О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРЕЖАЮЩИМ ВРЕМЕНЕМ

В. М. Борок, Я. И. Житомирский

1°. В последнее время усилился интерес к изучению различных задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных с отклоняющимся временем. Одну из таких задач мы рассмотрим в данной работе.

Для уравнений в частных производных вида

$$D_t^m u(x, t-m\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(D_x) D_t^k u(x, t-k\tau) \tag{1}$$

$$-\infty < x < \infty, \ 0 \leqslant t < \infty, \ \tau > 0,$$

$P_k(s)$ — произвольные полиномы с постоянными комплексными коэффициентами порядка N по s, рассмотрим основную начальную задачу

$$u(x, t) \equiv 0, \ 0 \leqslant t < \tau m, \ -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

По аналогии с хорошо изученной задачей Коши для уравнений в частных производных без отклонений времени мы ставим в данной работе вопрос о том, при каких условиях на рост функции $f(x)$, при $|x| \to \infty$, из оценки вида

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\{\alpha t\} f(x) \tag{3}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1, \ -\infty < x < \infty, \ t \geqslant \tau m, \ \alpha > 0$$

вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$. При этом мы рассматриваем лишь те решения задачи (1)—(2), которые имеют нормальный тип по t, т. е. вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), растут при каждом фиксированном x и $t \to \infty$ не быстрее, чем $\exp\{\alpha t\}$ при некотором фиксированном значении $\alpha > 0$.

В п. 2° данной работы мы даем ответ на поставленный выше вопрос, а в п. 3° рассматриваем аналогичную задачу для других типов уравнений с отклоняющимся временем: а) не разрешенных относительно старшей производной по t; б) дифференциально разностных по t и разностных по x; в) для некоторых уравнений вида (1) с коэффициентами, зависящими от x.

В заключение в п. 4° мы приводим некоторые примеры, показывающие существенность предположения о нормальности типа по t решения задачи (1)—(2).

2°. Пусть p_0 — приведенный порядок уравнения (1), т. е. [1]:

$$p_0 = \max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \frac{h_k}{m-k},$$

где h_k — степень полинома $P_k(s)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы решение* $u(x, t)$ *задачи* (1)—(2), *удовлетворяющее оценке* (3) *с* $f(x) = \exp\left\{\int_0^{|x|} H(y)\,dy\right\}$, *где* $H(y) > 0$ — *возрастающая при* $y > 0$ *дифференцируемая функция, было тождественно равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{\infty} [H(y)]^{1-p_0} dy = \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — преобразование Лапласа решения $u(x, t)$ задачи (1)—(2). Тогда $y(x, \lambda)$ является аналитической при $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ функцией и удовлетворяет уравнению

$$\lambda^m e^{-m\tau\lambda} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k e^{-k\tau\lambda} P_k(D_x)\, y(x, \lambda); \tag{5}$$

кроме того, в силу (3) имеет место оценка

$$|D_x^k y(x, \lambda)| \leqslant C_1 f(x), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad -\infty < x < \infty. \tag{6}$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству следующего факта: для того, чтобы уравнение (5) имело нетривиальное решение $y(x, \lambda)$, аналитическое в некоторой правой полуплоскости и удовлетворяющее в ней оценке (6), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [H(y)]^{1-p_0} dy < \infty. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть выполнено (4) и пусть $y(x, \lambda)$ — аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ решение уравнения (5), удовлетворяющее условию (6).

В силу вида уравнения (5) ясно, что

$$y(x, \lambda) \equiv z(x, \lambda e^{-\tau\lambda}) \equiv z(x, \mu),$$

причем функция $z(x, \mu)$ является решением уравнения

$$\mu^m = \sum_{k=0}^{m-1} \mu^k P_k(D_x)\, z(x, \mu). \tag{8}$$

Поскольку образ полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ при отображении $\mu = \lambda e^{-\tau\lambda}$ заведомо содержит некоторую полуплоскость $\operatorname{Re}\mu \geqslant \mu_0 > 0$, то в силу (6) справедлива оценка

$$|D_x^k z(x, \mu)| \leqslant C_1 f(x), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad \operatorname{Re}\mu \geqslant \mu_0. \tag{9}$$

Итак, функция $z(x, \mu)$ является аналитическим в полуплоскости $\operatorname{Re}\mu \geqslant \mu_0$ решением уравнения (8), удовлетворяющим в ней оценке (9). Тогда, как показано в [2], из (9) в силу условия (4) вытекает, что $z(x, \mu) \equiv 0$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ будем иметь $y(x, \lambda) \equiv 0$.

