Выпуск 10 1970

ОБ УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ СРЕДНИХ, ЗАДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ

Н. А. Давыдов

Пусть дана произвольная нижняя треугольная матрица

$$A = \|a_{nk}\| \, (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где a_{nk} — комплексные числа. Тогда для заданной последовательности S_n можно образовать ее A-средние

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Матрица $B = \| b_{nk}^{(p)} \|$ с элементами

$$b_{nk}^{(p)} = \frac{E_{n-k}^{p-1}}{E_n^p} \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$E_n^p = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n!}, \quad E_0^p = 1,$$

называется матрицей Чезаро порядка $p > -1$, а числа

$$\tau_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}^{(p)} S_k \ (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

называются средними Чезаро порядка p для последовательности S_n.

В настоящей работе мы укажем условия, накладываемые на матрицу $A = \| a_{nk} \|$, достаточные или необходимые и достаточные для того, чтобы из равенства $\tau_n^{(p)} = O(1)$, где p — натуральное число, следовало равенство $t_n = O(1)$ или обратно. Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — *нижняя треугольная матрица, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n \to \infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| \right) > 0. \tag{1}$$

Если S_n — *неограниченная последовательность, то* t_n — *неограниченная последовательность.*

Доказательство. Возьмем подпоследовательность S_{n_k} такую, что

$$\max_{0 < n < n_k} |S_n| \leqslant |S_{n_k}| \to \infty \ (k \to \infty).$$

Тогда

$$|t_{n_k}| = \left| \sum_{\nu=0}^{n_k} a_{n_k \nu} S_\nu \right| \geqslant |a_{n_k n_k}| |S_{n_k}| - \sum_{\nu=0}^{n_k - 1} |a_{n_k \nu}| |S_\nu| \geqslant$$

$$\geqslant |S_{n_k}| \left(|a_{n_k n_k}| - \sum_{\nu=0}^{n_k-1} |a_{n_k \nu}| \right)$$

и в силу (1)

$$t_{n_k} \to \infty \quad (k \to \infty).$$

Лемма 2. Система уравнений

$$\sum_{i=k}^{n} x_{ni} b_{ik}^{(p)} = a_{nk} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где $B = \| b_{nk}^{(p)} \|$ *— матрица Чезаро целого положительного порядка* p, *а* $A = \| a_{nk} \|$ *— нижняя треугольная матрица, имеет единственное решение, определяемое по формуле*

$$x_{nk} = \binom{k+p}{k} \Delta^p a_{nk} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

где

$$\Delta^p a_{nk} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu C_p^\nu a_{n,\, k+\nu}$$

— разность p-го порядка элементов n-й строки матрицы

$$A = \| a_{nk} \| \quad (a_{nk} = 0 \text{ для } k > n).$$

Доказательство этой леммы содержится в работе [1, лемма 8].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $A = \| a_{nk} \|$ *— нижняя треугольная матрица и* p *— натуральное число.*

Для того, чтобы из равенства $\tau_n^{(p)} = O(1)$ *всякий раз следовало равенство* $t_n = O(1)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} | \Delta^p a_{nk} | \leqslant H < \infty, \tag{4}$$

где H *не зависит от* n.

Доказательство. Матрицу $X = \| x_{nk} \|$ определим из матричного уравнения

$$X \cdot B = A,$$

где $B = \| b_{nk}^{(p)} \|$ — матрица Чезаро порядка p. Элементы x_{nk} матрицы X должны удовлетворять системе алгебраических уравнений (2). Эта система уравнений по лемме 2 имеет единственное решение, определяемое по формуле (3).

Имеем

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\nu=k}^{n} x_{n\nu} b_{\nu k}^{(p)} \right) S_k = \sum_{k=0}^{n} x_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} b_{k\nu}^{(p)} S_\nu = \sum_{k=0}^{n} x_{nk} \tau_k^{(p)}. \tag{5}$$

Пусть выполнено условие (4) и пусть

$$| \tau_n^{(p)} | \leqslant C \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда из равенства (5) находим

$$| t_n | \leqslant CH,$$

и достаточность условия (4) доказана.

Доказательство необходимости его будем вести методом рассуждения от противного. Пусть

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} | \Delta^p a_{nk} | = \infty. \tag{6}$$

Возьмем последовательность

$$\tau_n'^{(p)} = \begin{cases} 1 \text{ для } n = k, \\ 0 \text{ для } n \neq k, \end{cases}$$

где k — фиксированное число, $k \geqslant 0$. Для этой последовательности $\tau_n'^{(p)}$ найдем последовательность S_n' такую, что

$$\tau_n'^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}^{(p)} S_k'.$$

Имеем

$$t_n' = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k' = \sum_{k=0}^{n} x_{nk} \tau_k'^{(p)} = x_{nk} = \binom{k+p}{k} \Delta^p a_{nk}.$$

Так как из равенства $\tau_n'^{(p)} = O(1)$ должно следовать равенство $t_n' = O(1)$, то

$$|x_{nk}| \leqslant C_k \tag{7}$$

для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$, где C_k не зависит от n.

Построим возрастающую последовательность натуральных чисел n_ν следующим образом.

