ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

К ВОПРОСУ О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

П. Е. Левин

Рассматриваются классы единственности и неединственности решений нормального типа по t задачи Коши:

$$P(D_x, D_t)\,u(x, t) = 0, \tag{1}$$

$$D_t^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots m-1, \ t \geqslant 0, \ -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

где $P(s, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} P_k(s)\lambda^k$ — многочлен с постоянными коэффициентами порядка N по s и m по λ; $P_m(s) \not\equiv 0$.

В [1] проведена классификация уравнений вида (1) и получены условия того, что решение $u(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющее оценке

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\{\beta t\}\, G(x), \tag{3}$$

$$k = 0, 1, \dots N-1; \ -\infty < x < +\infty; \ t \geqslant 0; \ \beta > 0,$$

есть тождественный нуль. Однако для некоторых уравнений вида (1) полученные в [1] условия оставляют «зазор» между классами единственности и неединственности решения задачи Коши. Целью настоящей статьи является ликвидация этого пробела. Пусть

$$s_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}\lambda^{\gamma_{kj}} = a_{k0}\lambda^{\gamma_{k0}}(1 + o(1)),$$

$$k = 1, \dots, N; \ \gamma_{k0} > \gamma_{k1} > \dots > \gamma_{kj} > \dots; \ o(1) \to 0, \ |\lambda| \to \infty$$

разложение корней полинома $P(s, \lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки [2]. Мы будем рассматривать те уравнения, для которых выполнены условия

$$P_m(s) \not\equiv \mathrm{const}, \ P_m(0) \neq 0, \ \min_{k\,:\,\gamma_{k_0}=0} |\mathrm{Re}\, a_{k0}| = a > 0. \tag{4}$$

Преобразование Лапласа по t нашего решения является аналитической в некоторой правой полуплоскости функцией $y(x, \lambda)$, удовлетворяющей в силу (1)—(2) уравнению

$$P(D_x, \lambda)\, y(x, \lambda) = 0 \tag{5}$$

и в силу (3) —оценке

$$|D_x^k y(x, \lambda)| \leqslant C_1 G(x), \tag{6}$$

$$k = 0, 1, \dots N-1; \ -\infty < x < +\infty; \ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > 0.$$

Из теоремы единственности преобразования Лапласа следует, что задача (1) —(2) в классе (3) имеет нетривиальное решение $u(x, t)$ тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет в классе (6) нетривиальное решение $y(x, \lambda)$. Функции $y_k(x, \lambda) = Q_k(x) \exp\{s_k(\lambda) x\}$, где $Q_k(x)$ — полиномы, степень которых меньше кратности корня $s_k(\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (5) и значит,

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} C_k(\lambda) y_k(x, \lambda). \tag{7}$$

Дифференцируя (7) $N-1$ раз по x, мы получаем систему уравнений для определения $C_k(\lambda)$, используя (6) и вид функций $y_k(x, \lambda)$, получаем, как и в [1], оценку:

$$|C_k(\lambda)| \leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} G(x) \exp\{-\operatorname{Re} s_k(\lambda) x\}, \tag{8}$$
$$k = 1, \dots N;\ M_1 > 0,\ M_2 > 0;\ -\infty < x < \infty;\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0.$$

Для тех корней $s_k(\lambda)$ полинома $P(s, \lambda)$, у которых $\gamma_{k0} = 0$, $|\operatorname{Re} a_{k0}| = a$, вводим следующие величины:

$$\delta = \max \gamma_{k1};\ g_k(\lambda) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{k0} \cdot \operatorname{Re}[s_k(\lambda) - a_{k0}], \tag{9}$$
$$D_k = \{\lambda : g_k(\lambda) > 0\};\quad \varphi_0 = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{k0}.$$

Возможны три случая:

I. $\delta < 0$; для всех $g_k(\lambda)$ справедливо $\sup\limits_{\lambda \in D_k} \operatorname{Re}\lambda = \infty$.

II. $\delta < 0$; существует k, такое что $g_k(\lambda) \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$.

III. $\delta = 0$; что соответствует наличию корня

$$s_k(\lambda) = a_{k0},\ |\operatorname{Re} a_{k0}| = a.$$

Каждое рассматриваемое уравнение (1) относится к одному (и только к одному) из этих типов.

