НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ n-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЕ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

О. А. Иванова

В работах [1]—[6] Бутцер применил метод полугруппы к классу проблем теории аппроксимаций, причем основные результаты справедливы только для рефлексивных банаховых пространств.

К. Леу [7], используя метод сопряженной полугруппы, обобщил результаты Бутцера на нерефлексивные банаховы пространства. А именно, пусть на банаховом пространстве η с введенной нормой $\|\cdot\|$ задана равномерно ограниченная сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа операторов (определения см. в [8]) $\{T_t(x)\}$, где t — параметр, $x \in H$. Пусть эта полугруппа операторов преобразует пространство H само в себя. Пусть A — инфинитезимальный оператор этой полугруппы, H* — сопряженное пространство, A^* — сопряженный по отношению к A оператор.

Тогда, если F — произвольный элемент из H*, следующие предложения эквивалентны:

1. $\| T_t^* F - F \| = O(t), \quad t \to 0.$

2. $F \in \Delta A^*$, где ΔA^* — область определения оператора A^*.

Кроме того, если $\| T^*F - F \| = o(t)$, $t \to 0$, то $A^*F = 0$ и $T^*F = F$ при всех $t > 0$.

Это основной результат Леу, из которого следуют, как приложения, некоторые теоремы теории функций (см. [7]).

В данной работе доказана аналогичная теорема для n-параметрической полугруппы линейных ограниченных операторов $\{T(x)\} \equiv \{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\}$ (определение n-параметрической полугруппы см. в [8], стр. 347). Здесь параметр $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E^{(n)}$, где $E^{(n)}$ — n-мерное действительное эвклидово пространство, а $x_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ — единичный вектор.

Далее даются приложения к некоторым конкретным полугруппам.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ПОЛУГРУППЕ

Для простоты изложения будем рассматривать двухпараметрическую полугруппу операторов, но результаты верны и для случая $n > 2$.

Пусть H — банахово пространство, на котором задана полугруппа $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\}$ $(\alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2 \geqslant 0)$, которая в силу предположений 1°—5° из [8] (стр. 346), и теоремы 10.10.2 [8] (стр. 348) будет сильно непрерывной и равномерно ограниченной на любом замкнутом квадрате из $E^{(2)}$.

Пусть H* — сопряженное по отношению к H пространство; $\{T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\}$ — сопряженная в смысле определения [7] полугруппа операторов, которая будет непрерывна в слабой* [8] топологии пространства H^* и ра[з]номерно ограничена на любом замкнутом квадрате из $E^{(2)}$.

Теорема 1. *Пусть* $F \in H^*$, *тогда следующие утверждения эквива[]лентны:*

1°. $F \in \Delta A_1^* A_2^*$, $F \in \bigcap_{i=1}^{2} \Delta A_i^*$.

2°. $\| T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^*(\alpha_i x_i) F \| = O(\alpha_1 \alpha_2)$,

$\| T^*(\alpha_i x_i) F - F \| = O(\alpha_i)$, $\alpha_i \to 0$, $i = 1,2$.

Из доказательства теоремы следует, что операторы A_1^* и A_2^* комму[]тируют.

Доказательство. Пусть 1° верно. Так как

$$F \in \bigcap_{i=1}^{2} \Delta A_i^*,$$

то из [7] (теорема 2.2) известно, что $\| T^*(\alpha_i x_i) F - F \| = O(\alpha_i)$, $i = 1,2$ Для доказательства первого равенства из 2° используем интегрально[е] представление

$$\prod_{i=1}^{2} [T(\alpha_i x_i) - I] y = A_1 A_2 \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) y d\xi_1 d\xi_2, \tag{1}$$

верное для всех $y \in \bigcap_{i=1}^{2} \Delta A_i$ (см. [8], стр. 346).

Здесь I — единичный оператор в H и множители A_1 и A_2 можно пе[]реставлять.