Число $n_1 > 1$ возьмем таким, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n_1} |x_{n_1, k}| > 1.$$

Считая числа $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ выбранными, число $n_{\nu+1} > n_\nu$ возьмем таким, чтобы

$$\sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} |x_{n_{\nu+1}, k}| > \nu + \sum_{k=0}^{n_\nu} |x_{n_{\nu+1}, k}|.$$

В силу (6) и (7) такое число $n_{\nu+1}$ существует. Этим последовательность n_ν построена.

Рассмотрим последовательность $\tau_n''^{(p)}$, определяемую следующими равенствами:

$$\tau_k''^{(p)} = \operatorname{sign} x_{n_1, k} \text{ для } 0 \leqslant k \leqslant n_1,$$

$$\tau_k''^{(p)} = \operatorname{sign} x_{n_{\nu+1}, k} \text{ для } n_\nu < k \leqslant n_{\nu+1}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots).$$

Эта последовательность ограничена:

$$|\tau_n''^{(p)}| \leqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для нее найдем последовательность S_n'' такую, что

$$\tau_n''^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}^{(p)} S_k'' \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$|t_{n_{\nu+1}}''| = \left| \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} a_{n_{\nu+1}, k} S_k'' \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} x_{n_{\nu+1}, k} \tau_k''^{(p)} \right| \geqslant \left| \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} x_{n_{\nu+1}, k} \tau_k''^{(p)} \right| -$$

$$- \left| \sum_{k=0}^{n_\nu} x_{n_{\nu+1}, k} \tau_k''^{p} \right| \geqslant \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} |x_{n_{\nu+1}, k}| - \sum_{k=0}^{n_\nu} |x_{n_{\nu+1}, k}| > \nu,$$

то t_n — неограниченная последовательность. Этим доказана необходимость условия (4).

Следствие. *Если нижняя треугольная матрица* $A = \|a_{nk}\|$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} \leqslant H < \infty$,

где H не зависит от n;

2) $\Delta^p a_{nk} \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ n > n_0)$,

где p — натуральное число, то из равенства $\tau_n^{(p)} = O(1)$ *всякий раз следует равенство* $t_n = O(1)$.

Действительно, сложив уравнения (2), получим

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \sum_{k=0}^{n} x_{nk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} \Delta^p a_{nk}. \tag{8}$$

Отсюда и из условий следствия получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} \cdot |\Delta^p a_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} \Delta^p a_{nk} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \leqslant H < \infty.$$

Этим следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная матрица и p — натуральное число. Для того, чтобы из равенства $t_n = O(1)$ всякий раз следовало равенство $\tau_n^{(p)} = O(1)$, достаточно, чтобы матрица $A = \|a_{nk}\|$ удовлетворяла следующим условиям:*

1) $\Delta^p a_{nk} \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots n,\ n > n_0)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^p a_{nn}) > \dfrac{\alpha \cdot p!}{2}$,

где

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}.$$

Доказательство. Из равенства (8) в силу условия 1) следует неравенство

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \geqslant 0.$$

Из условия 2) в силу равенства [2, стр. 131]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n^p}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{1}{p!}$$

получаем

$$a_{nn} > \frac{\theta}{E_n^p} \text{ для } n > N_1(\theta), \tag{9}$$

где θ не зависит от n и

$$\frac{\alpha}{2} < \theta < \lim_{n\to\infty} \frac{n^p a_{nn}}{p!}.$$

Для любого r, $\alpha < r < 2\theta$, найдется число $N_2(r)$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} < r \text{ для } n > N_2(r). \tag{10}$$

Заметив, что $\Delta^p a_{nn} = a_{nn}$, из (8), (9) и (10) для $n > \max\{N_1, N_2\}$ найдем

$$E_n^p |\Delta^p a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} E_k^p |\Delta^p a_{nk}| = E_n^p a_{nn} - \sum_{k=0}^{n-1} E_k^p \Delta^p a_{nk} =$$

$$= E_n^p a_{nn} - \left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk} - E_n^p a_{nn}\right) = 2E_n^p a_{nn} - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} > 2\theta - r > 0,$$

т. е. для матрицы $X = \|x_{nk}\|$ справедливо неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(|x_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |x_{nk}|\right) > 0. \tag{11}$$

Отсюда и из (5) в силу леммы 1 следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 3. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная матрица и p — натуральное число. Для того, чтобы из равенства $\tau_n^{(p)} = O(1)$ всякий раз следовало равенство $t_n = O(1)$ и обратно, достаточно, чтобы матрица $A = \|a_{nk}\|$ удовлетворяла следующим условиям:*

1) $\Delta^p a_{nk} \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots n, n > n_0)$;

2) $a_{nn} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$;

3) $\varliminf_{n\to\infty} (n^p a_{nn}) > \frac{\sigma \cdot p!}{2}$,

где

$$\sigma = \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения второй части теоремы следует (по теореме 2) из условий 1) и 3), из этих же условий, как было показано выше, вытекает неравенство (11).

Из (11) и условия 2) теоремы 3 получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{nk}| \leqslant H < \infty,$$

где H не зависит от n. Справедливость утверждения первой части теоремы теперь следует из равенства (5) и теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов. О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов. УМН, т. 19, 1967, № 4, 29—47.

2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1. «Мир», М., 1965.

Поступила 9 декабря 1968 г.