ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ НУЛЕЙ I

А. А. Кондратюк

В статье получены точные оценки сверху и снизу для индикаторов и нижних индикаторов целых функций $f(z)$ конечного порядка ρ с ограничениями, наложенными на максимальную и минимальную угловые плотности нулей, определение которых дано в § 1.

Класс целых функций, угловые максимальные плотности нулей которых ограничены некоторой аддитивной функцией угла $D(\Theta)$, обладает такими свойствами:

а) экстремальный индикатор в этом классе имеет простое выражение;

б) максимальная и минимальная угловые плотности нулей для функций из этого класса оказались конечноаддитивными мерами угла, вследствие чего рассматриваемые интегралы являются интегралами Римана — Стильтьеса;

в) величины

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}{}^{*} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

оказались ограниченными; здесь $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [1], $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$, а знак $\overline{\lim}^{*}$ означает следующее. Пусть C_0 — некоторое множество кружков нулевой линейной плотности (см. [1]) на плоскости $z = re^{i\varphi}$. В выражении

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}{}_{C_0} F(re^{i\varphi})$$

знак C_0 означает, что при переходе к пределу $re^{i\varphi} \bar{\in} C_0$. Тогда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}{}^{*} F(re^{i\varphi}) = \sup_{C_0} \overline{\lim_{r\to\infty}}{}_{C_0} F(re^{i\varphi}).$$

Если множество нулей целой функции измеримо (см. § 1), то она принадлежит классу функций вполне регулярного роста, теория которых разработана Б. Я. Левиным [1] и Пфлюгером.

При ограничениях, наложенных на верхнюю и нижнюю угловые плотности нулей целых функций, точные оценки для индикаторов и нижних индикаторов были найдены А. А. Гольдбергом]2—6], для чего была разработана теория интеграла по неаддитивной мере.

Автор выражает глубокую благодарность Б. Я. Левину и А. А. Гольдбергу за ценные указания и руководство работой.

§ 1. МАКСИМАЛЬНАЯ И МИНИМАЛЬНАЯ УГЛОВЫЕ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Через $n(r)$ будем обозначать число нулей целой функции $f(z)$ конечного порядка ρ, $\rho > 0$, в круге $\{|z| \leqslant r\}$. Уточненный порядок $\rho(r)$ всюду далее будем считать фиксированным.

В статье [7] нами найдены точные оценки для индикаторов целых функций, нули которых положительны и не имеют больших «сгущений», т. е. когда ограничены величины

$$D(\xi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(\xi r)}{r^{\rho}-(\xi r)^{\rho}},\quad 0\leqslant\xi<1,$$

другими словами, если конечна максимальная плотность $D=\sup\limits_{0\leqslant\xi<1}D(\xi)$. Когда нули функции $f(z)$ расположены не обязательно на одном луче, то чтобы нули не имели больших «сгущений», естественно требовать ограниченности сумм угловых «сгущений» по всевозможным разбиениям плоскости на углы. Такое требование равносильно требованию конечности максимальной плотности для плоскости, к определению которой мы переходим.

Через S обозначим систему множеств Θ на плоскости $z=re^{i\theta}$, каждое из которых представляет собой полуоткрытый угол $\Theta=\{\theta_0\leqslant\arg z<\theta\}$, $0\leqslant\theta_0<\theta<2\pi$, или объединение конечного числа таких углов. Пустое множество $\varnothing$ будем считать также принадлежащим к системе S. Пусть Θ_0 — *угол, представляющий собой всю плоскость* $\{0\leqslant\arg z<2\pi\}$. Очевидно, система S образует алгебру множеств [8] с единицей Θ_0, т. е.: 1) $\Theta_0\in S$ и для всех $\Theta\in S$ выполняется $\Theta\cap\Theta_0=\Theta$; 2) сумма, разность и произведение любых двух множеств из S принадлежит S.

Разбиением T угла Θ, который будем иногда обозначать через $[\theta_0,\theta)$, назовем набор чисел $\{\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n;\ \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$, $0\leqslant\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=\theta$, $0\leqslant\xi_j<1$. Если $\theta_j-\theta_{j-1}=1-\xi_j$, $j=1,2,\ldots,n$, то разбиение T называется правильным. Через $n_j(r,\Theta,T)$ обозначим число нулей функции $f(z)$ в области $\{\theta_{j-1}\leqslant\arg z<\theta,\ \xi_j r\leqslant|z|\leqslant r\}$, через $n(r,\Theta)$ — число нулей в секторе $\{\arg z\in[\theta_0,\theta),\ |z|\leqslant r\}$. Обозначим

$$D(\Theta,T)=\sum_{j=1}^{n}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n_j(r,\Theta,T)}{\left(1-\xi_j^{\rho}\right)r^{\rho(r)}},$$

$$\delta(\Theta,T)=\sum_{j=1}^{n}\varliminf_{r\to\infty}\frac{n_j(r,\Theta,T)}{\left(1-\xi_j^{\rho}\right)r^{\rho(r)}}.$$