Теорема 1. *Для единственности решения задачи Коши в случае I в классе:*

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\{\beta t + \alpha |x|\} \tag{10}$$
$$k = 0, 1, \dots N-1;\ \beta > 0;\ t \geqslant 0;\ -\infty < x < \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \leqslant a$.

Доказательство. Пусть $\alpha \leqslant a$. Используя (8) и (10), получаем

$$|C_k(\lambda)| \leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{-\operatorname{Re} s_k(\lambda) x + \alpha |x|\}. \tag{8'}$$

Выбрав $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} \operatorname{Re} s_k(\lambda)$, используя (4), в случаях, когда либо $\gamma_{k0} > 0$, либо $\gamma_{k0} = 0$, $|\operatorname{Re} a_{k0}| > a$, получим в достаточно далекой правой полуплоскости (за исключением, быть может, конечного числа как угодно узких секторов) оценку: $|\operatorname{Re} s_k(\lambda)| > a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, т. е.

$$|C_k(\lambda)| \leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{-\varepsilon |x|\}$$

(в силу $\alpha \leqslant a$). Устремив $|x| \to \infty$, получаем, что $C_k(\lambda) \equiv 0$. Пусть $\gamma_{k0} = 0$, $|\operatorname{Re} a_{k0}| = a$. Возьмем $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{k0}$ (в достаточно далекой правой полуплоскости $\operatorname{sign} \operatorname{Re} s_k(\lambda) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{k0}$). Тогда получим

$$|C_k(\lambda)| \leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{-|\operatorname{Re} s_k(\lambda)| |x| + \alpha |x|\} \leqslant$$
$$\leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{-|a + g_k(\lambda)| |x| + \alpha |x|\} \leqslant C |\lambda|^{M_1} (1 +$$
$$+ |x|)^{M_2} \exp\{-g_k(\lambda) x\}.$$

Отсюда, устремив $|x| \to \infty$, получим при $\lambda \in D_k$ $C_k(\lambda) = 0$. Но D_k в силу непрерывности $g_k(\lambda)$ и предположения 1 имеет конечную точку сгущения в любой как угодно далекой правой полуплоскости, следовательно,

$C_k(\lambda) \equiv 0$, $k=1,\dots N$. Следовательно, $y(x, \lambda) \equiv 0$, а поэтому и $u(x,t) \equiv$ $\equiv 0$.

В случае $\alpha > a$ наличие нетривиального решения задачи (1) — (2) в классе (10) показано в [1].

Теорема 2. *Для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в случаях II или III в классе (10) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha < a$.*

Доказательство. Достаточность утверждения этой теоремы была показана в [1], так как класс (10) с $\alpha < a$ совпадает с классом единственности теоремы 2 из [1].

Необходимость. Пусть $\alpha \geqslant a$. В случае II при некотором k

$$\gamma_{k0} = 0, \quad |\operatorname{Re} a_{k0}| = a, \quad g_k(\lambda) \leqslant 0 \, (\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0).$$

Рассмотрим $y(x, \lambda) = \exp\{s_k(\lambda)x\}$. Тогда, используя вытекающую из (4) ограниченность $|s_k(\lambda)|$, получим

$$|D_x^j y(x, \lambda)| \leqslant |s_k(\lambda)|^j \exp\{\operatorname{Re} s_k(\lambda)\|x|\} \leqslant$$
$$\leqslant C \exp\{|a+g_k(\lambda)||x|\} \leqslant C\exp\{\alpha|x|\},$$

где $\alpha \geqslant a$. Тогда $z(x, \lambda) = \lambda^{-2} y(x, \lambda)$ также является решением уравнения (5), удовлетворяющим условию

$$|D_x^j z(x, \lambda)| \leqslant C\exp\{\alpha|x|\}, \quad j = 0, 1, \dots N-1,$$

с $\alpha \geqslant a$ и $u(x, t) = L^{-1} z(x, \lambda)$ дает нетривиальное решение задачи (1) — (2), удовлетворяющее (10) с $\alpha \geqslant a$.

В случае III существует корень $s_j(\lambda) = a_{j0}$; $|\operatorname{Re} a_{j0}| = a$ и $u(x, t) =$ $= L^{-1} z(x, \lambda)$, где $z(x, \lambda) = \lambda^{-2} \exp\{s_j(\lambda)x\}$, дает нетривиальное решение задачи (1) — (2) в классе (10) с $\alpha \geqslant a$.

