ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О ПРЕДКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ

Ю. А. Златкис, И. Е. Овчаренко

В работе [1] устанавливались условия, обеспечивающие возможность расширения предкоммутирующих операторов до коммутирующих. При этом замкнутый симметрический оператор A в гильбертовом пространстве $\mathbf{Y}$ с плотной в нем областью определения $\mathbf{D}(A)$ и ограниченный оператор B, определенный всюду в $\mathbf{Y}$, назывались предкоммутирующими, если при любых $f, g \in \mathbf{D}(A)$ выполнялось равенство

$$(Bf, Ag) = (Af, B^*g).$$

Оператор B^+, действующий в пространстве $\tilde{\mathbf{Y}}$ $\left(\tilde{\mathbf{Y}} \supseteq \mathbf{Y}\right)$, называется блочным расширением оператора B, если $PB^+P = B$, где P — ортопроектор $\tilde{\mathbf{Y}}$ на $\mathbf{Y}$.

Было установлено, что всякий ограниченный оператор B, предкоммутирующий с симметрическим оператором A, обладающим конечной системой направляющих функционалов, обладает блочным расширением (с той же нормой, что и B) коммутирующим с некоторым самосопряженным расширением оператора A. Из того, что система направляющих функционалов симметрического оператора A конечна, вытекает конечность его дефектных чисел [2]. В настоящей заметке, опираясь на обобщение Г. К. Лангера* метода направляющих функционалов М. Г. Крейна, мы освобождаемся от условия конечности дефектных чисел.

Приведем необходимые факты из работы Г. К. Лангера [4].

Определение 1. (Г. К. Лангер). *Пусть $\mathbf{Y}$ — некоторое, возможно неотделимое, гильбертово пространство со скалярным произведением $[f, g]$, A — линейный оператор, определенный на линеале $\mathbf{D}(A)$, отображающий $\mathbf{D}(A) \to \mathbf{Y}$. Через H обозначим другое гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g), $\mathbf{R}$ — вещественная ось.*

Отображение $\Phi_\lambda(f)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{Y}$ называется направляющим функционалом для оператора A, если:

1. Для любого фиксированного $\lambda \in R$, $\Phi_\lambda(f)$ — линейное отображение $\mathbf{Y} \to H$.
2. Для любого фиксированного $f \in \mathbf{Y}$, $\Phi_\lambda(f)$ — голоморфная функция относительно λ в окрестности вещественной оси.
3. Для $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого наперед заданного $f \in \mathbf{Y}$ уравнение $(A - \lambda I)g = f$ имеет решение $g \in \mathbf{D}(A)$ в том и только в том случае, если $\Phi_\lambda(f) = 0$.
4. Каждому замкнутому ограниченному интервалу Δ вещественной оси сопоставляется отображение $\Psi^{(\Delta)}(\lambda; x)$ из $\Delta \times H$ в $\mathbf{Y}$ со следующими свойствами:

а) $\Psi^{(\Delta)}(\lambda; x)$ для каждого фиксированного λ линейное по x и для каждого фиксированного $x \in H$ голоморфно по λ;

* Возможность подобного обобщения теории направляющих функционалов М. Г. Крейна была, видимо, впервые показана Ф. С. Рофе-Бекетовым [3]. На этом пути им были получены теоремы о разложении по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений.

β) $\Phi_\lambda \Psi^{(\Delta)}(\lambda;\ x) = x \quad (x \in H,\ \lambda \in \Delta)$;

γ) оператор, определенный следующим образом:

$$\widehat{\Psi^{(\Delta)}}(\lambda;\ x) = \Psi^{\widehat{(\Delta)}}(\lambda;\ x) \text{ из } H \text{ в } \widehat{\mathbf{Y}},$$

непрерывен (крышечка обозначает естественный гомоморфизм $\mathbf{Y}$ на фактор пространство $\mathbf{Y}$) по множеству элементов, для которых $[f,\ f] = 0$.

Через V обозначим множество всех эрмитовых оператор-функций, действующих в H со следующими свойствами:

1) $F_0 = 0$;

2) F_t — непрерывна слева по t;

3) F_t — неубывающая относительно t.

Теорема (Г. К. Лангер). *Пусть* $\mathbf{Y}$ — *линейное пространство с квазискалярным произведением* $[f,\ g]$, A — *эрмитов оператор в* $\mathbf{Y}$, *определенный на квазиплотном множестве* $\mathbf{D}(A) \subset \mathbf{Y}$.

Пусть оператор A обладает направляющим функционалом Φ_λ со значениями в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такая функция $F_t \in V$, что для любых $f,\ g \in \mathbf{Y}$ справедливо

$$[f,\ g] = \int_{-\infty}^{\infty} (F(dt)\Phi_t f,\ \Phi_t g) = \lim_{W,\ W' \to \infty} \int_{-W}^{W'} (F(dt)\Phi_t f,\ \Phi_t g).$$

Докажем следующее предложение.

