Выпуск 10 1970

О ПРЕДЕЛЬНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

В. П. Котляров, Е. Я. Хруслов

В работе исследуется вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца в области D, являющейся дополнением к замкнутому множеству F.

Множество F построено следующим образом. Пусть в окрестности замкнутой поверхности Ляпунова Γ с показателем $\alpha = 1$, лежащей в трехмерном пространстве, задано векторное поле $\boldsymbol{m}(x)$ такое, что $|\boldsymbol{m}(x)| = 1$ и скалярное произведение $(\boldsymbol{m}(\bar{x}), \boldsymbol{n}(\bar{x}))$ вектора $\boldsymbol{m}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Gamma$ на вектор $\boldsymbol{n}(\bar{x})$ нормали к поверхности Γ всюду положительно. Векторное поле $\boldsymbol{m}(x)$ предполагается достаточно гладким.

На поверхности Γ выделено множество S, состоящее из конечного числа связных кусков S_α, ограниченных гладкими контурами, так что $S = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} S_\alpha$. Линии векторного поля $\boldsymbol{m}(x)$, проходящие через точки множества S_α, вырезают в области, внутренней по отношению к поверхности Γ, канал T_α, ограниченный некоторой поверхностью $S_{0\alpha}$, ортогональной к линиям векторного поля $\boldsymbol{m}(x)$. Таким образом, в совокупности получим систему каналов $T = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} T_\alpha$ (рис. 1).

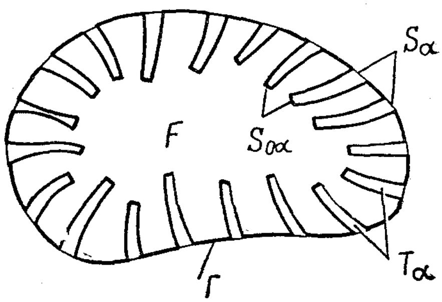

Рис. 1

Множество F — это замыкание области, внутренней по отношению к поверхности Γ с выброшенными каналами T_α, а область D состоит из области D_e, внешней по отношению к поверхности Γ, системы каналов $T = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} T_\alpha$ и множества S, т. е.

$$D = D_e \cup T \cup S.$$

В области D рассматривается задача Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = g, \quad \operatorname{Im} k > 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

где ∂D — граница области.

В работе исследуется асимптотическое поведение функции Грина этой задачи, когда диаметры каналов стремятся к нулю, а число их неограниченно возрастает. Оказывается, что при определенных условиях функция

Грина такой задачи стремится к функции $G(x, y, k)$, удовлетворяющей в области D_e уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x-y), \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

а на поверхности Γ — граничному условию типа

$$\frac{\partial G(\bar{x})}{\partial n} - f(\bar{x}, k)\, G(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma.$$

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Прежде всего заметим, что граница области D имеет углы. Поэтому уточним постановку задачи.

Всюду в дальнейшем рассматривается функция Грина $G(x, y, k)$ задачи (1) — (2), которую определим следующим образом:

$$1. \; G(x, y, k) = \frac{e^{ikr(x, y)}}{4\pi r(x, y)} + g(x, y, k),$$

где точка $y \in D_e$ — фиксирована, а функция $g(x, y, k) \in W_2^{(1)}(D) \cap W_2^{(2)}$ (лок.) и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta g + k^2 g = 0.$$

2. Граничное условие на множестве F должно выполняться в следующем смысле. Пусть F_m — гладкие поверхности, лежащие в области D и охватывающие множество F, причем при $m \to \infty$ все точки множества F_m стремятся к границе множества F. Тогда для любой функции $\zeta(x) \in W_2^{(1)}(D)$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{F_m} \frac{\partial G(x)}{\partial n_x} \zeta(x)\, ds_x = 0.$$

Введем такие обозначения:

d_α — диаметр канала T_α;

$r_{\alpha\beta}$ — расстояние между множествами S_α и S_β;

$G_e(x, y, k)$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области D_e;

$w(l, \bar{x}, k)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2 w}{dl^2} + p(\bar{x}, l)\frac{dw}{dl} + k^2 w = 0, \quad 0 \leqslant l \leqslant L(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S$$

с начальными условиями

$$w(0, \bar{x}) = 1; \quad \left.\frac{dw(l, \bar{x})}{dl}\right|_{l=0} = 0,$$

где $p(\bar{x}, l) = \operatorname{div} \boldsymbol{m}(x)$, а точка $\bar{x}$ лежит на линии векторного поля $\boldsymbol{m}(x)$, проходящей через точку $\bar{x} \in \Gamma$, и расстоянии l (вдоль этой линии) от основания $S_{0\alpha}$ канала T_α. Точка $\bar{x}$ рассматривается в этом уравнении как параметр, $x = (\bar{x}, l)$ (рис. 2).

Введем на множестве S функцию

$$R(\bar{x}, k) = (\boldsymbol{m}(\bar{x}), n(\bar{x}))\, \frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}, \tag{3}$$

где

$$w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k) = \left.\frac{dw(l, \bar{x}, k)}{dl}\right|_{l=L(\bar{x})}.$$

Рассмотрим последовательность множеств $S^{(n)} = \bigcup_{\alpha=1}^{N} S_\alpha^{(n)}$ и соответствующие им последовательности областей $D^{(n)}$ и функций Грина $G^{(n)}(x, y, k)$ в областях $D^{(n)}$ при фиксированном $y \in D_e$.

