t_1<\mathrm{Re}z>t_2$ $s_1<Imz<s_2$, то при любых s_1, s_2 будет ([2], стр. 358)

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{n(-T, T, s_1, s_2)}{2T}\leqslant\frac{\sigma}{\pi},$$

а так как

$$\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{n\left(-T, T, \frac{1}{2}Imz_0\frac{3}{2}Imz_0\right)}{2T}>0,$$

то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{n\left(-T, T, -\frac{1}{2}Imz_0\frac{1}{2}Imz_0\right)}{2T}<\frac{\sigma}{\pi}$$

и подавно $\overline{N}_k<\frac{\sigma}{\pi}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

Теорема 2 доказана.

В связи с доказанной теоремой представляет интерес вопрос: существует ли почти периодическая функция с ограниченным спектром, у которой множество знакоперемен не имеет плотности. Построим пример, показывающий, что *даже если $f(x)$ принадлежит классу $[\sigma]$ и разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье, у $f(x)$ может не существовать плотности знакоперемен N_0, хотя по теореме 2 существуют плотности знакоперемен N_k, начиная с некоторого k.*

Для построения этого примера мы используем один результат Б. Я. Левина и М. Г. Крейна [2] из построенной ими теории распределения нулей целых почти периодических функций класса $[\sigma]$.

Для того, чтобы $f(z)$ была целой почти периодической функцией класса $[\sigma]$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, достаточно выполнения следующих двух условий:

1) *функция $f(z)$ представляется в виде*

$$f(z)=\lim_{N\to\infty}\prod_{-N}^{N}\left(1-\frac{z}{a_k}\right);$$

2) *корни a_k функции $f(z)$ имеют вид:*

$$a_k=\frac{\pi}{\sigma}k+\psi(k),$$

где $\psi(k)$ — почти периодическая функция на группе целых чисел, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Пусть $\psi(k)$ — неотрицательная почти периодическая функция на группе целых чисел с абсолютно сходящимся рядом Фурье такая, что $\psi(k)<\frac{\sigma}{\pi}$, и множество тех k, где $\psi(k)=0$, не имеет плотности. Ниже мы покажем, что такие функции $\psi(k)$ существуют. По теореме М. Г. Крейна и Б. Я. Левина функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{z}{\frac{2\pi}{\sigma}k+\psi(k)}\right)\left(1-\frac{z}{\frac{2\pi}{\sigma}k-\psi(k)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{z}{\frac{2\pi}{\sigma}k+\psi(k)}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{z}{\frac{2\pi}{\sigma}k-\psi(k)}\right)$$

является целой функцией класса $[\sigma]$. Очевидно, что $f(z)$ принимает вещественные значенчя, когда z вещественно. Если $\psi(k)=0$, то функция $f(z)$ имеет кратный нуль $\frac{2\pi}{\sigma}k$ и не меняет знак на отрезке $\left[\frac{2\pi}{\sigma}\left(k-\frac{1}{2}\right),\ \frac{2\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$, а если $\psi(k)\neq 0$, то $f(z)$ имеет простые нули в точках $\frac{2\pi}{\sigma}k-\psi(k)$ и $\frac{2\pi}{\sigma}k+\psi(k)$ и два раза меняет знак на отрезке $\left[\frac{2\pi}{\sigma}\left(k-\frac{1}{2}\right),\ \frac{2\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$. Так как множество тех k, где $\psi(k)=0$, не имеет плотности, то у функции $f(x)$ не существует плотности знакоперемен.

Покажем, что существует неотрицательная почти периодическая функция $\psi(k)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, удовлетворяющая неравенству $\psi(k)<\frac{\pi}{\sigma}$ и такая, что множество тех k, где $\psi(k)=0$, не имеет плотности. Если мы построим периодическую периода 1 по x и по y функцию $F(x, y)$, $0\leqslant F(x, y)<\frac{\pi}{\sigma}$, $(0\leqslant x,\ y<1)$, разлагающуюся в абсолютно сходящийся двойной ряд Фурье, то функция $\psi(k)=F(k, \lambda k)$, где λ — фиксированное иррациональное число, будет почти периодической с абсолютно сходящимся рядом Фурье, и нам осталось показать, что можно построить такую функцию $F(x, y)$, чтобы множество тех k, для которых $F(k, \lambda k)=0$, не имело плотности.

Приступим к построению функции $F(x, y)$ с требуемыми свойствами. Построим на торе $0 \leqslant x < 1 \pmod 1$, $0 \leqslant y < 1 \pmod 1$ некоторую систему непересекающихся открытых квадратов $\pi_\nu (1 \leqslant \nu < \infty)$ со сторонами, равными a_ν, причем точки $z_j = (j, \lambda j)$ будут расположены относительно множества $\pi = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \pi_\nu$ очень нерегулярно в следующем смысле.

Обозначим через $n(T)$ число точек z_j ($|j| < T$), попавших в множество π. Для системы квадратов, которую мы построим, будет иметь место неравенство

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{n(T)}{2T} < \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{n(T)}{2T}. \qquad (**)$$

Очевидно, что если $F(x, y)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, положительная внутри множества π, равная нулю в остальных точках тора и удовлетворяющая условию $0 \leqslant F(x, y) < \frac{\sigma}{\pi}$, то функция $F(x, y)$ — искомая.

Если система квадратов π_ν, удовлетворяющая условию (**) уже построена, то такая функция $F(x, y)$ строится без труда. Мы не будем строить функцию $F(x, y)$, а построим лишь систему квадратов $\pi_\nu (1 \leqslant \nu < \infty)$.

При построении системы квадратов $\pi_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant \infty)$ мы используем эргодическую теорему Кронекера — Вейля [1], частный случай которой нам понадобится в следующей формулировке.