Максимальной угловой плотностью нулей целой функции назовем величину

$$D(\Theta)=\sup_T D(\Theta,T),\tag{1.1}$$

минимальной угловой плотностью нулей целой функции $f(z)$ — величину

$$\delta(\Theta)=\inf_T\delta(\Theta,T).\tag{1.2}$$

Если множество Θ является объединением конечного числа m взаимно-непересекающихся углов Θ_ν, то положим

$$D(\Theta)=\sum_{\nu=1}^{m}D(\Theta_\nu),\tag{1.1'}$$

$$\delta(\Theta)=\sum_{\nu=1}^{m}\delta(\Theta_\nu).\tag{1.2'}$$

Лемма 1. *Функции множества $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$ являются положительными аддитивными S-мерами, т. е. они определены на S, $D(\Theta)\geqslant\delta(\Theta)\geqslant 0$, и для $\Theta=\Theta_1\cup\Theta_2$, $\Theta_1\cap\Theta_2=\varnothing$ выполняется*

$$D(\Theta)=D(\Theta_1)+D(\Theta_2),\quad \delta(\Theta)=\delta(\Theta_1)+\delta(\Theta_2).\tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть Θ — угол, $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, $\Theta_1 = \{\theta_0 \leqslant \arg z < \theta^*\}$, $\Theta_2 = \{\theta^* \leqslant \arg z < \theta\}$. По определению для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T_1 = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m; \xi_1, \ldots, \xi_m\}$, $\theta_m = \theta^*$, угла Θ_1 и разбиение $T_2 = \{\theta_m, \theta_{m+1}, \ldots, \theta_n; \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n\}$ угла Θ_2, что

$$D(\Theta_1) - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Theta_1, T_1), \; D(\Theta_2) - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Theta_2, T_2).$$

Для разбиения $T = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ угла Θ выполняется

$$D(\Theta_1, T_1) + D(\Theta_2, T_2) = D(\Theta, T).$$

Следовательно,

$$D(\Theta_1) + D(\Theta_2) - \varepsilon < D(\Theta, T) \leqslant D(\Theta),$$

откуда

$$D(\Theta_1) + D(\Theta_2) \leqslant D(\Theta). \qquad (1.4)$$

С другой стороны, существует такое разбиение $T' = \{\theta'_0, \theta'_1, \ldots, \theta'_n; \xi'_1, \ldots, \xi'_n\}$ угла Θ, что $D(\Theta) - \varepsilon < D(\Theta, T')$. Для разбиений $T'_1 = \{\theta'_0, \theta'_1, \ldots, \theta'_m, \theta^*; \xi'_1, \ldots, \xi'_m, \xi^*\}$ и $T'_2 = \{\theta^*, \theta'_{m+1}, \ldots, \theta'_n; \xi'_{m+1}, \ldots, \xi'_n\}$, $\xi^* = \xi_{m+1}$, углов Θ_1 и Θ_2 соответственно (если $\theta'_m = \theta^*$ или $\theta'_{m+1} = \theta^*$, то в разбиениях T'_1 и T'_2 θ^* и ξ^* отсутствуют) выполняется

$$D(\Theta, T') \leqslant D(\Theta, T'_1) + D(\Theta_2, T'_2), \qquad (1.4')$$

так как при $\theta'_m < \theta^* < \theta'_{m+1}$ имеем

$$n_{m+1}(r, \Theta, T) = n(r, [\theta'_m, \theta^*)) - n(\xi_{m+1}r, [\theta_m, \theta^*)) +$$
$$+ n(r, [\theta^*, \theta_{m+1})) - n(\xi_{m+1}r, [\theta^*, \theta_{m+1})),$$

в противном случае неравенство (1.4′) очевидно. Следовательно,

$$D(\Theta) \leqslant D(\Theta_1) + D(\Theta_2). \qquad (1.4'')$$

Объединяя (1.4) и (1.4″), получаем первое из равенств (1.3) для углов Θ, второе доказывается аналогично. Если Θ — произвольное множество из S, то (1.3) следует из (1.1′) и (1.2′).

По функциям $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$ можно образовать неубывающие функции точки $D(\theta)$ и $\delta(\theta)$ [9]. А именно, равенства

$$D([0, \theta)) = D(\theta), \; D(0) = 0, \qquad (1.5)$$
$$\delta([0, \theta)) = \delta(\theta), \quad \delta(0) = 0$$

определяют неубывающие функции $D(\theta)$ и $\delta(\theta)$ на $[0, 2\pi]$, которые мы также будем называть соответственно максимальной и минимальной угловыми плотностями. Из леммы 1 следует, что

$$D([\theta_0, \theta)) = D(\theta) - D(\theta_0), \; \delta([\theta_0, \theta)) = \delta(\theta) - \delta(\theta_0). \qquad (1.5')$$

Если для почти всех θ выполняется $D(\theta) = \delta(\theta)$, то множество нулей называется измеримым. В этом случае для почти всех θ и θ_0 существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \Theta)}{r^{\rho(r)}},$$

где $\Theta = [\theta_0, \theta)$. Действительно,

$$\delta(\Theta) = \inf_T \delta(\Theta, T) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r, \Theta)}{r^{\rho(r)}} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Theta)}{r^{\rho(r)}} \leqslant \sup_T D(\Theta, T) = D(\Theta).$$