Введем также последовательность функций:

$$R^{(n)}(\bar{x}, k) = \begin{cases} R(\bar{x}, k), & \bar{x} \in S^{(n)}, \\ 0 & \bar{x} \in \Gamma \setminus S^{(n)}. \end{cases} \tag{3'}$$

Тогда основной результат можно сформулировать в следующем виде.

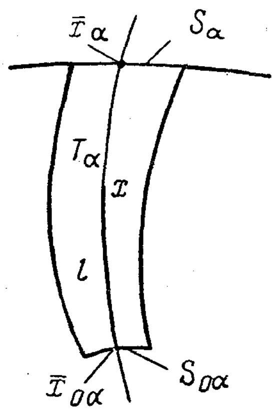

Рис. 2

Теорема. *Пусть при $n \to \infty$ выполняются такие условия:*

1) $d_\alpha^{(n)} \to 0$;

2) $r_{\alpha\beta}^{(n)} \geqslant A \max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant N} d_\alpha^{(n)}$, $A > 0$;

3) *последовательность функций* $R^{(n)}(\bar{x}, k)$ *слабо сходится к функции* $f(\bar{x}, k)$ *в пространстве ограниченных функций, т. е. для любой функции* $g(\bar{x}) \in L(\Gamma)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma R^{(n)}(\bar{x}, k)\, g(\bar{x})\, dS_{\bar{x}} = \int_\Gamma f(\bar{x}, k)\, g(\bar{x})\, dS_{\bar{x}}.$$

Тогда равномерно по k, принадлежащем любой ограниченной области, находящейся на положительном расстоянии от оси $\operatorname{Im} k = 0$, *и равномерно по $x \in D_e$, находящемся на положительном расстоянии от поверхности Γ, существует предел последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y, k)$ краевых задач* (1) — (2) *в областях $D^{(n)}$*

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y, k) = G(x, y, k),$$

причем функция $G(x, y, k)$ удовлетворяет в области D_e уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x - y), \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{4}$$

и такому граничному условию:

$$\frac{\partial G(\bar{x})}{\partial n} - f(\bar{x}, k)\, G(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma, \tag{5}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по внешней нормали $\boldsymbol{n}(x)$ к поверхности Γ.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Сначала построим удобную для доказательства теоремы конструкцию решения задачи (1) — (2) при $k = i\lambda$ $(\lambda > 0)$ и фиксированном n. Оказывается, что функция Грина $G^{(n)}(x, y, k)$ $(k = i\lambda,\ \lambda > 0)$ краевой задачи (1) — (2) в области $D^{(n)}$ при фиксированном n можно хорошо аппроксимировать функцией $Q(x, y, k)$, определяемой следующим образом:

$$Q(x, y, k) = G_e(x, y, k) - \int_S G_e(x, \xi, k)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi, \quad x \in D_e, \tag{6}$$

где функция $\varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in S$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\frac{\varphi(\bar{x})}{R(\bar{x}, k)} + \int_S G_e(\bar{x}, \xi, k)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi = G_e(\bar{x}, y, k), \quad \bar{x} \in S. \tag{7}$$

Предполагая, что функция Грина задачи (1) — (2) в области D_e аппроксимирована функцией $Q(x, y, k)$, построим ее приближение $Q_\alpha(x, y, k)$ в канале $T_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots N)$. Для этого введем в T_α криволинейную систему координат следующим образом. Рассмотрим в канале T_α семейство регулярных поверхностей $\boldsymbol{r}^\alpha = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, t)$ (t — параметр семейства), ортогональных векторному полю $\boldsymbol{m}(x)$, причем такое, что поверхность семейства при $t = 0$ совпадает с поверхностью $S_{0\alpha}$. Предполагается, что параметризация $\boldsymbol{r}^\alpha = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, t)$ такова, что для любых двух значений t_1, t_2 точки $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, определяемые соответственно радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, t_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, t_2)$, лежат на одной линии векторного поля $\boldsymbol{m}(x)$. Кроме того $|\boldsymbol{r}_t^\alpha| \neq 0$ и $|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha| \neq 0$.

Тогда оператор Лапласа в системе координат (u, v, t) примет вид

$$\Delta = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha||\boldsymbol{r}_t^\alpha|}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|}\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{|\boldsymbol{r}_t^\alpha||\boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_u^\alpha|}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{|\boldsymbol{r}_t^\alpha||\boldsymbol{r}_u^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_v^\alpha|}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right].$$

Поскольку каналы очень тонкие, то естественно предположить, что решение задачи в канале слабо зависит от u, v. Поэтому будем искать приближенное решение в канале, не зависящем от u, v. Для этого возьмем произвольную, но фиксированную точку $x_\alpha \in S_\alpha$. Линию поля $\boldsymbol{m}(x)$, проходящую через эту точку, обозначим γ_α. Точку пересечения кривой γ_α с поверхностью $S_{0\alpha}$ обозначим через $\bar{x}_{0\alpha}$, которую будем считать началом координат (u, v, t). В качестве приближенного решения в канале возьмем решение такого уравнения:

$$\frac{d}{dl}\left[q\,(x_\alpha, l)\frac{dw}{dl}\right] + k^2 q\,(\bar{x}_\alpha, l)\, w = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots N), \tag{8}$$

где $l = \int\limits_0^t |\boldsymbol{r}_\tau^\alpha(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha, \tau)|\, d\tau$ — длина кривой γ_α, отсчитываемая от точки $\bar{x}_{0\alpha} \in S_{0\alpha}$ в сторону области D_e, а

$$q\,(\bar{x}_\alpha, l) = |\boldsymbol{r}_u^\alpha(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha, l) \times \boldsymbol{r}_v^\alpha(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha, l)|.$$

Точка $\bar{x}_\alpha \in S_\alpha$, определяемая координатами $(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha)$, рассматривается как параметр.