Достаточность. Пусть теперь выполнено (7). Обозначим $s(\lambda) \equiv \zeta(\lambda e^{-\tau\lambda})$ — корень уравнения

$$\lambda^m e^{-m\tau\lambda} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k e^{-k\tau\lambda} P_k(s), \tag{10}$$

или, что то же, $\zeta(\mu)$ — корень уравнения

$$\mu^m = \sum_{k=0}^{m-1} \mu^k P_k(\zeta), \tag{11}$$

причем выберем тот из корней этого уравнения, для которого при больших значениях $|\mu|$ справедлива асимптотика

$$\zeta(\mu) = a\mu^{\frac{1}{p_0}}(1 + \varepsilon(\mu)), \quad \varepsilon(\mu) \xrightarrow[|\mu| \to \infty]{} 0. \tag{12}$$

Существование такого корня в уравнении (11) следует, например, из [3] в силу определения p_0. Тогда, используя (12) и равенство $s(\lambda) = \zeta(\lambda e^{-\tau\lambda})$, получим, что при всех λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ имеет место оценка

$$|s(\lambda)| \leqslant C_2 |\lambda|^{\frac{1}{p_0}}.$$

Поэтому для функции $y(x, \lambda) = \exp\{s(\lambda)x\}$, являющейся в силу (10) решением уравнения (5), получим

$$\sup_x |y(x, \lambda) f^{-1}(x)| \leqslant \sup_x \exp\left\{|s(\lambda)| \cdot |x| - \int_0^{|x|} H(y)\,dy\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \exp\left\{\int_0^{|x|}\left[C_2|\lambda|^{\frac{1}{p_0}} - H(y)\right]dy\right\} \underset{\text{def}}{\equiv} \exp\{\psi(\lambda)\}.$$

Если $G(\lambda) \not\equiv 0$ — аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ функция, удовлетворяющая оценке

$$|G(\lambda)| \leqslant \exp\{-\psi(\lambda)\}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0, \tag{13}$$

то при достаточно большом $\beta > 0$ функция

$$y_0(x, \lambda) = \lambda^{-\beta} G(\lambda)\, y(x, \lambda) \not\equiv 0$$

удовлетворяет при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ оценкам (6) и является вместе с функцией $y(x, \lambda)$ решением уравнения (5). Искомое нетривиальное решение задачи (1)—(2) совпадает с обратным преобразованием Лапласа функции $y_0(x, \lambda)$ $\exp\{-\lambda\tau\}$.

Аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция $G(\lambda) \not\equiv 0$, удовлетворяющая оценке (13), существует, по критерию Карлемана [4], если $\int^{\infty} r^{-2}\psi(r)\,dr < \infty$. Но в силу определения $\psi(r)$ имеем

$$\psi(r) = \sup_x \int_0^{|x|}\left(C_2 r^{\frac{1}{p_0}} - H(y)\right)dy = \int_0^{g(r)}\left(C_2 r^{\frac{1}{p_0}} - H(y)\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant C_2 r^{\frac{1}{p_0}} g(r).$$

Здесь $g(r)$ определяется из условия $H(g(r)) = C_2 r^{\frac{1}{p_0}}$. Тогда, учитывая (7) получим

$$\int^{\infty} r^{-2}\psi(r)\,dr \leqslant C_2 \int^{\infty} r^{\frac{1}{p_0}-2} g(r)\,dr =$$

$$= C_3 \int^{\infty} y H^{-p_0}(y)\,dH(y) = C_4 \left(y [H(y)]^{1-p_0}\Big|^{\infty} - \int^{\infty} [H(y)]^{1-p_0}\,dy\right) < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы установили, что класс единственности решения основной начальной задачи (1) — (2) совпадает с классом единственности решения задачи Коши

$$D_t^m u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(D_x) D_t^k u(x, t), \tag{1'}$$

$$D_t^j u(x,\ t)|_{t=0}=0,\quad j=0,\ 1,\ldots,\ m-1\ -\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0. \qquad (2')$$