Теоремы 1 и 2 исчерпывают вопрос о классах единственности и неединственности решения задачи (1) — (2) для рассматриваемых уравнений в классе (10). Однако при этом остается открытым вопрос о единственности решения задачи (1) — (2) в классе (3), если функция $G(x)$ не имеет вид $\exp\{\alpha|x|\}$, например, в классе с $G(x) = \exp\{[a+f(|x|)]|x|\}$, $f(|x|) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$. Исследованию этого вопроса посвящены теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в случае I в классе:*

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C\exp\{\beta t + [a + f(|x|)]|x|\} \tag{11}$$
$$k = 0, \dots, N-1; \quad \beta > 0; \quad t \geqslant 0; \quad -\infty < x < \infty,$$

где $f(|x|) > 0$, непрерывная функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{|x|>0} f(|x|) = 0.$$

Доказательство достаточности проводится аналогично доказательству достаточности теоремы 1 с той лишь разницей, что $|x|$ устремляем к ∞ не произвольно, а по последовательности, минимизирующей функцию $f(|x|)$. Если же $\inf f(|x|) > 0$, то существует решение $u(x, t)$, $u(x, t) \not\equiv 0$, задачи (1) — (2), удовлетворяющее (11), что следует из теоремы 1.

Перейдем к рассмотрению случая II. Будет использоваться следующая

Лемма. *Пусть в (4): $\gamma_{k0} = 0$, $|\operatorname{Re} a_{k0}| = a$, $g_k(\lambda) \leqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant$ $\geqslant \sigma_0 > 0$. Тогда существуют такие $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и $\alpha_k \leqslant \gamma_{k1} < 0$, что*

$$g_k(\lambda) \leqslant -\delta_1|\lambda|^{\alpha_k}; \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0 \tag{12}$$

и либо при $\tau > \tau_0 > 0$, *либо при* $\tau < -\tau_0 < 0$

$$|g_k(\sigma_0 + i\tau)| \leqslant \delta_2 |\tau|^{\alpha_k}. \tag{13}$$

Доказательство. По определению $g_k(\lambda)$ имеем

$$g_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \cdot |\lambda|^{\gamma_{kj}} \cdot c_{kj}(\lambda), \tag{14}$$

где $c_{kj}(\lambda) = \cos(\arg a_{kj} - |\gamma_{kj}| \arg \lambda) \cdot \varphi_0$. Из условия $g_k(\lambda) \leqslant 0$ нетрудно получить, что $c_{k1}(\lambda) = -|c_{k1}(\lambda)|$. Могут представиться две возможности: а) $|c_{k1}(\lambda)| \geqslant m_1 > 0$ при $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}$; б) $c_{k1}(\lambda) \to 0$ либо при $\arg\lambda \to \frac{\pi}{2}$, либо при $\arg\lambda \to -\frac{\pi}{2}$. В случае а) очевидно, что

$$g_k(\lambda) \leqslant -|a_{k1}(\lambda)| \frac{m_1}{2} |\lambda|^{\gamma_{k1}} \tag{15}$$

и тем самым имеет место (12) и (13) с $\alpha_k = \gamma_{k1}$. В случае б) для определенности положим $c_{k1}(\lambda) \to 0$ при $\arg\lambda \to \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$|c_{k1}(\lambda)| = \sin\left[|\gamma_{k1}|\left(\frac{\pi}{2} - \arg\lambda\right)\right]. \tag{16}$$

Пусть далее $c_{kj}(\lambda) \to 0$ при $\arg\lambda \to \frac{\pi}{2}$, $j = 2, \ldots n-1$, но $|c_{kn}(\lambda)| \geqslant m_n > 0$ при $\arg\lambda \to \frac{\pi}{2}$. Тогда при $j = 2, \ldots n-1$ снова $|c_{kj}(\lambda)| = \sin \times \left[|\gamma_{kj}|\left(\frac{\pi}{2} - \arg\lambda\right)\right]$, и если $\lambda \in \Gamma = \left\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0;\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg\lambda < \frac{\pi}{2}\right\}$, ε — достаточно малое, получим $|c_{kj}(\lambda)| \leqslant c|c_{k1}(\lambda)|$. Возвращаясь к (14) и учитывая, что $\gamma_{kj} < \gamma_{k1} < 0$ $(j > 1)$, получим при $\lambda \in \Gamma$

$$g_k(\lambda) \leqslant -\frac{1}{2}|a_{k1}||\lambda|^{\gamma_{k1}}|c_{k1}(\lambda)| + c_{kn}(\lambda)|\lambda|^{\gamma_{kn}}(1 + o(1)). \tag{17}$$