Итак, пусть $y \in \bigcap_{i=1}^{2} \bar{\Delta} A_i$. Тогда

$$\langle T^*(\alpha_1 x_1) T^*(\alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^*(\alpha_i x_i) F,\ y \rangle =$$

$$= \langle F,\ T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) y + y - \sum_{i=1}^{2} T(\alpha_i x_i) y \rangle =$$

$$= \left\langle F,\ \prod_{i=1}^{2} [T(\alpha_i x_i) - I] y \right\rangle =$$

$$= \left\langle F,\ A_2 A_1 \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) y d\xi_2 d\xi_1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle A_1^* A_2^* F,\ \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) y d\xi_2 d\xi_1 \right\rangle$$

в силу (1) и того, что $F \in \Delta A_1^* A_2^*$. Далее

$$|\langle T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^*(\alpha_i x_i) F,\ y \rangle| \leqslant \| A_1^* A_2^* F \| M^2 \| y \| \alpha_1 \alpha_2, \tag{2}$$

так как $\| T(\alpha_i x_i) \| \leqslant M$ при $0 < \alpha_i \leqslant 1$. Нас интересует случай малых α_i.

Неравенство (2) верно для всех y из $\bigcap_{i=1}^{2} \bar{\Delta} A_i$, но так как в силу теоремы 2 из [9] множество $\bigcap_{i=1}^{2} \bar{\Delta} A_i$ плотно в H, то (2) верно для всех y из H.

Следовательно,

$$\| T^* (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^* (\alpha_i x_i) F \| \leqslant C \alpha_1 \alpha_2,$$

где $C = \| A_1^* A_2^* F \|$. 2° доказано.

Теперь пусть 2° имеет место. В [7] показано, что из условия

$$\| T^* (\alpha_i x_i) F - F \| = O(\alpha_i)$$

следует, что

$$F \in \bigcap_{i=1}^{2} \Delta A_i^* \ (i = 1,2).$$

Осталось доказать, что $F \in A_1^* A_2^*$.

Первое равенство из 2 означает, что множество

$$S_{t_1, t_2} = \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[T^* (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^* (\alpha_i x_i) F \right] : \ 0 < \alpha_i \leqslant t_i \right\}$$
$$i = 1,2$$

пространства H* ограничено.

По теореме 2.10.2 из [8] замыкание этого множества $\overline{S}_{t_1, t_2}$ слабо * бикомпактно в слабой топологии пространства H*. Далее, $\overline{S}_{t_1', t_2'} \subseteq \overline{S}_{t_1'', t_2''}$ если $t_i' \leqslant t_i''$ $(i = 1,2)$. По известному свойству бикомпактности пересечение

$$\bigcap_{t_i > 0} \overline{S}_{t_1, t_2} \tag{3}$$

непусто. Здесь замыкание $\overline{S}_{t_1, t_2}$ берется в слабой* топологии, т. е. если $y_0 \in \overline{S}_{t_1, t_2}$, то найдутся последовательности чисел $\alpha_1^{(n)}$ и $\alpha_2^{(m)}$, такие, что $\alpha_1^{(n)} \leqslant t_1$, $\alpha_2^{(m)} \leqslant t_2$ и

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{1}{\alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(m)}} \langle T^* (\alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2) F + F - T^* (\alpha_1^{(n)} x_1) F - T^* (\alpha_2^{(m)} x_2) F, \ y \rangle =$$
$$= \langle y_0, \ y_1 \rangle \text{ для } y \in \mathrm{H}.$$

Так как (3) является предельным множеством и оно непусто, существует предельный элемент G, входящий в (3). Таким образом, можно считать, что для G $t_1 \to 0$, $t_2 \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_1^{(n)} = 0, \ \lim_{m \to \infty} \alpha_2^{(m)} = 0.$$

Итак, для $y \in \mathrm{H}$

$$\langle G, \ y \rangle = \left\langle \lim_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} [T^* (\alpha_1 x_1) T^* (\alpha_1 x_2) + I - \sum_{i=1}^{2} T^* (\alpha_i x_i)] F, \ y \right\rangle.$$

В силу того, что $F \in \bigcap_{i=1}^{2} \Delta A_i^*$, простые пределы

$$\left\langle \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) F + F - \sum_{i=1}^{2} T^* (\alpha_i x_i) F, \ y \right\rangle \quad (i = 1,2)$$

существуют, поэтому по известной теореме анализа повторные пределы существуют и равны двойному.