3°. Этот же метод применим к исследованию классов единственности решения основной начальной задачи и для ряда других уравнений с опережающим временем. Рассмотрим уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(D_x)\, D_t^k u(x,\ t-k\tau)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t\geqslant m\tau>0, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{N} a_{kj} D_t^k u(x+jh,\ t-k\tau)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t\geqslant m\tau>0, \qquad (15)$$

$$D_t^m u(x,\ t-m\tau)=P(x,\ D_x)\,u(x,\ t),\quad -\infty<x<\infty,\ t\geqslant m\tau>0. \qquad (16)$$

В (14) $P_k(D_x)$ — многочлены с постоянными (комплексными) коэффициентами, степени не выше N; в (15) a_{kj} $(k=0,\ 1,\ldots,\ m;\ j=0,\ 1,\ldots,\ N)$ — комплексные постоянные; в (16) $P(x,\ D_x)$ — полином степени N от D_x с коэффициентами, зависящими от x.

Вопрос о классах единственности решения задачи Коши (в классе решений нормального типа по t) для соответствующих уравнений без отклонений времени:

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(D_x)\, D_t^k u(x,\ t)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \qquad (14')$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{N} a_{kj} D_t^k u(x+jh,\ t)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \qquad (15')$$

$$D_t^m u(x,\ t)=P(x,\ D_x)\,u(x,\ t),\quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \qquad (16')$$

при начальных условиях (2′) изучен в работах [2, 5, 6], для уравнения (16′) при некоторых предположениях о поведении коэффициентов полинома $P(x,\ D_x)$ [6]. В тех же предположениях справедлива

Теорема 2. *Классы единственности и неединственности решения основной начальной задачи (14)—(2), (15)—(2), (16)—(2) совпадают соответственно с классами единственности и неединственности решения задачи Коши (14′)—(2′), (15′)—(2′), (16′)—(2′).*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что вопрос о классах единственности решения основной начальной задачи может быть рассмотрен в значительно более общей ситуации. Именно, пусть в уравнении

$$AD_t u(t-\tau)=Bu(t),\quad \tau\leqslant t<\infty \qquad (17)$$

u — элемент некоторого банахова пространства H, A и B — замкнутые линейные операторы в нем.

Возникает вопрос о существовании нетривиального решения уравнения (17), имеющего нормальный тип по t и удовлетворяющего условию

$$u(t)\in H,\quad u(t)\equiv 0,\quad 0\leqslant t<\tau. \qquad (18)$$

По аналогии с известной теоремой Хилла для абстрактной задачи Коши [7] имеет место следующее

Предложение. *Для того, чтобы задача (17)—(18) имела нетривиальное решение $u(t)\in H$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$(\lambda e^{-\tau\lambda}A-B)\,y(\lambda)=0 \qquad (19)$$

имело аналитическое в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0>0$ нетривиальное решение $y(\lambda)\in H$, ограниченное при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$.

Отсюда ясно, что если абстрактная задача Коши $AD_t u(t) = Bu(t)$, $u(0) = 0$ имеет в некотором банаховом пространстве H только тривиальное решение (среди решений нормального типа), то всякое аналитическое в некоторой полуплоскости $Re\,\mu \geqslant \mu_0$ и ограниченное по норме решение $y(\mu) \in H$ уравнения $(\mu A - B)\,y(\mu) = 0$ тождественно равно нулю. Но тогда то же верно относительно решений уравнения (19) при $Re\,\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$, и поэтому задача (17)—(18) имеет в пространстве H только тривиальное решение (в классе решений нормального типа), т. е. класс единственности решения основной начальной задачи (17)—(18) не уже класса единственности решения соответствующей задачи Коши.