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$D(\Theta)=\overline{\lim_{\xi_T\to 1}}\, D(\Theta,\ T), \tag{1.6}$$

$$\delta(\Theta)=\overline{\lim_{\xi_T\to 1}}\, \delta(\Theta,\ T), \tag{1.6'}$$

где $\xi_T=\min\limits_j \xi_j$ *при разбиении* T. *Равенства* (*1.6*) *и* (*1.6'*) *останутся в силе, если рассматривать только правильные разбиения.*

Доказательство. Обозначим

$$\overline{D}(\Theta)=\overline{\lim_{\xi_T\to 1}}\, D(\Theta,\ T),$$

если рассматриваются только правильные разбиения T. Для всякого $\varepsilon>0$ существует правильное разбиение T_1 угла Θ такое, что $\overline{D}(\Theta)-\varepsilon<D(\Theta,\ T_1)$. Но $D(\Theta,\ T_1)\leqslant D(\Theta)$, откуда

$$\overline{D}(\Theta)-\varepsilon<D(\Theta). \tag{1.7}$$

Покажем теперь, что

$$D(\Theta)<\overline{D}(\Theta)+\varepsilon. \tag{1.7'}$$

Действительно, пусть $T=\{\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_n;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — такое разбиение, что

$$D(\Theta)-\frac{\varepsilon}{2}<D(\Theta,\ T). \tag{1.8}$$

Рассмотрим величину

$$D_j(\xi_j)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n_j(r,\ \Theta,\ T)}{\left(1-\xi_j^{\rho}\right)r^{\rho(r)}}.$$

Так как существует предел (см. [10] и [7])

$$\lim_{\xi\to 1} D_j(\xi)=\sup_{0\leqslant\xi<1} D_j(\xi),$$

то найдется такое число m_j, что для всех натуральных $m>m_j$ выполняется

$$D_j(\xi_j)<D_j\left(\xi^{(m)}\right)+\frac{\varepsilon}{2n}\leqslant\sum_{k=1}^{m} D_j^{(k)}\left(\xi_j^{(m)}\right)+\frac{\varepsilon}{2n}, \tag{1.9}$$

где

$$\xi_j^{(m)}=1-\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{m},$$

$$D_j^{(k)}(\xi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n_j^{(k)}(r)}{(1-\xi^{\rho})\,r^{\rho(r)}},$$

$n_j^{(k)}(r)$ — число нулей в области $\left\{\xi_j^{(m)}r\leqslant|z|\leqslant r,\right.$

$$\left.\theta_{j-1}^{(k)}\leqslant\arg z<\theta_j^{(k)}\right\},\quad \theta_j^{(k)}=\theta_{j-1}+k\,\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{m},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Разбиение $T_m=\left\{\theta_0^{(0)},\ \theta_0^{(1)},\ \ldots,\ \theta_0^{(m)},\ \ldots,\ \theta_n^{(0)},\ \ldots,\ \theta_n^{(m)};\right.$ $\left.\xi_1^{(1)},\ \ldots,\ \xi_1^{(m)},\ \ldots,\ \xi_n^{(1)},\ \ldots,\ \xi_n^{(m)}\right\}$, $\xi_{j_\nu}=\xi_{jm}$, является правильным, и из (1.9) получаем

$$D(T,\ \Theta)=\sum_{j=1}^{n} D_j(\xi_j)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m} D_j^{(k)}\left(\xi_j^{(m)}\right)+\frac{\varepsilon}{2n}\right\}=D(T_m,\ \Theta)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$D(T,\ \Theta) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} D(\Theta,\ T_m) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \overline{D}(\Theta) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вместе с (1.8) последние неравенства дают (1.7′) и в силу произвольной малости ε из (1.7) и (1.7′) следует равенство (1.6) для углов Θ. Равенство (1.6′) доказывается аналогично. Если Θ — произвольное множество из S, то справедливость теоремы 1 с очевидностью следует из доказанного и равенств (1.1′) и (1.2′).

Замечание. Существуют примеры множеств нулей, показывающие, что пределы сумм в правых частях (1.6) и (1.6′) не существуют.

Пример. Пусть множество нулей состоит из точек вида $i\nu + \frac{1}{\nu}$, при ν, попадающих в интервалы вида $(2^{2k-1},\ 2^{2k}]$ и точек вида $i\nu - \frac{1}{\nu}$, при ν, попадающих в интервалы вида $(2^{2k},\ 2^{2k+1}]$, где ν и k — натуральные числа. Тогда $[r] - 1 \leqslant n(r) \leqslant [r]$. Для всех разбиений T' плоскости, не содержащих точек деления $\theta_m = \frac{\pi}{2}$ при $\theta_{j-1} < \frac{\pi}{2} < \theta_j$, имеем

$$D(\Theta_0,\ T') = D_j(\xi_j) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r) + O(1)}{r} = 1, \tag{1.10}$$

аналогично $\delta(\Theta_0,\ T') = 1$. А для всех $T = \{0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_m,\ \theta_{m+1},\ \ldots,\ \theta_n;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, где $\theta_m = \frac{\pi}{2}$, $\theta_n = 2\pi$, и таких, что $\xi_m > \frac{1}{2}$ при $T_1 = \{0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_m,\ \xi_1,\ \ldots\ \xi_n\}$ и $T_2 = \{\theta_m,\ \theta_{m+1},\ \ldots,\ \theta_n;\ \xi_{m+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$, имеем

$$D(\Theta_0,\ T) = D\left([0, \tfrac{\pi}{2}),\ T_1\right) + D\left(\left[\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\right),\ T_2\right).$$