Теперь пусть $y \in \Delta A_2 A_1$.

$$\langle F, A_2A_1y\rangle = \left\langle F, \lim_{\alpha_2\to 0}\lim_{\alpha_1\to 0}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\{T(\alpha_2x_2)[T(\alpha_1x_1)-I]y - \right.$$
$$\left. -[T(\alpha_1x_1)-I]y\}\right\rangle = \lim_{\alpha_2\to 0}\lim_{\alpha_1\to 0}\left\langle\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\{T^*(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)F - \right.$$
$$\left. -\sum_{i=1}^{2}T^*(\alpha_ix_i)F + F\}, y\right\rangle = \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}\left\langle\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}[T^*(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) - \right.$$
$$\left. -\sum_{i=1}^{2}T^*(\alpha_ix_i)+I]F, y\right\rangle = \langle G, y\rangle$$

в силу вышесказанного, непрерывности скалярного произведения и выбора элемента G, так как ΔA_2A_1 плотно в H ([8], стр. 543 и [9]), то равенство $\langle F, A_2A_1y\rangle = \langle G, y\rangle$ дает нам

$$G = A_1^*A_2^*F,$$

т. е.

$$F \in \Delta A_1^*A_2^*.$$

Выбрав y из ΔA_1A_2 и рассуждая точно так же, получим, что

$$G = A_2^*A_1^*F,$$

т. е.

$$F \in \Delta A_2^*A_1^* \text{ и } A_1^*A_2^*F = A_2^*A_1^*F.$$

Теорема доказана.

Для однопараметрической сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $F \in \mathrm{H}^*$ и $\{T(\alpha)\}$ — однопараметрическая сильно непрерывная, равномерно ограниченная полугруппа линейных операторов. Тогда следующие предложения эквивалентны:*

1. $F \in \Delta(A^*)^n$
2. $\| T^*(k\alpha) - C_n^1T^*\overline{(k-1\alpha)} + \ldots + (-1)^k F\| = O(\alpha^k)$
   $\alpha \to 0$, $k = 1, \ldots, n$.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассматривая конкретные полугруппы и применяя теоремы 1 и 2 можно получить некоторые теоремы из теории функций. В дальнейшем используем результаты Леу [7] для однопараметрической сопряженной полугруппы операторов. Будем применять только теорему 1 (для краткости изложения). Приложения теоремы 2 аналогичны.

а) Полугруппа сдвига. Рассмотрим двухпараметрическую полугруппу сдвига: $T(x)f(t_1, t_2) = f(t_1+\alpha_1, t_2+\alpha_2)$. Обозначим через $L_q^{2\pi}(R^2)$ пространство функций $f(t_1, t_2)$, 2π-периодичных по каждому аргументу и суммируемых в q-й степени на R^2, где

$$R^2 = \left\{\begin{matrix} -\pi \leqslant t_1 \leqslant \pi \\ -\pi \leqslant t_2 \leqslant \pi \end{matrix}\right\} 1 < q \leqslant \infty.$$

Согласно результатам Леу [7] и теореме 1 получим следующее утверждение:

Пусть $F(t_1, t_2) \in L_q^{2\pi}(R^2)$. Тогда следующие предложения эквивалентны:

1. *$F(t_1, t_2)$ абсолютно непрерывна в $L_q^{2\pi}(R^2)$ по каждому аргументу в отдельности, F'_{t_1} и F'_{t_2} входят в $L_q^{2\pi}(R^2)$ и абсолютно непрерывны по* t_2 и t_1 *соответственно; F''_{t_1, t_2} и F''_{t_2, t_1} входят в $L_q^{2\pi}(R^2)$ и равны между собой.*

2.
$$\|F(t_1+\alpha_1, t_2+\alpha_2)-F(t_1+\alpha_1, t_2)-F(t_1, t_2+\alpha_2)+ + F(t_1, t_2)\|_q = O(\alpha_1\alpha_2),\ \alpha_i \to 0,\ (i=1,2).$$
$$\|F(t_1, t_2+\alpha_2)-F(t_1, t_2)\|_q = O(\alpha_2),\ \alpha_2\to 0,$$
$$\|F(t_1+\alpha_1, t_2)-F(t_1, t_2)\|_q = O(\alpha_1),\ \alpha_1\to 0.$$

б) Полугруппа Абеля—Пуассона. Двухпараметрическая полугруппа Абеля—Пуассона связана с двоякогармоническими функциями $f(W, Z)$, заданными на бицилиндре $D=\{|W|<1;\ |Z|<1\}$.