Оказывается, что уравнение (8) эквивалентно следующему:

$$\frac{d^2w}{dl^2} + p\,(\bar{x}_\alpha, l)\frac{dw}{dl} + k^2 w = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots N).$$

Действительно, уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2w}{dl^2} + \frac{\frac{d}{dl}q\,(\bar{x}_\alpha, l)}{q\,(\bar{x}_\alpha, l)}\frac{dw}{dl} + k^2 w = 0.$$

Покажем, что

$$p\,(\bar{x}_\alpha, l) = \frac{\frac{d}{dl}q\,(\bar{x}_\alpha, l)}{q\,(\bar{x}_\alpha, l)} = \operatorname{div}\boldsymbol{m}(x),$$

где $x = (\bar{x}_\alpha, l)$.

Согласно определению

$$\operatorname{div} \boldsymbol{m}(x) = \lim_{V \to x} \frac{\int\limits_{\Sigma} m_n d\sigma}{V}.$$

В качестве объема V рассмотрим объем, ограниченный двумя поверхностями семейства $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, l)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, l + \Delta l)$ и векторной трубкой поля $\boldsymbol{m}(x)$, направляющей которой служит контур, ограничивающий некоторое множество Δ на поверхности $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, l)$. Поскольку векторное поле $\boldsymbol{m}(x)$ ортогонально поверхностям семейства $\boldsymbol{r}^\alpha = \boldsymbol{r}^\alpha(u, v, t)$, то поток через боковую поверхность, которая ограничивает объем V, равен нулю. Тогда величина потока равна

$$\Phi = m_n \left[q(\bar{x}_\alpha, l + \Delta l) - q(\bar{x}_\alpha, l) \right] \Delta u \Delta v,$$

а поскольку поле $\boldsymbol{m}(x)$ удовлетворяет условию

$$|\boldsymbol{m}(x)| = 1, \text{ то } m_n = 1.$$

Величина рассматриваемого объема V равна

$$V = q(\bar{x}_\alpha, l) \Delta u \Delta v \Delta l.$$

Таким образом, имеем

$$p(\bar{x}_\alpha, l) = \operatorname{div} \boldsymbol{m}(x) = \lim_{V \to x} \frac{\left[q(\bar{x}_\alpha, l + \Delta l) - q(\bar{x}_\alpha, l) \right] \Delta u \Delta v}{q(\bar{x}_\alpha, l) \Delta u \Delta v \Delta l} =$$

$$= \frac{1}{q(\bar{x}_\alpha, l)} \lim_{\Delta l \to 0} \frac{q(\bar{x}_\alpha, l + \Delta l) - q(\bar{x}_\alpha, l)}{\Delta l} = \frac{\frac{d}{dl} q(\bar{x}_\alpha, l)}{q(\bar{x}_\alpha, l)}.$$

Определим функцию $Q_\alpha(x, y, k)$ в каждом канале следующим образом:

$$Q_\alpha(u, v, l) = A_\alpha w_1^\alpha(l) + B_\alpha w_2^\alpha(l), \tag{9}$$

где w_1^α и w_2^α — линейно независимые решения уравнения (8). Пусть эти решения удовлетворяют таким условиям:

$$w_1^\alpha(0) = 1; \quad \left.\frac{dw_1^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=0} = 0, \tag{10}$$

$$w_2^\alpha(L_\alpha) = 1; \quad \left.\frac{dw_2^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=L_\alpha} = 0, \tag{11}$$

где $l = 0$ отвечает основанию $S_{0\alpha}$ канала, $l = L_\alpha$ — пересечению кривой γ_α с поверхностью Γ. Так выбранные решения являются линейно независимыми при любом комплексном k.

Потребуем, чтобы функции $Q(x, y, k)$ и $Q_\alpha(u, v, l)$ и значения их нормальных производных совпадали хотя бы в одной точке $\bar{z}_\alpha \in S_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots N$). Это приводит к следующим соотношениям:

$$A_\alpha w_1^\alpha(L_\alpha) + B_\alpha w_2^\alpha(L_\alpha) = G_e(\bar{z}_\alpha, y, k) - \int\limits_S G_e(\bar{z}_\alpha, \xi, k) \varphi(\xi) dS_\xi, \tag{12}$$

$$A_\alpha \left.\frac{dw_1^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=L_\alpha} + B_\alpha \left.\frac{dw_2^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=L_\alpha} = \frac{\varphi(\bar{z}_\alpha)}{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})}, \tag{13}$$

$$A_\alpha \left.\frac{dw_1^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=0} + B_\alpha \left.\frac{dw_2^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=0} = 0. \tag{14}$$

Равенство (14) получено из условия того, что нормальная производная $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial n}$ на множество $S_{0\alpha}$ должна равняться нулю.