Из (16) вытекает оценка $|c_{k1}(\lambda)| \geqslant \frac{1}{\pi}|\gamma_{k1}|\sigma_0|\lambda|^{-1}$ при $\lambda \in \Gamma$. Рассмотрим теперь два случая: $\gamma_{kn} \leqslant \gamma_{k1} - 1$; $\gamma_{kn} > \gamma_{k1} - 1$. В первом случае имеем из (17) при $\lambda \in \Gamma$

$$g_k(\lambda) \leqslant -\delta_1|\lambda|^{\gamma_{k1}-1};\quad 0 < \delta_1 < \frac{|a_{k1}||\gamma_{k1}|\sigma_0}{2\pi} - |a_{kn}|. \tag{18}$$

Во втором случае при фиксированном σ $(\sigma \geqslant \sigma_0)$ имеет место соотношение $g_k(\sigma + i\tau) = c_{kn}(\sigma + i\tau)|a_{kn}||\tau|^{\gamma_{kn}}(1 + o(1))$, при $|\tau| \to \infty$, откуда следует, что $c_{kn}(\sigma + i\tau) < 0$ при достаточно больших значениях $|\tau|$. Отсюда в силу выбора n $c_{kn}(\lambda) = -|c_{kn}(\lambda)|$, возвращаясь к (17) и учитывая оценку $|c_{k1}(\lambda)|$, получим

$$g_k(\lambda) \leqslant -|a_{kn}|\frac{m_n}{2}|\lambda|^{\gamma_{kn}},\ \lambda \in \Gamma. \tag{19}$$

Если $c_{kj}(\lambda) \to 0$ при $\arg\lambda \to \frac{\pi}{2}$ и всех $j > 1$, то, поскольку в силу [2] при достаточно больших j $\gamma_{kj} \leqslant \gamma_{k1} - 1$, имеем, как и в случае $\gamma_{kn} \leqslant \gamma_{k1} - 1$, оценку (18). Оценки, аналогичные (18) или (19), имеют место и при

$$\lambda \in \tilde{\Gamma} = \left\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0;\ -\frac{\pi}{2} < \arg\lambda < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right\},$$

если $c_{k1}(\lambda)\to 0$ при $\arg\lambda\to-\frac{\pi}{2}$. Наконец, в области $-\frac{\pi}{2}<\arg\lambda<$ $<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ справедлива оценка вида (15). Объединяя (15), (18), (19) приходим к (12).

Рассматривая $c_{kj}(\sigma_0+i\tau)$ при $|\tau|\to\infty$ и проводя аналогичные рассуждения, получим (13).

Заметим, что в процессе доказательства леммы получены формулы:

в случае а) $\alpha_k=\gamma_{k1}$;

в случае б) $\alpha_k=\max[\gamma_{k1}-1,\ \gamma_{kn}]$.

В силу условия $\delta<0$ имеем $\alpha_k<0$.

Обозначим $l=-\dfrac{1}{\max\limits_k \alpha_k}$.

Теорема 4. *Для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в случае II в классе*

$$|D_x^k u(x,t)|\leqslant C\exp\{\beta t+a|x|\}-\int_0^{|x|}H(t)\,dt, \tag{20}$$

$$k=0,\dots,N-1;\quad t\geqslant 0;\quad -\infty<x<\infty;\quad \beta>0,$$

где $H(x)>0$, непрерывная, монотонно стремящаяся (при $x\to\infty$) к нулю функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty}[H(x)]^{1+l}\,dx=\infty. \tag{21}$$

Доказательство. Так как класс (20) содержится в классе (10) с $\alpha=a$, то точно так же, как и при доказательстве достаточности теоремы 1, полагая

$$Lu(x,t)=y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{N}C_k(\lambda)\,y_k(x,\lambda),$$

заключаем, что в случаях $\gamma_{k0}>0$; $\gamma_{k0}=0,|\operatorname{Re}a_{k0}|>a$; $\gamma_{k0}=0,|\operatorname{Re}a_{k0}|=a$, $\sup\limits_{\lambda\in D_k}\operatorname{Re}\lambda=\infty$, $C_k(\lambda)\equiv 0$.