По значениям функции $f(e^{it_1}, e^{it_2})$, заданным на поверхности $T = \{|W|=1;\ |Z|=1\}$, можно построить в $D+T$ двоякогармоническую функцию $f(W, Z)$, для которой верна формула Абеля—Пуассона [10]:

$$f(W, Z) = f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it_1}, e^{it_2}) P_{r_1}(\varphi_1-t_1)\cdot P_{r_2}(\varphi_2-t_2)\,dt_1dt_2,$$

где

$$r_1 = e^{-\alpha_1},\ r_2 = e^{-\alpha_2},\ P_r(v) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos v + r_2}.$$

Если применить к функции $f(e^{it_1}, e^{it_2})$ дважды полугрупповой оператор Абеля — Пуассона (см. [7]), получим ту же формулу. Так, применяя теорему 1 и теоремы 4.1 и 4.4 из [7], имеем следующий результат:

Пусть $f(e^{it_1}, e^{it_2}) \in L_q(T)$, $1<q\leqslant\infty$. Тогда следующие предложения эквивалентны:

1.
$$\|\Delta_{\alpha_i}\bar{f}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})\|_q = O(\alpha_i)$$
$$\|\Delta_{\alpha_1\alpha_2}\bar{f}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})\|_q = O(\alpha_1\alpha_2),\ \alpha_i\to 0,\quad i=1, 2,$$

где

$$\bar{f}(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it_1}, e^{it_2}) P_{r_1}(\varphi_1-t_1) P_{r_2}(\varphi_2-t_2)\,dt_1dt_2,$$

а Δ_{α_i} *— первая разность с шагом α_i относительно* i-го *аргумента.*

2. *Для $f(e^{it_1}, e^{it_2}) \in L_q(T)$ найдутся функции g, q* и φ *такие, что они принадлежат $L_q(T)$* и

$$c_{n,m}(g) = |n|\,c_{n,m}(f);\quad c_{n,m}(q) = |m|\,c_{n,m}(f);\quad c_{n,m}(\varphi) = |nm|\,c_{n,m}(f).$$

Доказательство. Первое условие очевидно. Докажем второе. Так как $f(e^{it_1}, e^{it_2}) \in \prod_{i=1}^{2}\Delta A_i^*$, то (см. [7]) это означает, что найдутся такие функции

$$g(e^{it_1}, e^{it_2}) \in L_q(T) \text{ и } q(e^{it_1}, e^{it_2}) \in L_q(T), \text{ что}$$
$$A_1^* f = g,\quad A_2^* f = q;$$
$$\left.\begin{aligned} c_n^{(1)}(t_2)(g) &= |n|\,c_n^{(1)}(t_2)(f)\\ c_n^{(2)}(t_1)(q) &= |n|\,c_n^{(2)}(t_1)(f)\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $c_n^{(i)}$ — коэффициенты Фурье разложения по $t_i\,(i=1, 2)$.

Далее, так как $f \in \Delta A_1^* A_2^*$, то найдется функция
$\varphi(e^{it_1}, e^{it_2}) \in L_q(T)$ такая, что $c_n^{(1)}(t_2)(\varphi) = |n| c_n^{(1)}(t_2)(q)$.

Используя формулы для коэффициентов Фурье и (4), получим

$$c_{n,m}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it_1}, e^{it_2}) e^{-int_1 - imt_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it_1}, e^{it_2}) e^{-int_1} dt_1 \right\} e^{-imt_2} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^{(1)}(t_2)(f) e^{-imt_2} dt_2 = \frac{1}{|n|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^{(1)}(t_2)(g) e^{-imt_2} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{|n|} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it_1}, e^{it_2}) e^{-int_1 - imt_2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{|n|} c_{n,m}(g).$$

Аналогично получим

$$c_{n,m}(f) = \frac{1}{|m|} c_{n,m}(q); \quad c_{n,m}(\varphi) = |m| c_{n,m}(g).$$

Из последних равенств имеем

$$c_{n,m}(\varphi) = |m| c_{n,m}(g) = |mn| c_{n,m}(f),$$

что и требовалось доказать.