Так как k — комплексное, то из (8), (11) получаем $\left.\frac{dw_2^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=0} = 0$. Тогда из (10), (14) заключаем, что $B_\alpha \equiv 0$. Из равенства (13) определим коэффициенты

$$A_\alpha = \frac{\varphi(\bar{z}_\alpha)}{(m, n)\left.\frac{dw_1^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=L_\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots N). \tag{15}$$

Подставляя в (12) коэффициенты A_α, получим

$$\frac{w_1^\alpha(L_\alpha)\,\varphi(\bar{z}_\alpha)}{(m, n)\left.\frac{dw_1^\alpha(l)}{dl}\right|_{l=L_\alpha}} + \int\limits_S G_e(\bar{z}_\alpha, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi = G_e(\bar{z}_\alpha, y, k), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots N). \tag{16}$$

Рассмотрим интегральное уравнение (7):

$$\frac{\varphi(\bar{x})}{R(\bar{x}, k)} + \int\limits_S G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi = G_e(\bar{x}, y, k), \quad \bar{x} \in S.$$

В силу (3) решение $\varphi(\bar{x})$ этого уравнения (если оно существует) удовлетворяет равенству (16). Поэтому, вычисляя коэффициенты A_α по формулам (15), нетрудно убедиться, что соотношения (12) — (14) выполняются.

Покажем, что интегральное уравнение (7) однозначно разрешимо. Для этого рассмотрим в пространстве $L_2(S)$ интегральный оператор

$$A[\varphi(\bar{x})] = \int\limits_S G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi,$$

который вполне непрерывен и положителен ($k = i\lambda$, $\lambda > 0$). Тогда, учитывая, что

$$\frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)} > 0 \text{ при } k = i\lambda, \lambda > 0 \text{ и } (m, n) > 0,$$

получаем, что уравнение (7) однозначно разрешимо при любой правой части из $L_2(S)$. Нужно лишь показать, что $\frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}\ k)} > 0$ при $k = i\lambda$. Поскольку $w = w(l)$ есть решение уравнения (8) с условиями (10), то $w(l) > 0$ при $0 \leqslant l \leqslant L$, так как в противном случае $w(l)$ была бы собственной функцией задачи (8), (10). Из уравнений (8) и (10) можно записать

$$w'(L) = \frac{\lambda^2}{q(L)} \int\limits_0^L q(\tau)\,w(\tau)\,d\tau,$$

откуда в силу положительности $q(\tau)$ получаем нужное утверждение. Далее, так как правая часть уравнения (7) ограничена независимо от n и $R(\bar{x}, k) > 0$ при $k = i\lambda$, решение $\varphi(\bar{x})$ равномерно по n ограничено при любом фиксированном $k = i\lambda$ ($\lambda > 0$). Учитывая еще, что для функции $G_e(x, y, k)$ имеет место оценка [3]:

$$G_e(\bar{x}, \bar{y}, k) = \frac{e^{ikr(\bar{x}, \bar{y})}}{2\pi r(\bar{x}, \bar{y})} + g_e(\bar{x}, \bar{y}, k), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Gamma,$$

где

$$|g_e(\bar{x}\,\bar{y}, k)| \leqslant C\left[1 + |\ln r(\bar{x}, \bar{y})|\right],$$

получим

$$\left|\int_S G_e(\bar{x}_2\ \xi,\ k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi - \int_S G_e(\bar{x}_1,\ \xi,\ k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 r(\bar{x}_2,\ \bar{x}_1)\left[1 + |\ln r(\bar{x}_2,\ \bar{x}_1)|\right],\quad \bar{x}_2,\ \bar{x}_1 \in S.$$

Отсюда в силу уравнения (7), гладкости $G_e(\bar{x},\ y,\ k)$ по $\bar{x} \in \Gamma$ при $y \in D_e$ и гладкости функции $w = w(x)$ (это вытекает из гладкости коэффициента $q(x,\ l)$ по x в уравнении (8)) следует, что при любом фиксированном $k = i\lambda\ (\lambda > 0)$

$$|\varphi(\bar{x}_2) - \varphi(\bar{x}_1)| \leqslant C_2 r(\bar{x}_2,\ \bar{x}_1)\left[1 + |\ln r(\bar{x}_2,\ \bar{x}_1)|\right]\quad \bar{x}_2\ \bar{x}_1 \in S, \tag{17}$$

причем постоянные C_1 и C_2 от n не зависят.

Лемма 1. *Функция $Q_\alpha(u,\ v,\ l)$ в канале $T_\alpha\ (\alpha = 1,\ 2,\ldots N)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta Q_\alpha + k^2 Q_\alpha = \Phi_\alpha,$$

причем для функции Φ_α имеет место оценка $|\Phi_\alpha| = 0\,(d_\alpha^{(n)})$.

Доказательство. Применим оператор $(\Delta + k^2E)$ к функции $Q_\alpha(u,\ v,\ l)$:

$$(\Delta + k^2E)\,Q_\alpha(u,\ v,\ l) =$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|\,|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|\,(u,\ v,\ t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|}(u,\ v,\ t)\frac{dQ_\alpha}{dt}\right] + k^2 Q_\alpha.$$

Поскольку параметризация $\boldsymbol{r}^\alpha = \boldsymbol{r}^\alpha(u,\ v,\ t)$ достаточно гладкая, и $|r_t^\alpha| \neq 0$, $|r_u^\alpha \times r_v^2| \neq 0$, можем записать:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|\,|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|\,(u,\ v,\ t)} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|\,|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|\,(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ t) + O(\rho)} =$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|\,|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|\,(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ t)} + O(\rho),$$

где $\rho = \max\,(|u - u_\alpha|,\ |v - v_\alpha|)$.