Пусть E — измеримое по Жордану множество на торе $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1 \pmod 1$, $S(E)$ — площадь множества E, λ — иррациональное число, $n_E(T)$ — количество точек тора $z_j = (j, \lambda_j)$, $|j| < T$, принадлежащих множеству E. Тогда при $T \to \infty$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{n(T)}{2T} = S(E).$$

Построение квадратов π_ν и связанных с этим построением целых чисел k_j', k_j'' и $u_j (1 \leqslant j < \infty)$ будем проводить индуктивно. Выберем число d, $0 < d < \frac{1}{2}$ и выберем последовательность положительных чисел d_ν, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^2 < d.$$

Пусть z_j — точка $(j, \lambda j)$ тора. Обозначим через $n_s(T)$ число точек z_j ($|j| < T$), попавших внутрь множества $\bigcup_{\nu=1}^{u_s} \pi_\nu$.

Приступим к построению квадратов π_ν. Выберем k_1' таким большим, чтобы выполнялось

$$\frac{2k_1' - 1}{2k_1'} > 1 - d$$

и положим $u_1 = 2k_1' - 1$. Центрами квадратов $\pi_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant 2k_1' - 1)$ возьмем точки z_j ($|j| < k_1'$), а стороны квадратов π_ν выберем удовлетворяющими условиям $0 < a_\nu < d_\nu$ и такими малыми, чтобы квадраты π_ν не пересекались. Отметим, что при нашем построении выполняется

$$\frac{n_1(k_1')}{2k_1'} > 1 - d.$$

Выберем теперь k_1'' таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{n_1(k_1'')}{2k_1''} < d.$$

Это можно сделать, так как по теореме Кронекера — Вейля

$$\lim_{T\to\infty}\frac{n_1(T)}{2T}=\sum_{\nu=1}^{u_1}a_\nu^2<d.$$

Предположим, что числа k_j', k_j'', u_j $(1\leqslant j\leqslant s)$ уже выбраны и квадраты $\pi_\nu(1\leqslant\nu\leqslant u_s)$ уже построены, причем они не пересекаются, длины их сторон a_ν удовлетворяют неравенствам $0<a_\nu<d_\nu$, и выполняются неравенства

$$\frac{n_j(k_j')}{2k_j'}>1-d;\quad \frac{n_j(k_j'')}{2k_j''}<d;\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

$$k_1'<k_1''<k_2'<k_2''<\ \ldots\ <k_s'<k_s''.$$

Так как по эргодической теореме Кронекера — Вейля

$$\lim_{T\to\infty}\frac{n_s(T)}{2T}=\sum_{\nu=1}^{u_s}a_\nu^2<\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu^2<d,$$

то можно выбрать $k_{s+1}'(k_{s+1}'\gg k_s'')$ таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{n_s(k_{s+1}')+k_s''}{2k_{s+1}'}<d.$$

Из этого неравенства следует, что число точек $z_j(k_s''<|j|<k_{s+1}')$, не попавших в замкнутые квадраты $\pi_\nu(1\leqslant\nu\leqslant u_s)$, будет не меньше, чем $2k_{s+1}'(1-d)$. Выберем u_{s+1} так, чтобы число этих точек равнялось $u_{s+1}-u_s$ и построим квадраты $\pi_\nu(u_s<\nu\leqslant u_{s+1})$ с центрами в этих точках, причем длины a_ν сторон квадратов π_ν $(u_s<\nu\leqslant u_{s+1}$ выберем, удовлетворяющими условиям $a_\nu<d_\nu$ и такими малыми, чтобы квадраты $\pi_\nu(1\leqslant\nu\leqslant u_{s+1})$ не пересекались между собой и чтобы квадраты $\pi_\nu(u_s<\nu\leqslant u_{s+1})$ не пересекались с точками $z_j(0\leqslant|j|\leqslant k_s'')$. Из приведенного построения следует, что если $k\leqslant k_s''$, то

$$n_s(k)=n_{s+1}(k)$$

и

$$\frac{n_{s+1}(k_{s+1}')}{2k_{s+1}'}>1-d.$$

Теперь, используя эргодическую теорему Кронекера — Вейля, так же, как и раньше, выберем $k_{s+1}''>k_{s+1}'$ и такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{n_{s+1}(k_{s+1}'')}{2k_{s+1}''}<d.$$

Этим индуктивное построение заканчивается.

Пусть $\pi=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\pi_\nu$, а $n(T)$ — число точек $z_j(|j|<T)$, попавших в множество π. Из нашего построения следует, что для любого s такого, что $k_s''>k$, будет выполняться

$$n(k)=n_s(k).$$

Поэтому

$$\frac{n(k_j')}{2k_j'} > 1 - d; \quad \frac{n(k_j'')}{2k_j''} < d \quad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

и система прямоугольников π_ν — искомая.

Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю Б. Я. Левину за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. Гостехиздат, М., 1953.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956
3. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, 1952 г., стр. 487.
4. G. Polya, N. Wiener. On the oscillation of the derivatives of a periodic function. Trans. Amer. Math. Soc, 52, 249—256, (1942).
5. G. Szegö. On the oscillation of differential transforms, I, Trans. Amer. Math. Soc., 52, 450—462, (1942).
6. E. Hille. On the oscillation of differential transforms, II, Trans. Amer. Math. Soc., 52, 463—497, (1942).
7. A. C. Schaeffer. On the oscillation of differential transforms, III, Trans. Amer. Math. Soc., 54, 278—285, (1943).
8. G. Szegö. On the oscillation of differential transforms, IV, Trans. Amer. Math. Soc., 53, 463—468, (1943).