Но

$$D\left(\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right),\ T_1\right) = D_m(\xi_m) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k - \xi_m 2^k + O(1)}{2^k - \xi_m 2^k} = 1,$$

аналогично $D\left(\left[\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right),\ T_2\right) = 1$, т. е. для таких разбиений T выполняется

$$D(\Theta_0,\ T) = 2. \tag{1.11}$$

Так же получаем, что $\delta(\Theta_0,\ T) = 0$. Из равенств (1.10) и (1.11) следует $D(\Theta_0) = 2$, и для построенного множества предел в правой части (1.6) не существует. Аналогично $\delta(\Theta_0) = 0$ и предел в правой части (1.6) также не существует.

Пусть R — некоторое счетное всюду плотное множество на $[0,\ 2\pi]$, содержащее все точки разрыва функции $D(\theta)$. Разбиение T угла Θ с концами из R такое, что все его точки деления θ_j принадлежат R, назовем R-разбиением и будем обозначать через $T(R)$.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$D(\Theta) = \sup_{T(R)} D(\Theta,\ T(R)). \tag{1.12}$$

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T = \{\theta_0,\ \ldots,\ \theta_n;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, что

$$D(\Theta) < D(\Theta,\ T) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.13}$$

Рассмотрим углы $\theta_{j_k} - \alpha_k \leqslant \arg z < \theta_{j_k} + \beta_k$, $\theta_{j_k-1} < \theta_{j_k} - \alpha_k < \theta_{j_k} + \beta_k < \theta_{j_k+1}$ с концами из R, где θ_{j_k} — точки непрерывности функции

$D(\theta)$, а $\{j_k\}$ — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим разбиение T', полученное из T следующим образом. Вместо точки деления θ_{j_k} берутся две точки $\theta_{j_k} - \alpha_k$, $\theta_{j_k} + \beta_k$, а соответствующие ξ выбираются любыми из $[0, 1)$. Очевидно, T' является R-разбиением. Тогда

$$D(\Theta, T) \leqslant D(\Theta, T'(R)) + \sum_k D\left(\left[\theta_{j_k} - \alpha_k, \theta_{j_k} + \beta_k\right)\right). \qquad (1.14)$$

Но в силу определения множества R и точек θ_{j_k} можно так подобрать α_k и β_k, что

$$D\left(\left[\theta_{j_k} - \alpha_k, \theta_{j_k} + \beta_k\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Из последнего неравенства, а также неравенств (1.13) и (1.14) вытекает, что

$$D(\Theta) \leqslant D(\Theta, T'(R)) + \varepsilon,$$

откуда следует равенство (1.12).

Величину $D(\Theta_0)$ назовем максимальной плотностью нулей целой функции $f(z)$. Всюду далее будем предполагать, что $D(\Theta_0) < \infty$.

§ 2. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Пусть $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$ — некоторые положительные аддитивные S-меры, $\delta(\Theta) \leqslant D(\Theta)$, которые мы будем кратко называть S-мерами. Через $G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ обозначим класс целых функций $f(z)$ нецелого порядка ρ, максимальная плотность нулей которых не превосходит $D(\Theta)$, а минимальная — не меньше чем $\delta(\Theta)$ для всех $\Theta \in S$. Через $h(\varphi; f)$ обозначим индикатор функции $f(z)$:

$$h(\varphi; f) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}},$$

через $\underline{h}(\varphi; f)$ — нижний индикатор:

$$\underline{h}(\varphi; f) = \varliminf_{r \to \infty}{}^{*} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Пусть $D(\theta)$ и $\delta(\theta)$ — функции, определенные равенствами (1.5), $E(u) = E(u, p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода $p = [\rho]$, $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \max(-a, 0)$. Функции

$$H_+(\theta) = \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt$$

и

$$H_-(\theta) = \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt$$

непрерывны на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, интегралы Римана — Стильтьеса по $[0, 2\pi]$ с интегрирующими функциями $D(\theta)$ или $\delta(\theta)$ существуют.

Теорема 2. *Для всякой целой функции $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ выполняются неравенства*

$$h(\varphi; f) \leqslant \int_0^{2\pi} \left\{ dD(\theta) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt - \right.$$
$$\left. - d\delta(\theta) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt \right\}, \qquad (2.1)$$

$$\underline{h}(\varphi;\ f) \geqslant \int_0^{2\pi} \left\{ d\delta(\theta) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^+ \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt - \right.$$
$$\left. - dD(\theta) \int_0^\infty t^{\rho-1} \ln^- \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right)\right| dt \right\} > -\infty \qquad (2.2)$$

для всех $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Существуют целые функции $F(z)$ *и* $\tilde{F}(z)$ *из класса* $G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, *для которых в* (2.1) *и* (2.2) *соответственно имеют место равенства для всех* φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Для доказательства теоремы 2 и других утверждений статьи будем использовать следующую лемму из [6, стр. 414]. Обозначим $r^{\rho(r)} = V(r)$.