(А так как $|r_t^\alpha| \neq 0$ и $|r_u^\alpha \times r_v^\alpha| \neq 0$, то)

аналогично

$$\frac{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|}\,u,\ v,\ t) = \frac{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|}(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ t) + s(u,\ v,\ t),$$

где

$$|s(u,\ v,\ t)| = O(\rho)\quad \text{и}\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}s(u,\ v,\ t)\right| = O(\rho).$$

Далее, поскольку $l = \int_0^t |r_\tau^\alpha(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ \tau)|\,d\tau$,

$$\frac{dl}{dt} = |r_t^\alpha(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ t)|\,.$$

Следовательно,

$$(\Delta + k^2E)\,Q_\alpha(u,\ v,\ l) =$$
$$= \left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|\,|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|\,(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ l)} + O(\rho)\right]|\boldsymbol{r}_t^\alpha(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ l)| \times$$
$$\times \frac{d}{dl}\left[\left(\frac{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}{|\boldsymbol{r}_t^\alpha|}(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ l) + s(u,\ v,\ l)\right)|\boldsymbol{r}_t^\alpha(\bar{u}_\alpha,\ \bar{v}_\alpha,\ l)|\frac{dQ_\alpha}{dl}\right] +$$

$$+k^2Q_\alpha=\left\{\frac{1}{|r_t^\alpha||r_u^\alpha\times r_v^\alpha|(\bar u_\alpha,\bar v_\alpha,l)}\frac{d}{dl}\left[|r_u^\alpha\times r_v^\alpha|(\bar u_\alpha,\bar v_\alpha,l)\frac{dQ_\alpha}{dl}\right]+\right.$$

$$\left.+k^2Q_\alpha\right\}+\Phi_\alpha=\Phi_\alpha,$$

так как выражение в фигурных скобках равно нулю в силу уравнения (8). Легко видеть, что

$$\Phi_\alpha=O(\rho)\left[\left(\frac{|r_t^\alpha|}{|r_u^\alpha\times r_v^\alpha|}+\frac{\frac{d}{dl}|r_t^\alpha|}{|r_u^\alpha\times r_v^\alpha|}+|r_t^\alpha|\frac{d}{dl}|r_u^\alpha\times r_v^\alpha|\right)\frac{dQ_\alpha}{dl}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|r_t^\alpha|}{|r_u^\alpha\times r_v^\alpha|}+|r_t^\alpha||r_u^\alpha\times r_v^\alpha|\right)\frac{d^2Q_\alpha}{dl^2}+o(\rho)\right].$$

Таким образом, для Φ_α имеет место оценка

$$|\Phi_\alpha|=O(\rho)=O(d_\alpha^{(n)}),$$

и лемма доказана.

2. Теперь можно показать, что функция $Q(x, y, k)$ $(k=i\lambda,\ \lambda>0)$, заданная в области D_e формулами (5)—(7), а в каналах T_α—формулой (9), при достаточно малых диаметрах каналов является хорошим приближением функции Грина $G(x, y, k)$ при $k=i\lambda\,(\lambda>0)$ и фиксированном n краевой задачи (1)—(2).

Будем искать функцию $G(x, y, k)$ в виде

$$G(x, y, k)=Q(x, y, k)+g(x, y, k). \tag{18}$$

Отсюда следует, что функция $g(x)\equiv g(x, y, k)$ должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца в областях D_e и T. Но в каналах T_α функция $Q(x, y, k)$, согласно лемме 1, удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца. Отсюда заключаем, что $g(x)$ в области D_e удовлетворяет уравнению

$$\Delta g+k^2g=0\quad(k=i\lambda,\ \lambda>0), \tag{19}$$

а в областях T_a

$$\Delta g+k^2g=-\Phi_\alpha\ (\alpha=1, 2, \ldots N), \tag{20}$$

причем на множествах $\Gamma\diagdown S$, $S_{0\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \ldots N)$ и боковых поверхностях каналов должна иметь нулевую нормальную производную.

При переходе из области D_e в область $T=\bigcup_{\alpha=1}^{N}T_\alpha$, т. е. на множестве S, функция $g(x)$ и ее нормальная производная должны иметь скачки, чтобы скомпенсировать соответствующие скачки функции $Q(x, y, k)$. Обозначим ее скачки на множестве S так:

$$\hat q_\alpha(\bar x)=Q(\bar x)-Q_\alpha(\bar x),\ \bar x\in S\ (\alpha=1, 2, \ldots N), \tag{21}$$

а скачки нормальной производной через

$$\hat\psi_\alpha(\bar x)=\frac{\partial Q(\bar x)}{\partial n}-\frac{\partial Q_\alpha(\bar x)}{\partial n},\ \bar x\in S\ (\alpha=1, 2, \ldots N). \tag{22}$$

Из неравенства (17) получаем

$$|\hat q_\alpha(\bar x_2)-q_\alpha(\bar x_1)|\leqslant C_1r(\bar x_2, \bar x_1)[1+|\ln r(\bar x_2, \bar x_1)|],\ \bar x_2, \bar x_1\in S\ (\alpha=1, 2, \ldots N), \tag{23}$$

$$|\hat{\psi}_\alpha(\bar{x}_2) - \hat{\psi}_\alpha(\bar{x}_1)| \leqslant C_2 r(\bar{x}_2, \bar{x}_1)[1 + |\ln r(\bar{x}_2, \bar{x}_1)|], \ \bar{x}_2, \bar{x}_1 \in S \quad (\alpha = 1, 2, \dots N), \tag{24}$$