Теорема. *Пусть A — плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{Y}$, обладающий направляющим функционалом $\Phi_\lambda(f)$, B — ограниченный оператор, заданный всюду в $\mathbf{Y}$ и предкоммутирующий с A. Тогда существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, действующее в пространстве $\tilde{\mathbf{Y}}\left(\tilde{\mathbf{Y}} \supseteq \mathbf{Y}\right)$ и блочное расширение B^{+} оператора B, $\|B^{+}\| = \|B\|$, такое что $\tilde{A}$ и B^{+} коммутируют между собой. Последнее означает, что спектральное семейство оператора A при любом λ перестановочно с оператором B.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\|B\| = 1$. Образуем множество пар $\{\varphi_1;\ \varphi_2\}$, $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathbf{Y}$. Алгебраические операции определяем естественным образом. Введем новое квазискалярное произведение, определив его равенством

$$(\{\varphi_1;\ \varphi_2\},\ \{\psi_1;\ \psi_2\})_1 = [\varphi_1,\ \psi_1] + [\varphi_2;\ \psi_2] + [B\varphi_2,\ \psi_1] + [B^*\varphi_1,\ \psi_2]. \tag{1}$$

Оператор $\theta(\varphi_1;\ \varphi_2;\ \lambda) = \Phi_\lambda(\varphi_1) \dot{+} \Phi_\lambda(\varphi_2)$, действующий из $\mathbf{Y} \dot{+} \mathbf{Y}$ в $H \oplus H$ будет направляющим функционалом оператора $A \dot{+} A$.

Условия 1, 2, 3 проверяются непосредственно. Квазиплотность области задания $A \dot{+} A$ легко следует из ограниченности оператора B и квазиплотности множества $\mathbf{D}(A)$ в $\mathbf{Y}$. Остается убедиться в существовании оператора $\Psi^{(\Delta)}(\lambda;\ x)$ для $A \dot{+} A$. В качестве $\Psi^{\Delta}(\lambda;\ \cdot)$ для $A \dot{+} A$ можно принять $\Psi^{\Delta}(\lambda;\ \cdot) \dot{+} \Psi^{\Delta}(\lambda;\ \cdot)$. В силу (1) и равенства $(Bf,\ Ag) = (Af,\ B^*g)$ оператор $A \dot{+} A$, симметрический во введенной метрике. По теореме Г. К. Лангера существует оператор-функция $\tilde{F}(t) \in V$ такая, что

$$(f, g)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{F}(d\lambda)\,\theta(\varphi_1;\ \varphi_2;\ \lambda),\ \theta(\psi_1;\ \psi_2;\ \lambda)\right), \tag{2}$$

$$f = \{\varphi_1,\ \varphi_2\},\ g = \{\psi_1,\ \psi_2\}.$$

Ортогональному разложению пространства $H \oplus H$ отвечает представление оператор-функции $\tilde{F}$ в виде операторной матрицы

$$\tilde{F}(t) = \left\| \begin{matrix} \tilde{F}_{11}(t) & \tilde{F}_{12}(t) \\ \tilde{F}_{21}(t) & \tilde{F}_{22}(t) \end{matrix} \right\|,$$

определяемой соотношениями $(\tilde{F}_{ik} f, g) = (\tilde{F} f, g)$, $f \in H_i$, $g \in H_k$. Полагая в (1) сначала $\varphi_1 = \psi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \psi_2 = 0$, затем $\varphi_1 = \psi_1 = 0$, $\varphi_2 = \psi_2 = \varphi$ и учитывая соотношения, определяющие операторную матрицу $\|\tilde{F}_{ik}(t)\|_{i,\, k=1,\, 2}$, а также равенство (2), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{F}_{11}(d\lambda)\, \Phi_\lambda(\varphi),\ \Phi_\lambda(\varphi)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{F}_{22}(d\lambda)\, \Phi_\lambda(\varphi),\ \Phi_\lambda(\varphi)) = [\varphi,\ \varphi]. \tag{3}$$

Образуем матрицу

$$F(t) = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \tilde{F}_{11}(t) + \tilde{F}_{22}(t) & \tilde{F}_{12}(t) \\ \tilde{F}_{21}(t) & \tilde{F}_{11}(t) + \tilde{F}_{22}(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_0(t) & F_1(t) \\ F_{-1}(t) & F_0(t) \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Равенство (3) показывает, что исходное гильбертово пространство можно считать изометрически вложенным в гильбертово пространство, которое будем обозначать $L^2_{F_0,\, H}$ и построим следующим образом.