Лемма 3. *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *можно найти* $\sigma > 0$ *со следующим свойством. Пусть два канонических произведения нецелого порядка* ρ

$$f^{(1)}(z) = \prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_{1k}},\ p\right),\quad f^{(2)}(z) = \prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_{2k}},\ p\right)$$

имеют конечные верхние плотности нулей, измеренные относительно $V(r)$, *причем* $|a_{1k}| = |a_{2k}|$, $|\arg a_{1k} - \arg a_{2k}| < \sigma$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ *Тогда*

$$|h(\varphi;\ f^{(1)}) - h(\varphi;\ f^{(2)})| \leqslant \varepsilon \qquad (2.3)$$

и для всех z, *не принадлежащих некоторому исключительному множеству* C_0 *кружков с верхней линейной плотностью, меньшей чем* η, *выполняется неравенство*

$$|\ln|f^{(1)}(z)| - \ln|f^{(2)}(z)|| < \varepsilon V(|z|). \qquad (2.4)$$

При дополнительном предположении, что нули $f^{(j)}(z)$ имеют плотность, эта лемма была доказана раньше Б. Я. Левиным [1, стр. 130, лемма 1].

Перейдем к доказательству теоремы 2. Сначала предположим, что $\delta(\Theta) \equiv 0$. Можно считать, что $f(z)$ — каноническое произведение рода $p = [\rho]$, нули которого будем обозначать через a_k. Пусть $\{\Theta_1,\ \Theta,\ \ldots,\ \Theta_n\}$ — некоторая система взаимно непересекающихся углов, объединение которых дает всю плоскость и таких, что раствор каждого $\Theta_j = \{\theta_{j-1} \leqslant \arg z < \theta_j\}$ не превосходит числа σ, о котором идет речь в лемме 3. Построим каноническое произведение $f_0(z)$ рода p с нулями в точках a'_k, которые определяются условиями $|a'_k| = |a_k|$, $\arg a'_k = \theta_{j-1}$, если $\arg a_k \in [\theta_{j-1},\ \theta_j)$. Очевидно, число нулей функций $f_0(z)$ и $f(z)$ в угле Θ_j будет одинаковым и

$$\lim_{\xi\to1}\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\ \Theta_j) - n(\xi r,\ \Theta_j)}{(1-\xi^\rho)V(r)} = D_{f_0}(\Theta_j) \leqslant D(\Theta_j). \qquad (2.5)$$

Используя теорему 4 из [7], имеем

$$h(\varphi;\ f_0) \leqslant \sum_{j=1}^n D_{f_0}(\Theta_j) H_+(\varphi - \theta_{j-1}), \qquad (2.6)$$

откуда

$$h(\varphi;\ f_0) \leqslant \sum_{j=1}^n D(\Theta_j) H_+(\varphi - \theta_{j-1}).$$

Используя определение интеграла Римана — Стильтьеса и функции $D(\theta)$, получаем

$$h(\varphi;\ f_0) \leqslant \int_0^{2\pi} H_+(\varphi - \theta)\, dD(\theta). \qquad (2.7)$$

Отсюда в силу леммы 2 и произвольной малости ε и σ находим

$$h(\varphi;\ f) \leqslant \int_0^{2\pi} H_+(\varphi-\theta)\,dD(\theta). \tag{2.7'}$$

Пусть теперь $f(z) \in G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, $\delta(\Theta) \not\equiv 0$. На основании теоремы Пойя об измеримом ядре и измеримой оболочке [7, теорема 3] существуют измеримые последовательности $\mathbf{N}_j$ чисел a'_{jk}, $\arg a'_{jk} = \theta_j$, содержащиеся в последовательности $\{a'_k\}$ с плотностями, равными $\delta(\Theta_j)$, и по теореме Б. Я. Левина [1, теорема 1, стр. 120] для $z = re^{i\varphi}$, не принадлежащих некоторому исключительному множеству C_0 кружков нулевой линейной плотности, при $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ для канонических произведений $f_j(z)$ рода $p = [\rho]$ с нулями в точках из $\mathbf{N}_j$ выполняется асимптотическое равенство

$$\ln|f_j(re^{i\varphi})| = \frac{\delta(\Theta_j)\,\pi}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\theta_j-\pi)\,V(r) + o(V(r)), \tag{2.8}$$

а также

$$h(\varphi;\ f_j) = \frac{\delta(\Theta_i)\pi}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\theta_j-\pi). \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\bar f_0(z) = \frac{f_0(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n} f_j(z)}.$$

Тогда

$$D_{\tilde f_0}(\theta) = D_{f_0}(\theta) - \sum_{\theta_j<\theta}\delta(\theta_j)$$

и

$$\ln|\bar f_0(z)| = \ln|f_0(z)| - \sum_{j=1}^{n}\ln|f_j(z)|.$$

Используя неравенство (2. 7) для функции $f_0(z)$, имеем

$$h(\varphi;\ f_0) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\{D(\Theta_j)-\delta(\Theta_j)\}\,H_+(\varphi-\theta_{j-1}) + \delta(\Theta_j)\{H_+(\varphi-\theta_{j-1}) + H_-(\varphi-\theta_{j-1})\}, \tag{2.10}$$

так как [1]

$$\frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} = \int_0^\infty t^{\rho-1}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|dt = H_+(\varphi) - H_-(\varphi).$$

В силу произвольной малости σ из (2. 10) находим

$$h(\varphi;\ f_0) \leqslant \int_0^{2\pi}\{H_+(\varphi-\theta)\,dD(\theta) - H_-(\varphi-\theta)\,d\delta(\theta)\}.$$

Используя лемму 2, отсюда получаем равенство (2. 1) теоремы 1.