4°. Покажем теперь, что если отказаться от требования нормальности типа решения задачи (1)—(2), то результат теоремы 1 может оказаться неверным. Кроме того, для уравнений, рассматриваемых в этом пункте, мы получим некоторые усиления теоремы 1.

Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{\partial u(x,\, t-\tau)}{\partial t} = \frac{\partial^p u(x,\, t)}{\partial x^p} \tag{20}$$

при начальном условии (2). Пусть $C(t)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем на отрезке $[\tau,\, 2\tau]$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_t |C^{(n)}(t)| \leqslant C^n n^{n\beta}, \quad \beta > 1. \tag{21}$$

Хорошо известно [4], что существует $C(t) \not\equiv 0$ и удовлетворяющая указанным условиям. Тогда, очевидно, функция

$$u(x,\, t) = C^{(n-1)}(t - (n-1)\tau)\,\frac{x^{(n-1)p}}{((n-1)p)!} \tag{22}$$

при $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$, $n \geqslant 1$, $-\infty < x < \infty$;

$$u(x,\, t) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant t < \tau \tag{23}$$

является нетривиальным решением основной начальной задачи для уравнения (20).

Но из (21) и (22) при $(n+1)\tau \leqslant t < (n+2)\tau$ следует оценка

$$|u(x,\, t)| \leqslant C^n n^{n\beta}[(np)!]^{-1}|x|^{np} \leqslant C_1 C_2^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-p)}(1+|x|)^{(n+1)p} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 C_4^t \exp\left\{\frac{\beta-p}{\tau}\, t\ln t + \frac{p}{\tau}\, t\ln(1+|x|)\right\}. \tag{24}$$

Используя неравенство Юнга, мы можем отсюда при любом $\alpha > 1$ получить оценку

$$|u(x,\, t)| \leqslant M_1 \exp\left\{M_2 t^\alpha + M_3(\ln(1+|x|))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant \tau.$$

Сравнивая с результатом теоремы 1, видим, что отказ от требования нормальности типа по t решения $u(x,\, t)$ может привести к резкому сужению класса единственности в смысле допустимого роста функции $f(x)$ в оценке типа (3) при $|x| \to \infty$.

Для дальнейшего исследования нам удобнее будет различать случаи $p > 1$ и $p = 1$.

Пусть сначала $p > 1$. Тогда β можно выбрать из условия $1 < \beta < p$. В этом случае оценка (24) показывает, что единственность решения задачи (20)—(23) нарушается в классе функций, которые при каждом фиксированном x даже убывают по t (при $t \to \infty$) быстрее, чем $\exp\{-At\ln t\}$ с некоторым $A > 0$. Однако оценка (24), не будучи «разделенной» по x

и t, существенно отличается от оценки вида (3). Для сравнения полученного результата с предыдущими продолжим оценку (24), применив к произведению $\frac{p}{\tau} t \ln(1+|x|)$ неравенство Юнга в форме (см., например, [8]): $ab \leqslant (a+1)\ln(a+1) - a + e^b - b - 1 \leqslant a\ln(a+1) + e^b$ для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Полагая $a = \tau^{-1}(p-\beta-\varepsilon)t$, $\varepsilon > 0$, $b = (p-\beta-\varepsilon)^{-1} p \ln(1+|x|)$, получим

$$\frac{p}{\tau} t \ln(1+|x|) \leqslant \frac{(p-\beta-\varepsilon)\,t}{\tau} \ln\left(1 + \frac{(p-\beta-\varepsilon)\,t}{\tau}\right) + (1+|x|)^{\frac{p}{p-\beta-\varepsilon}}.$$

Возвращаясь теперь к оценке (24), находим

$$|u(x, t)| \leqslant C_3 C_5^t \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{\tau}\ln t + (1+|x|)^{\frac{p}{p-\beta-\varepsilon}}\right\}. \tag{25}$$

Но, очевидно, при любом $\delta > 0$ можно так выбрать $\varepsilon > 0$ и $\beta > 1$, что $p(p-\beta-\varepsilon)^{-1} = p' + \delta$, $p' = \frac{p}{p-1}$, и поэтому (25) примет вид

$$|u(x, t)| \leqslant C_6 \exp\{-C_7 t \ln t + C_8 |x|^{p'+\delta}\}, \quad C_7,\ C_8 > 0. \tag{26}$$

Ясно, что производные функции $u(x, t)$ по x также удовлетворяют оценкам вида (26).