в) Полугруппа Пуассона — Вейерштрасса. Пусть дана система дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_1} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}; \\[2ex] \dfrac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Ищем решение системы (5), удовлетворяющее краевому условию

$$u(0, 0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2). \tag{6}$$

Применяя последовательно формулу Гаусса — Вейерштрасса [11], получим:

$$u(t_1, t_2, x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t_2, x_1, x_2) e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{t_1}} d\xi_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t_2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, 0, x_1, x_2) e^{-\sum\limits_{k=1}^{2} \frac{(x_k-\xi_k)^2}{t_k}} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{t_1 t_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2,) e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{t_1} - \frac{(x_2-\xi_2)^2}{t_2}} d\xi_1 d\xi_2. \tag{7}$$

Итак, решение системы (5) — (6) получаем в виде (7). Если к функции $f(x_1, x_2)$ применить двухпараметрическую полугруппу Гаусса — Вейерштрасса, получим формулу (7).

Заметим, что двухпараметрическая полугруппа Гаусса — Вейерштрасса есть произведение однопараметрических полугрупп (об однопараметрической полугруппе Гаусса — Вейерштрасса см. [7]).

Поставим вопрос: какими свойствами обладает функция $f(x_1, x_2)$ из (6), если решение системы (5) и решения каждого из уравнений системы (5) таковы, что они приближаются к краевому условию $f(x_1, x_2)$, в метрике L_q с заданной скоростью?

Ответ дает следующее утверждение, которое получается в результате использования теоремы 1 [7] (т. 5.1):

Пусть $f(t_1, t_2) \in L_q(R^2)$, $1 < q \leqslant \infty$, *где* R^2 — *плоскость.*

Тогда следующие предложения эквивалентны:

1. $f(t_1, t_2)$ *абсолютно непрерывна в* $L_q(R^2)$ по каждому переменному, f'_{t_1} и f'_{t_2} абсолютно непрерывны по t_1 и t_2 *соответственно и* $f''_{t_1t_1}, f''_{t_2t_2} \in L_q(R^2)$; $f''_{t_2t_2}$ и $f'''_{t_2t_2t_1}$ *абсолютно непрерывны по* t_1 *в* $L_q(R^2)$ и $f^{\mathrm{IV}}_{t_2t_2t_1t_1} \in L_q(R^2)$.

2. $$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, u_2) e^{-\frac{(u_1-v_1)^2}{\alpha_1}} dv_1 - f(u_1, u_2) \right\|_q = O(\alpha_1);$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, v_2) e^{-\frac{(u_2-v_2)^2}{\alpha_2}} dv_2 - f(u_1, u_2) \right\|_q = O(\alpha_2);$$

$$\left\| \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2) e^{-\sum_{i=1}^{2} \frac{(u_i-v_i)^2}{\alpha_i}} dv_1 dv_2 + f(u_1, u_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, u_2) e^{-\frac{(u_1-v_1)^2}{\alpha_1}} dv_1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, v_2) e^{-\frac{(u_2-v_2)^2}{\alpha_2}} dv_2 \right\|_q =$$

$$= O(\alpha_1\alpha_2), \quad \alpha_i \to 0 \quad (i = 1, 2).$$

Из теоремы I следует, что $f''_{t_1t_1}$, $f'''_{t_1t_1t_2}$ абсолютно непрерывны по t_2, $f^{\mathrm{IV}}_{t_1t_1t_2t_2} \in L_q(R^2)$ и

$$f^{\mathrm{IV}}_{t_1t_1t_2t_2} = f^{\mathrm{IV}}_{t_2t_2t_1t_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer. J. reine und angew. Math., 197, (1957).
2. P. L. Butzer. C. r. Acad. Sc., 243, 1473—1475 (1956).
3. P. L. Butzer. Math. Ann., 133, 410—425, № 5, 1957.
4. P. L. Butzer. Math. Ann., 134, 154—166 (1957).
5. P. L. Butzer. Math. Z, 70, 93—119 (1958).
6. P. L. Butzer. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A, т. 18, № 1, (1960).
7. K. Leeuw. On the Adjoint Semigroup and Some Problems in the theory of Approximation, Math. Z, 73, № 3, 1960.
8. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Изд-во иностр. лит. М., 1962.
9. N. Dunford and Segal. Semigroup of operators and the Weierstrass theorem, Bull, Amer. Math. Soc., 52, 911—914, (1946).
10. Б. Л. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. ГИИТЛ, 1948.
11. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными. ГИИТЛ, М., 1953.