Займемся теперь построением примера целой функции, для которой в (2. 1) имеет место равенство для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Это построение проводится по аналогии с подобными построениями в [1], [3], [7].

Для простоты выкладок предположим, что $\rho(r) \equiv \rho$. Если нули канонического произведения $f(z)$ рода p лежат на положительном луче, то известно [2], что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \int_0^\infty K(t,\ \theta)\,n(rt)\,dt,$$

где

$$K(t,\ \theta) = -\frac{d}{dt}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\theta}}{t}\right)\right|.$$

Через Φ_1 (Φ_2) обозначим множество тех $\theta \in [0,\ 2\pi)$, для которых ядро не меняет знак на $(0,\ \infty)$ и положительно (отрицательно) в некоторой правосторонней окрестности точки $t=0$; через Φ_3 (Φ_4) — множество тех θ, для которых ядро $K(t,\ \theta)$ меняет знак на $(0,\ \infty)$ и положительно (отрицательно) в некоторой правосторонней окрестности точки $t=0$. Через $c(\theta)$ обозначим положительный нуль ядра $K(t,\ \theta)$ как функции от t, $c(\theta) = \frac{\cos p\theta}{\cos(p+1)\theta}$, через $e_0(\theta)$ — положительный нуль функции $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\theta}}{t}\right)\right|$, как функции от t. Известно [2], что $c(\theta)$ и $e_0(\theta)$ определены для одних и тех же значений θ, т. е. для $\theta \in \Phi_3 \cup \Phi_4$, и справедливо неравенство $0 < e_0(\theta) < c(\theta)$.

Считаем, что $\theta \in \Phi_j(\varphi)$, если $0 \leqslant \theta < 2\pi$ и $\varphi - \theta \in \Phi_j$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Обозначим $\Phi_{jik} = \Phi_j \cup \Phi_i \cup \Phi_k = \Phi_{ji} \cup \Phi_k$.

Пусть $\{\tilde{\varphi}_k\}$ — некоторое счетное множество, плотное на $[0,\ 2\pi)$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность $\{\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_3,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_3,\ \tilde{\varphi}_4,\ldots\}$

Пусть $\Delta\Theta$ — некоторая S-мера, а $\Delta\theta$ — соответствующая ей (см. равенства (1.5)) неубывающая функция.

Через R обозначим некоторое счетное всюду плотное множество на $[0,\ 2\pi]$, включающее 0 и 2π, а также все точки разрыва функции $\Delta(\theta)$. Систему $\{\Theta_1,\ \Theta_2,\ldots,\ \Theta_n\}$ взаимно непересекающихся полуоткрытых промежутков $\Theta_j = \{\theta_{j-1} \leqslant \theta < \theta_j\}$ $\theta_j \in R$, $j = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n$, объединение которых дает промежуток $[0,\ 2\pi)$, назовем R-покрытием и будем обозначать через $\mathbf{T}$. Если дано другое покрытие $\mathbf{T}' = \{\Theta_1',\ldots,\ \Theta_n'\}$, то систему $\{\Theta_i \cap \Theta_j'\}$ будем называть произведением R-покрытий $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ и обозначать через $\mathbf{TT}'$. Через $\{\mathbf{T}_n\}$ обозначим последовательность всех R-покрытий. Пусть

$$\mathbf{T}_k' = \prod_{n=1}^{k}\mathbf{T}_n \quad \mathbf{T}_k' = \{\Theta_1^k,\ldots,\ \Theta_{m_k}^k\},$$

$$\Theta_j^k = \{\theta_{j-1}^k \leqslant \theta < \theta_j\},\ \theta_0^k < \theta_1^k < \ldots < \theta_{m_k}^k.$$

Очевидно, $\{m_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность. Обозначим

$$\sigma(\mathbf{T}_k',\ \Delta(\theta),\ H_+(\varphi_k - \theta)) = \sum_{j=1}^{m_k}\Delta_{kj}\sup_{\theta\in\Theta_j^k} H_+(\varphi_k - \theta),$$

где $\Delta_{kj} = \Delta(\theta_j^k) - \Delta(\theta_{j-1}^k)$. Выберем в Θ_j^k точку $\theta_{kj} \neq \varphi_k$ так, чтобы

$$\sigma(\mathbf{T}_k',\ \Delta\theta,\ H_+(\varphi_k - \theta)) \leqslant \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{m_k}\Delta_{kj}H_+(\varphi_k - \theta_{kj}). \tag{2.11}$$