Таким образом, единственность решения задачи (20)—(23) нарушается в классе функций, удовлетворяющих (вместе с производными по x) оценке (26). Этот класс функций существенно уже класса, описанного в теореме 1, так как множитель $e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, в (3) заменяется множителем $\exp\{-C_7 t \ln t\}$, $C_7 > 0$, в (26).

Разберем теперь случай $p = 1$:

$$\frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \tag{27}$$

Из предыдущих результатов получаем, что задача (27)—(23) имеет нетривиальное решение $u(x, t)$, удовлетворяющее оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C_1 C_2^t \exp\left\{\frac{\beta-1}{\tau} t \ln t + \frac{t}{\tau}\ln(1+|x|)\right\}, \tag{28}$$

$\beta > 1$ — любое. Однако в классе функций, удовлетворяющих оценке (24) с $\beta = 1$, уже имеет место единственность решения задачи (27)—(23), что является следствием следующей теоремы единственности.

Теорема 3. *Пусть* $A > 0$, $B > 0$, $-\infty < a < b < \infty$. *Тогда класс функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant A \exp\{Bt\}, \quad \tau \leqslant t < \infty, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{29}$$

является классом единственности решения задачи (27)—(23).

Доказательство. Не уменьшая общности, положим $[a, b] = [0, 1]$. Нетрудно показать последовательным интегрированием, что любое решение задачи (27)—(23) может быть записано в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-k-1}^{(k)}(t-k\tau)\frac{x^k}{k!}, \tag{30}$$

$$n = \left[\frac{t}{\tau}\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau < t < \infty,$$

функция $C_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ определена при $(k+1)\tau \leqslant t < (k+2)\tau$, и при всех j, $k = 0, 1, \ldots$ выполнены условия

$$C_k^{(j)}((k+2)\tau) = C_{k+1}^{(j)}((k+2)\tau), \quad C_0^{(j)}(\tau) = 0. \tag{31}$$

Из (30) при $x = 0$ имеем

$$u(0,\ t) = C_{n-1}(t),\quad n = \left[\frac{t}{\tau}\right].$$

Тогда из (29) получаем

$$|C_{n-1}(t)| \leqslant A \exp\{Bt\} \leqslant A \exp\{(n+1)\tau\}.$$

Из (30) при $x = x_1,\ x = x_2, \dots,\ x = x_{n-1};\ x_j \in [0,\ 1],\ j = 1, \dots, n-1$, имеем

$$v = (x_j,\ t) = \sum_{k=1}^{n-1} A_{kn}(t) \frac{x_j^k}{k!}, \tag{32}$$

где

$$v(x,\ t) \equiv u(x,\ t) - u(0,\ t),$$

$$A_{kn}(t) \equiv C_{n-k-1}^{(k)}(t - k\tau). \tag{33}$$

Но из (29)

$$|v(x_j,\ t)| \leqslant 2A \exp\{Bt\}. \tag{34}$$

Решая систему (32) при фиксированном t, получим

$$A_{kn}(t) = D_{n-1}^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} v(x_j,\ t) D_{jk(n-2)}, \tag{35}$$

где

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1 & \frac{x_1^2}{2} & \dots & \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1} & \frac{x_{n-1}^2}{2} & \dots & \frac{x_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix},$$

а $D_{jk(n-2)}$ — алгебраическое дополнение в определителе D_{n-1} к элементу из j-ой строки и k-го столбца. Легко видеть, что

$$D_{n-1} = \frac{x_1 \dots x_{n-1}}{2! \dots (n-1)!} W(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$$D_{jk(n-2)} = \frac{x_1 \dots x_{n-1}\, k!}{x_j\, 2! \dots (n-1)!} W_{k(n-2)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}),$$