причем постоянные C_1 и C_2 от n не зависят. Заметим, что из (12) — (14) следует, что $\hat{q}_\alpha(\bar{z}_\alpha) = 0$ и $\hat{\psi}_\alpha(\bar{z}_\alpha) = 0$, а совместно с неравенствами (23) и (24) имеем

$$|\hat{q}_\alpha(\bar{x})| = O\left[(d_\alpha^{(n)})^{1-\varepsilon}\right] \quad (\alpha = 1, 2, \dots N), \tag{25}$$

$$|\hat{\psi}_\alpha(\bar{x})| = O\left[(d_\alpha^{(n)})^{1-\varepsilon}\right] \quad (\alpha = 1, 2, \dots N), \tag{26}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Все свойства функции $g(x)$, отмеченные в (19) — (26), необходимы для доказательства существования и малости ее в метрике пространства $g_2^{(1)}(D)$, которое может быть проведено вариационным методом аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Учитывая, что $g(x)$ мала в метрике пространства $W_2^{(1)}(D_e \cup T)$ и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, нетрудно получить, что она равномерно мала, если точка x находится на положительном расстоянии от поверхности Γ. Далее, функция Грина $G(x, y, k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в областях D_e и T, и ее значения на множестве S совпадают в смысле $L_2(S)$, а значения ее нормальной производной совпадают в том смысле, что для любой функции $\zeta(x) \in W_2^{(1)}(D)$

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\int_{\Gamma^{(m)}} + \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{L_\alpha^{(m)}}\right\}\frac{\partial G(x)}{\partial n}\zeta(x)\,ds_x = 0,$$

где через $\Gamma^{(m)}$ и $L_\alpha^{(m)}$ обозначены гладкие замкнутые поверхности, лежащие соответственно в областях D_e и T_α $(\alpha = 1, 2, \dots N)$, и такие, что при $m \to \infty, \Gamma^{(m)} \to \Gamma$, $L_\alpha^{(m)}$ приближается к границе области T_α, а $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по нормали, внешней к областям D_e и T. Отсюда нетрудно получить, что функция $G(x, y, k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и на множестве S.

3. Чтобы найти предел последовательности $G^{(n)}(x, y, k)$ при $n \to \infty$, воспользуемся представлением (18):

$$G^{(n)}(x, y, k) = Q^{(n)}(x, y, k) + g^{(n)}(x, y, k),$$

где $Q^{(n)}(x, y, k)$ в областях D_e и T определена формулами (6), (7), (9). Как было отмечено выше, при $x \in D_e$

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(x, y, k) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y, k) = \lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(x, y, k) = G_e(x, y, k) - \int_\Gamma G_e(x, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi, \quad x \in D_e, \tag{27}$$

а функция $\varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varphi(\bar{x})}{f(\bar{x}, k)} + \int_\Gamma G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi = G_e(x, y, k). \tag{28}$$

Действительно, решения $\varphi^{(n)}(\bar{x})$ интегрального уравнения (7) при любом фиксированном чисто мнимом k ограничены равномерно по n. Поэтому последовательность функции $\varphi^{(n)}(\bar{x})$ слабо компактна в пространстве $M(\Gamma)$ ограниченных функций, т. е. найдется подпоследовательность номеров n_k такая, что для любой функции $g(\bar{x}) \in L(\Gamma)$ существует предел

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \int_\Gamma g(\bar{x})\,\varphi^{(n)}(\bar{x})\,ds_{\bar{x}} = \int_\Gamma g(\bar{x})\,\varphi(\bar{x})\,ds_{\bar{x}}.$$

Делая по этой подпоследовательности предельный переход в формуле (6), получаем (27), причем функция $\varphi(\bar{x})$ есть слабый предел функций $\varphi^{(n)}(\bar{x})$.

Покажем, что функция $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (28). Для этого, продолжая $\varphi^{(n)}(\bar{x})$ нулем на множество $\Gamma\setminus S$, умножим уравнение (7) на произвольную функцию $g(\bar{x}) \in L(\Gamma)$ и проинтегрируем по поверхности Γ:

$$\int_\Gamma g(\bar{x})\,\varphi^{(n)}(\bar{x})dS_{\bar{x}} = \int_\Gamma g(\bar{x})\,R^{(n)}(\bar{x}, k)\int_\Gamma G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi dS_{\bar{x}} =$$
$$= \int_\Gamma g(\bar{x})\,R^{(n)}(\bar{x}, k)\,G_e(\bar{x}, y, k)\,dS_{\bar{x}}.$$

Учитывая условие 3) теоремы и делая предельный переход по последовательности n_k, получим

$$\int_\Gamma g(\bar{x})\,\varphi(\bar{x})\,ds_{\bar{x}} + \int_\Gamma g(\bar{x})\,f(\bar{x}, k)\int_\Gamma G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi dS_{\bar{x}} =$$
$$= \int_\Gamma g(\bar{x})\,f(\bar{x}, k)\,G_e(\bar{x}, y, k)\,ds_{\bar{x}},$$

а так как это верно для любой функции $g(\bar{x}) \in L(\Gamma)$, то функция $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (28). В силу единственности решения уравнения (7) пределы последовательностей $Q^{(n)}(x, y, k)$ по любой подпоследовательности совпадают между собой, а потому вообще существует предел, определяемый формулами (27), (28).