Нам остается рассмотреть случай, когда $\gamma_{k0}=0$, $|\operatorname{Re}a_{k0}|=a$, $g_k(\lambda)<0$. Из (8) имеем

$$|C_k(\lambda)|\leqslant C_1|\lambda|^{M_1}(1+|x|)^{M_1}\exp\Big\{-\operatorname{Re}s_k(\lambda)x+a|x|-\int_0^{|x|}H(t)\,dt\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant C_1|\lambda|^{M_1}(1+|x|)^{M_1}\exp\Big\{|g_k(\lambda)||x|-\int_0^{|x|}H(t)\,dt\Big\},$$

поскольку $|\operatorname{Re}s_k(\lambda)|=a+g_k(\lambda)$; $g_k(\lambda)=-|g_k(\lambda)|$. Введем голоморфную и ограниченную в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0>0$ функцию

$$f_k(\lambda)=\frac{C_k(\lambda)}{\lambda^{M_1}}$$

и оценим ее на той полувертикали $\sigma_0+i\tau$, где выполнено (13),

$$|f_k(\sigma_0+i\tau)|\leqslant C_2\exp\Big\{\delta_3|\tau|^{\alpha_k}|x|-\int_0^{|x|}H(t)\,dt\Big\},\quad \delta_3>\delta_2.$$

Выберем $|x| = x(\tau)$, где $H[x(\tau)] = \delta_4 |\tau|^{-\frac{1}{l}}$, $\delta_4 > \delta_3$. Тогда, учитывая, что $\alpha_k \leqslant -\frac{1}{l}$, получаем

$$|f_k(\sigma_0 + i\tau)| \leqslant C \exp\{\delta_3 |\tau|^{-\frac{1}{l}} x(\tau) - \delta_4 |\tau|^{-\frac{1}{l}} x|\tau|\} \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\{-\varepsilon_1 |\tau|^{-\frac{1}{l}} x(\tau)\}; \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Интегрируя по частям и используя (21), получим

$$\int^{\infty} \tau^{-\frac{1}{l}-2} x(\tau)\, d\tau = \infty.$$

В силу критерия Карлемана [3] $f_k(\lambda) \equiv 0$. Значит и $C_k(\lambda) \equiv 0$, $k = 1, \ldots N$, что и требовалось доказать.

Необходимость. Допустим (21) не выполнено. В силу леммы существует $s_k(\lambda)$ такое, что

$$\gamma_{k0} = 0, \ |\mathrm{Re}\, a_{k0}| = a, \ g_k(\lambda) \leqslant -\delta_1 |\lambda|^{-\frac{1}{l}}.$$

Обозначим $y(x, \lambda) = \exp\{s_k(\lambda) x\}$,

$$f(\lambda) = \sup_{1 < i < N-1} |D_x^i y(x, \lambda)| \exp\{-a|x| + \int_0^{|x|} H(t)\, dt\}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Используя (12) и оценку $|s_k(\lambda)| \leqslant C_3$; $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, получим

$$f(\lambda) \leqslant C_3 \exp\{-\delta_1 r^{-\frac{1}{l}} x(r) + \int_0^{x(r)} H(t)\, dt\} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \exp\{\int_0^{x(r)} H(t)\, dt\},$$

где $|\lambda| = r$; $H[x(r)] = \delta_1 r^{-\frac{1}{l}}$.

Рассмотрим $f(r) = \int_0^{x(r)} H(t)\, dt$. Меняя пределы интегрирования и используя сходимость интеграла в (21), мы получаем

$$\int^{\infty} \frac{f(r)}{r^2}\, dr < \infty.$$

Но тогда существует [см. 3] голоморфная в некоторой правой полуплоскости функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что

$$|F(\lambda) f(\lambda)| \leqslant C_4 < \infty; \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0.$$

Функция $z(x, \lambda) = F(\lambda) y(x, \lambda)$ является решением уравнения (4), и так как

$$|D_x^j z(x, \lambda)| \leqslant C \exp\{a|x| - \int_0^{|x|} H(t)\, dt\},$$

$$J = 0, 1, \ldots, N-1; \quad -\infty < x < \infty; \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0,$$

то $u(x, t) = L^{-1}[\lambda^{-2} z(x, \lambda)]$ является нетривиальным решением задачи (1)—(2) в классе (20), если интеграл в левой части (21) сходится. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю В. М. Борок.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. ДАН СССР, т. 177, № 4, 1967, 759—762.
2. Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М. — Л, 1948.
3. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. ИЛ, М., 1955.

Поступила 14 декабря 1968 г.