где $W(x_1, \dots, x_{n-1})$ — определитель Вандермонда чисел $x_1, \dots, x_{n-1}$;

$$W_{k(n-2)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{k-1} & \dots & x_{j-1}^{k-1} & x_{j+1}^{k-1} & \dots & x_{n-1}^{k-1} \\ x_1^{k+1} & \dots & x_{j-1}^{k+1} & x_{j+1}^{k+1} & \dots & x_{n-1}^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & \dots & x_{j-1}^{n-2} & x_{j+1}^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить по индукции формулу

$$W_{k(n-2)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$

$$= W(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})\, \sigma_{n-2-k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}),$$

где $\sigma_m(x_1, \dots, x_n)$ — элементарный симметрический многочлен степени m от своих аргументов. Тогда

$$\left|\frac{D_{jk(n-2)}}{D_{n-1}}\right| = \frac{k!\,|\sigma_{n-2-k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})|}{|x_j|\prod\limits_{r\neq j}|x_r - x_j|}.$$

Положим $x_j = \frac{j}{n-1}$; $j = 1, \dots, n-1$. Тогда

$$\left|\prod_{r\neq j}(x_r - x_j)\right| = \prod_{r\neq j}\frac{|r-j|}{n-1} = \frac{(j-1)!\,(n-1-j)!}{(n-1)^{n-2}} = \frac{(n-1)!}{C^j_{n-1} j\,(n-1)^{n-2}},$$

$$\sigma_{n-2-k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) =$$

$$= (n-1)^{-n+2+k}\sigma_{n-2-k}(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n-1) \leqslant C^k_{n-2}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{D_{jk\,(n-2)}}{D_{n-1}}\right| \leqslant \frac{k!\,C^k_{n-2}\,(n-1)\,C^j_{n-1}\,j\,(n-1)^{n-2}}{j\,(n-1)!} \leqslant M^n \cdot k! \tag{36}$$

Из (35), используя (34) и (36), получим

$$|A_{kn}(t)| \leqslant A\,(n-1)\exp\{Bt\}\,M^n k! \leqslant M_1^n k!$$

Теперь (31) показывает, что

$$|C^{(k)}_{n-k-1}(t - k\tau)| \leqslant M_1^n k!, \quad n\tau \leqslant t < (n+1)\tau. \tag{37}$$

В частности, при $k = n-1$ получим

$$|C_0^{(n-1)}(t - (n-1)\tau)| \leqslant M_1^n (n-1)!, \ n\tau \leqslant t < (n+1)\tau, \ n = 1, 2, \dots$$

или, что то же,

$$|C_0^{(n-1)}(t)| \leqslant M_1^n (n-1)!, \quad \tau \leqslant t < 2\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Но тогда условия (31) показывают, что $C_0(t) \equiv 0$, а также, что

$$C_1^{(j)}(2\tau) = 0 \text{ при } j = 0, 1, \dots$$

Полагая в (37) $k = n-2$, $n = 2, 3, \dots$, получим

$$|C_1^{(n-2)}(t)| \leqslant M_1^n (n-2)!, \ 2\tau \leqslant t < 3\tau, \ n = 2, 3, \dots,$$

поэтому $C_1(t) \equiv 0$. Продолжив эти рассуждения, мы получим, что все $C_m(t) \equiv 0$, $m = 0, 1, \dots$ Следовательно, $u(x, t) \equiv 0$.

В заключение авторы благодарят А. Д. Мышкиса за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к каноническому виду. ДАН СССР, 115, № 1, 1957.
2. В. М. Борок. О задаче Коши для общих линейных уравнений. ДАН СССР, 177, № 4, 1967.
3. Г. Н. Золотарев. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, т. 34, 1963.
4. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. ИЛ, М., 1955.
5. В. М. Борок. Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева-Гальперна. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
6. Я. И. Житомирский. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. Изв. АН СССР, т. 31, 4, 1967.
7. E. Hille. An Abstract formulation of Cauchys problem Comtes Rendus du Dousilme Congress des Mathmaticien Schandinaves, Lund, 1953.
8. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, вып. 3. Физматгиз, М., 1958.

Поступила 8 декабря 1968 г.