4. Остается перейти от чисто мнимых k к комплексным k с $\operatorname{Im} k > 0$. Для этого, используя тождество Гильберта, поступим точно так же, как в работе [1]. Нетрудно доказать, что последовательность функций $G^{(n)}(x, y, k)$ сходится при любых фиксированных x, $y \in D_e\ (x \neq y)$ и $\operatorname{Im} k > 0$ к аналитической в области $\operatorname{Im} k > 0$ функции, причем сходимость равномерна по k, принадлежащем любой ограниченной замкнутой подобласти полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ и по $x \in D_e$ и находящемся на положительном расстоянии от поверхности Γ. Нужно лишь показать, что предел последовательности функций $G^{(n)}(x, y, k)$ и при комплексном k ($\operatorname{Im} k > 0$) определяется формулами (27) — (28). Для этого нужно доказать, что функция $G(x, y, k)$, определяемая формулами (27) — (28), аналитична в верхней полуплоскости. Но это будет следовать из однозначной разрешимости уравнения (28) при $\operatorname{Im} k > 0$. В силу фредгольмовости этого уравнения его разрешимость вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Если* $\operatorname{Im} k > 0$, *то уравнение*

$$\frac{\varphi(\bar{x})}{f(\bar{x}, k)} + \int_\Gamma G_e(\bar{x}, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi = 0 \qquad (a)$$

не имеет ненулевых решений

Доказательство. Пусть это уравнение имеет ненулевые решения. Тогда $\varphi(\bar{x})$ на поверхности Γ непрерывна и ограничена. Рассмотрим функцию

$$v(x, k) = \int_\Gamma G_e(x, \xi, k)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi.$$

Очевидно, что вне поверхности Г функция $v(x, k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и в силу непрерывности и ограниченности $\varphi(\bar{x})$ непрерывна в области D_e и имеет непрерывные нормальные производные на поверхности Г. Кроме того, из уравнения (a) следует

$$\varphi(\bar{x}) = -f(\bar{x}, k)\, v(\bar{x}, k), \quad \bar{x} \in \Gamma. \qquad (b)$$

Считая, как и ранее, нормаль направленной в сторону области D_e, вычислим нормальную произвольную функции $v(x, k)$

$$\frac{\partial v(\bar{x}, k)}{\partial n} = -\varphi(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma$$

и, сравнив с (b), получим

$$\frac{\partial v(\bar{x}, k)}{\partial n} = f(\bar{x}, k)\, v(\bar{x}, k), \quad \bar{x} \in \Gamma.$$

Применим первую формулу Грина к функции $v(x, k)$ и сопряженной $\overline{v(x, k)}$:

$$0 = \int_{D_e} \bar{v}(\Delta v + k^2 v)\, d\tau = -\int_{\Gamma} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{D_e} |\operatorname{grad} v|^2 d\tau + k^2 \int_{D_e} |v|^2 d\tau.$$

Подставим сюда найденное выражение для $\frac{\partial v}{\partial n}$:

$$-\int_{\Gamma} f(\bar{x}, k)\, |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}} - \int_{D_e} |\operatorname{grad} v(x, k)|^2 d\tau_x + k^2 \int_{D_e} |v(x, k)|^2 d\tau_{xk} = 0.$$

Очевидно, что мнимая часть выражения, стоящего слева, должна равняться нулю, т. е.

$$-\int_{\Gamma} \operatorname{Im} f(\bar{x}, k)\, |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}} + \operatorname{Im} k^2 \int_{D_e} |v(x, k)|^2 d\tau_x = 0.$$

Далее, выбирая в качестве функции $g(x) \in L(\Gamma)$ функцию $|v(x, k)|^2$ в силу условия 3) теоремы, будем иметь

$$\int_{\Gamma} f(\bar{x}, k)\, |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}} = \lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma} R^{(n)}(\bar{x}, k)\, |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}},$$

где $R^{(n)}(\bar{x}, k)$ определяется формулой (3′).

Отсюда вытекает

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Im} f(\bar{x}, k)\, |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}} = \lim_{n \to \infty} \int_{S^{(n)}} (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \operatorname{Im} \frac{w'(L(\bar{x})\, \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)} |(v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int_{S^{(n)}} (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \operatorname{Im} \frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)} |v(\bar{x}, k)|^2 dS_{\bar{x}} = \operatorname{Im} k^2 \int_{D_e} |v(x, k)|^2 d\tau_x. \qquad (c)$$

В лемме 3 будет доказано, что

$$\operatorname{Sgn} \operatorname{Im} \frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)} = -\operatorname{Sgn} \operatorname{Im} k^2.$$

Следовательно, в силу (c) и $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) > 0$ $v(x, k) \equiv 0$, а значит $\varphi(x) \equiv 0$ и лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $w(l, \bar{x}, k)$ *— решение уравнения*

$$(q(\bar{x}, l)\, w')' + k^2 q(\bar{x}, l)\, w = 0, \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

$$w(0) = a; \; w'(0) = b; \; 0 \leqslant l \leqslant L(\bar{x}),$$

где $q(\bar{x}, l) > 0$ при всех $\bar{x}$ и $0 \leqslant l \leqslant L(\bar{x})$; постоянные a, b — вещественные.
Тогда

$$\operatorname{Sgn}\operatorname{Im}\frac{w'(L(\bar{x}), \bar{x}, k)}{w(L(\bar{x}), \bar{x}, k)} = -\operatorname{Sgn}\operatorname{Im} k^2.$$

Доказательство. Пусть $w(l) = w_1(l) + iw_2(l)$, а $k^2 = k_1 + ik_2$, где функции w_1, w_2 и числа k_1, k_2 — вещественные. Тогда наше уравнение эквивалентно следующим двум:

$$(qw_1')' + k_1 q w_1 - k_2 q w_2 = 0,$$
$$(qw_2')' + k_1 q w_2 + k_2 q w_1 = 0,$$