Пусть $\{r_k\}$ — строго монотонно возрастающая последовательность, $r_k > 1$, выбор которой мы уточним ниже, и пусть

$$p_{2k}^j = \begin{cases} \sqrt{r_k}, \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_{12}(\varphi_k), \\ \min\{\sqrt{r_k},\ r_k e_0(\varphi_k - \theta_{kj})\}, \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_3(\varphi_k), \\ r_k e_0(\varphi_k - \theta_{kj}), \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_4(\varphi_k), \end{cases} \tag{2.12}$$

$$p_{2k+1}^j = \begin{cases} r_k^2, \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_{12}(\varphi_k), \\ r_k e_0(\varphi_k - \theta_{kj}), \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_3(\varphi_k), \\ \max\{r_k c(\varphi_k - \theta_{kj}),\ r_k^2\}, \text{ если } \theta_{kj} \in \Phi_4(\varphi_k). \end{cases} \quad (2.13)$$

Обозначим

$$P_{2k} = \min_j p_{2k}^j, \quad P_{2k+1} = \max_j p_{2k+1}^j.$$

Очевидно, всегда можно выбрать последовательность $\{r_k\}$ столь быстро растущей, чтобы

$$P_1 < P_2 < \dots, \quad \lim_{l\to\infty} m_l \left(\frac{P_{l-1}}{P_l}\right)^\rho = 0. \quad (2.14)$$

Построим каноническое произведение $f(z)$ рода p с простыми нулями в точках вида $\left(\frac{\nu}{\Delta_{kj}}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\theta_{kj}}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, $\theta_{kj} \in \Phi_2(\varphi_k)$, попадающих в кольцо $\{p_{2k}^j < |z| < p_{2k+1}^j\}$. Нетрудно подсчитать, что $n(r) \leqslant \Delta(2\pi) r^\rho$. Следовательно, $f(z)$ — целая функция не более чем нормального типа порядка ρ. Покажем, что $f(z) \in G(\rho, \Delta(\Theta), 0)$. Легко видеть, что для всякого Θ с концами из R и всех $k \geqslant k_0(\Theta)$ можно записать

$$\Theta = \bigcup_{j\in J(k,\Theta)} \Theta_j^k, \quad (2.15)$$

где $J(k, \Theta)$ — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \dots, m_k\}$. Через $n_{kj}(r)$ обозначим число нулей функции $f(z)$ на отрезке $\{|z| \leqslant r, \arg z = \theta_{kj}\}$; через $\tilde n_{kj}(r)$ — число нулей на отрезке $\{P_{2k} \leqslant |z| \leqslant \min(r, P_{2k+1}),\ \arg z = \theta_{kj}\}$.

Рассмотрим отрезок $\{\xi r \leqslant |z| \leqslant r, \arg z = \theta_{kj}\}$, $0 \leqslant \xi < 1$. При $\xi r \in [P_{2k}, P_{2k+1}]$ выполняется $n(r) - n(\xi r) = \tilde n(r) - \tilde n(\xi r)$ и, если каждая точка вида $\left(\frac{\nu}{\Delta_{kj}}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\theta_{kj}}$ рассматриваемого отрезка является нулем функции $f(z)$, имеем

$$\tilde n(r) - \tilde n(\xi r) \leqslant \Delta_{kj} r^\rho - \Delta_{kj}(\xi r)^\rho + 1,$$

в противном случае число нулей функции $f(z)$, лежащих на этом отрезке, будет меньшим. Таким образом,

$$n_{kj}(r) - n_{kj}(\xi r) \leqslant \Delta_{kj} r^\rho - \Delta_{kj}(\xi r)^\rho + 1.$$

При $\xi r < P_{2k}$ находим

$$n_{kj}(r) - n_{kj}(\xi r) \leqslant n_{kj}(r) - n_{kj}(P_{2k}) + n_{kj}(P_{2k}) \leqslant$$
$$\leqslant [\Delta_{kj} r^\rho] - \left[\Delta_{kj} P_{2k}^\rho\right] + \Delta(2\pi) P_{2k-1}^\rho \leqslant \Delta_{kj} r^\rho -$$
$$- \Delta_{kj}(\xi r)^\rho + O\left(P_{2k-1}^\rho\right).$$

Следовательно, при $r \in [P_{2k}, P_{2k+1}]$ имеем

$$n_{kj}(r) - n_{kj}(\xi r) \leqslant \Delta_{kj} r^\rho - \Delta_{kj}(\xi r)^\rho + O\left(P_{2k-1}^\rho\right).$$

При $r \in (P_{2k+1}, P_{2k+2})$ с учетом равенства $n_{kj}(r) = n_{kj}(P_{2k+1})$ таким же способом получаем, что

$$n_{kj}(r) - n_{kj}(\xi r) \leqslant \Delta_{kj} r^\rho - \Delta_{kj}(\xi r)^\rho + O\left(P_{2k-1}^\rho\right).$$

Пусть $T = \{\theta_0', \theta_1', \ldots, \theta_n'; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — некоторое R-разбиение угла $\{\arg z \in \Theta\}$. Тогда для каждого промежутка $\Theta_j' = [\theta_{j-1}', \theta_j')$ справедливо представление (2.15) и при $r \in [P_{2k}, P_{2k+2})$ выполняется

$$n_j(r, \Theta, T) = \sum_{l \in J(k, \Theta_j')} \{n_{kl}(r) - n_{kl}(\xi_j r)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l \in J(k, \Theta_j')} \Delta_{kl}(1 - \xi_j^\rho) r^\rho + O(m_k P_{2k-1}^\rho),$$

откуда

$$D(\Theta, T) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n_j(r, \Theta, T)}{(1 - \xi_j^\rho) r^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{l \in J(k, \Theta_j')} \Delta_{kl} = \Delta(\Theta).$$

Следовательно, в силу определения множества R и леммы 2 имеем $f(z) \in G(\rho(r), \Delta(\Theta), 0)$.