Берем сначала простые (т. е. принимающие конечное число значений) функции со значениями из H.

Пусть

$$f = a_1 \chi_{E_1} + a_2 \chi_{E_2} + \ldots + a_r \chi_{E_r},$$

$$g = b_1 \chi_{E_1} + b_2 \chi_{E_2} + \ldots + b_r \chi_{E_r},$$

E_1, E_2, ... E_r — непересекающиеся борелевские множества на прямой χ — их характеристические функции.

Определяем

$$(f,\ g)_{F_0} = (\Delta F_0(E_1)\, a_1,\ b_1) + \ldots + (\Delta F_0(E_r)\, a_r,\ b_r).$$

Далее замыкаем полученное предгильбертово пространство и отождествляем элементы, для которых $\|f - g\|_{F_0} = 0$. В этом пространстве, естественно, определяется оператор $P(E)$ «умножения на характеристическую функцию». Для каждого борелевского множества E $P(E) = \chi_E f$ ($\chi_E f$ — простая функция со значением f на E и O на $C\chi_E$). Операторная функция $P(E)$ обладает всеми свойствами спектрального семейства. Тем самым задается оператор «умножения на независимую переменную» в $L^2_{F_0,\, H}$. Заметим, что в силу определения направляющего функционала $\Phi_\lambda(f)$ оператор A переходит в некоторое сужение оператора $\tilde{A}$ «умножения на независимую переменную» в $L^2_{F_0 H}$. Оператор $\tilde{A}$ — самосопряженный.

Для построения блочного расширения B^+ оператора B, коммутирующего с самосопряженным оператором $\tilde{A}$, убедимся, что при h_1, $h_2 \in H$

$$|(\Delta F_1(t)\, h_1,\ h_2)|^2 \leqslant (\Delta F_0(t)\, h_1,\ h_2)\, (\Delta F_0(t)\, h_2,\ h_2). \tag{5}$$

Обозначая слагаемые в рассматривавшемся ортогональном разложении $H \oplus H$ через H_1 и H_2 и беря $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, образуем линейную комбинацию $\alpha h_1 + \beta h_2$.

Квадратичная форма

$$(\Delta F_0 h_1, h_1)\alpha\bar{\alpha} + (\Delta F_1 h_1, h_2)\alpha\bar{\beta} + (\Delta F_{-1} h_2, h_1)\bar{\alpha}\beta + (\Delta F_0 h_2, h_2)\beta\bar{\beta}$$

неотрицательна, так как $F(t) \in V$. Отсюда следует искомое неравенство. Найдем в $L^2_{F_0, H}$ ограниченный билинейный функционал $(f, g)_+$, определяя его сначала на простых функциях равенством

$$(f, g)_+ = (\Delta F_1(E_1)a_1, a_1) + \ldots + (\Delta F_1(E_r)a_r, b_r) \tag{6}$$

и затем распространяя по непрерывности на все $L^2_{F_0, H}$. Последнее возможно ввиду (5). Для элементов вида $\Phi_\lambda(\varphi)$ получается равенство

$$(\varphi, \psi)_+ = \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(d\lambda)\Phi_\lambda(\varphi), \Phi_\lambda(\psi)). \tag{7}$$

По теореме Ф. Рисса $(f, g)_+ = (B^+ f, g)$, $\|B^+\| = 1$. Полагая в (2) $\varphi_2 = 0$ и учитывая (1) и (7), находим, что $(B^+\varphi, \psi) = (B\varphi, \psi)$, т. е. B^+ — блочное расширение оператора B. Коммутирование $\tilde{A}$ и B^+ легко следует из самосопряженности $\tilde{A}$ и выражения (6) формы $(f, g)_+$.

В заключение выражаем благодарность М. Г. Крейну за внимание к работе.*

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Овчаренко. Об одном применении метода направляющих функционалов в теории предкоммутирующих операторов. ДАН СССР. 154, вып. 5, 1964, 1038—1041.

2. М. Г. Крейн. По ермітові оператори з напрямними функціоналами. Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 10 (1948), 83—106.

3. Ф. С. Рофе-Бекетов. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. Сб. «Функциональный анализ и его применение». Изд-во АН Азерб. ССР, Баку, 1961.

4. H. K. Langer. «Über die Methode der richtenden Funktionale, von M. Ct. Krein» Acta Mathematica Hungarica, Budapest, Bd. 21.

---

* Примечание при корректуре. Во время нахождения данной статьи в наборе М. Г. Крейн сообщил авторам доказательство возможности расширения операторов A и B до коммутирующих операторов, в общей ситуации, т. е. без предположения существования у A направляющего функционала.

Поступила 10 сентября 1968 г.