а начальные условия примут вид:

$$w_1(0) = a;\quad w_1'(0) = b$$
$$w_2(0) = 0;\quad w_2'(0) = 0.$$

Умножая первое уравнение на $w_2(l)$, а второе на $w_1(l)$, проинтегрируем по l от 0 до L и вычтем первый результат из второго:

$$0 = \int_0^L \left[w_1(qw_2')' - w_2(qw_1')'\right] dl + k_2 \int_0^L q\,(w_1^2 + w_2^2)\, dl =$$
$$= w_1 q w_2' \Big|_0^L - w_2 q w_1' \Big|_0^L + k_2 \int_0^L q\,|w|^2 dl =$$
$$= \left[w_1(L)\, w_2'(L) - w_2(L)\, w_1'(L)\right] q(L) + k_2 \int_0^L q\,|w|^2\, dl.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Sgn}\left[w_1(L)\, w_2'(L) - w_2(L)\, w_1'(L)\right] = -\operatorname{Sgn} k_2 = -\operatorname{Sgn}\operatorname{Im} k^2.$$

Из этого равенства, так как

$$\operatorname{Im}\frac{w'}{w} = \frac{1}{|w|^2}\left(w_1 w_2' - w_2 w_1'\right),$$

получаем утверждение леммы 3.

Для завершения доказательства теоремы запишем уравнение (28) в виде

$$\varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}, k)\, G(\bar{x}, y, k), \quad \bar{x} \in \Gamma, \tag{29}$$

где

$$G(x, y, k) = G_e(x, y, k) - \int_\Gamma G_e(x, \xi, k)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi.$$

Ясно, что $G(x) \equiv G(x, y, k)$ непрерывна вплоть до поверхности Γ, а нормальная производная от функции $G(x)$ равна

$$\frac{\partial G(\bar{x})}{\partial n} = \varphi(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma. \tag{30}$$

Объединяя равенства (29) и (30), получаем

$$\frac{\partial G(\bar{x})}{\partial n} = f(\bar{x}, k)\, G(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma.$$

Таким образом, оказывается, что предельная функция $G(x, y, k)$ является функцией Грина краевой задачи (4) — (5) и тем самым теорема доказана полностью.

§ 3. ПРИМЕР

Рассмотрим один частный случай, для которого вычислим функцию $f(\bar{x}, k)$. Пусть поверхность Γ — сфера радиуса R. Векторное поле $m(x)$ направлено по радиусу. Строим две системы каналов, проходящие через множества $S_{1\alpha}$ и $S_{2\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots N)$ на поверхности Γ и ограниченные соответственно сферами радиусов r_1 и r_2 $(r_1 < r_2 < R)$. Все сферы имеют общий центр. Пусть, кроме того, существуют пределы:

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\left[S_1^{(n)} \cap K(\bar{x}, \rho)\right]}{\pi\rho^2} = \mu_1(\bar{x}),$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\left[S_2^{(n)} \cap K(\bar{x}, \rho)\right]}{\pi\rho^2} = \mu_2(\bar{x}),$$

где $\mu_1(\bar{x})$, $\mu_2(\bar{x})$ — положительные и непрерывные функции на сфере Γ, $S_1^{(n)} = \bigcup_{\alpha=1}^{N} S_{1\alpha}^{(n)}$, $S_2^{(n)} = \bigcup_{\alpha=1}^{N} S_{2\alpha}^{(n)}$, $K(\bar{x}, \rho)$ — шар радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$.

Запишем решения задачи (8), (10) в этом случае:

$$w_1(r, k) = \frac{\sin k(r - r_1)}{kr} + \frac{r_1 \cos k(r - r_1)}{r}$$

$$w_2(r, k) = \frac{\sin k(r - r_2)}{kr} + \frac{r_2 \cos k(r - r_2)}{r}.$$

Таким образом, последовательность функций $R^{(n)}(\bar{x}, k)$ имеет вид

$$R^{(n)}(\bar{x}, k) = \begin{cases} w_1(R, k), & \bar{x} \in S_1^{(n)}, \\ w_2(R, k), & \bar{x} \in S_2^{(n)}, \\ 0 & \bar{x} \in \Gamma \setminus (S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)}). \end{cases}$$

Запишем условие 3) теоремы:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma g(\bar{x})\, R^{(n)}(\bar{x}, k)\, dS_{\bar{x}} = \int_\Gamma g(\bar{x})\, f(\bar{x}, k)\, dS_{\bar{x}},$$

где $g(\bar{x}) \in L(\Gamma)$.

Отсюда получаем

$$f(\bar{x}, k) = \frac{w_1'(R, k)}{w_1(R, k)}\mu_1(\bar{x}) + \frac{w_2'(R, k)}{w_2(R, k)}\mu_2(\bar{x}).$$

Вычислив производные от функций w_1 и w_2, имеем

$$f(\bar{x}, k) = \sum_{i=1}^{2}\left[-\frac{1}{R} + \frac{1 - r_i k \operatorname{tg} k(R - r_i)}{r_i + \frac{1}{k}\operatorname{tg} k(R - r_i)}\right]\mu_i(\bar{x}).$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постоянное внимание к работе и ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Хруслов. О резонансных явлениях в одной задаче дифракции. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

2. Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов. О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

3. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. «Матем. сб.,» т. 69 (111) : 1, 1966.

Поступила 7 октября 1968 г.