Зафиксируем $\tilde{\varphi}_q$. Пусть $\varphi_{k_l} = \tilde{\varphi}_q$. Покажем, что

$$\overline{\lim_{l \to \infty}} \frac{\ln \left| f\left(r_{k_l} e^{i\tilde{\varphi}_q}\right)\right|}{r_{k_l}^\rho} \geqslant \int_0^{2\pi} H_+(\tilde{\varphi}_q - \theta)\, d\Delta(\theta). \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что при $\varphi = \tilde{\varphi}_q$ выполняется

$$h(\varphi; f) \geqslant \int_0^{2\pi} H_+(\varphi - \theta)\, d\Delta(\theta), \tag{2.16'}$$

а так как обе части этого неравенства являются непрерывными функциями от φ и множество $\{\tilde{\varphi}_q\}$ всюду плотно в $[0, 2\pi)$, то неравенство (2.16) будет выполняться для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$. Для упрощения записи всюду ниже вместо k_l будем писать k, вместо $\tilde{\varphi}_q$ — φ. Обозначим через $\{a_\nu\}$ множество нулей функции $f(z)$, и пусть

$$f_1(r_k e^{i\varphi}) = \prod_{|a_\nu| < P_{2k-1}} E\left(\frac{r_k}{a_\nu} e^{i\varphi}\right),$$

$$f_2(r_k e^{i\varphi}) = \prod_{P_{2k} \leqslant |a_\nu| < P_{2k+1}} E\left(\frac{r_k}{a_\nu} e^{i\varphi}\right),$$

$$f_3(r_k e^{i\varphi}) = \prod_{|a_\nu| \geqslant P_{2k+2}} E\left(\frac{r_k}{a_\nu} e^{i\varphi}\right).$$

Так же, как и в [3, стр. 325], показывается, что

$$|\ln|f_1(r_k e^{i\varphi})|| = o(r_k^\rho), \tag{2.17}$$

$$|\ln|f_3(r_k e^{i\varphi})|| = o(r_k^\rho). \tag{2.18}$$

Через $\Psi(t, \theta)$ *обозначим множество точек* (t, θ), *для которых выполняются* условия: а) $\theta \in \Phi_1$, $0 < t < \infty$; б) $\theta \in \Phi_3$, $0 < t < e_0(\theta)$; в) $\theta \in \Phi_4$, $e_0(\theta) < t < \infty$. Положим

$$\tilde{K}(t, \theta) = \begin{cases} K(t, \theta), & (t, \theta) \in \Psi(t, \theta), \\ 0, & (t, \theta) \overline{\in} \Psi(t, \theta). \end{cases}$$

Другими словами, функция $\tilde{K}(t, \theta)$ совпадает с $K(t, \theta)$ там, где $\left|E\left(\frac{e^{i\theta}}{t}\right)\right| > 1$, и равна нулю там, где $\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| \leqslant 1$. Легко видеть, что

$$\int_0^\infty t^\rho \left|\tilde{K}(t, \theta)\right| dt \leqslant M.$$

Оценим $\ln|f_2(re^{i\varphi})|$ снизу,

$$\ln|f_2(r_k e^{i\varphi})| = \sum_{j=1}^{a} \int_0^\infty \ln\left|E\left(\frac{r_k}{\tau} e^{i(\varphi-\theta_{kj})}\right)\right| d\tilde{n}_{kj}(\tau) =$$

$$= \sum_{\theta_{kj} \in \Phi_{134}(\varphi)} \int_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\infty} \tilde{n}_{kj}(r_k t) K(t, \varphi - \theta_{kj})\, dt =$$

$$= \sum_{\theta_{kj} \in \Phi_{134}(\varphi)} \int_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}} + \int_{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}}^{\infty} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\theta_{kj} \in \Phi_{134}(\varphi)} \int_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}} \tilde{n}_{kj}(r_k t) \tilde{K}(t, \varphi - \theta_{kj})\, dt +$$

$$+ \sum_{\theta_{kj} \in \Phi_3(\varphi)} \int_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\infty} \tilde{n}_{kj}(r_k t) K(t, \varphi - \theta_{kj})\, dt. \tag{2.19}$$

При $r \geqslant p_{2k}^j$ выполняется $\tilde{n}_{kj}(r) = \tilde{n}_{kj}(p_{2k}^j)$ и в случае $\theta_{kj} \in \Phi_3(\varphi)$ имеем

$$\int_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\infty} \tilde{n}_{kj}(r_k t) K(t, \varphi - \theta_{kj}) = \tilde{n}_{kj}(p_{2k}^j) \int_{e_0(\varphi-\theta_{kj})}^{\infty} K(t, \varphi - \theta_{kj})\, dt =$$

$$= \tilde{n}_{kj}(p_{2k}^j) \ln\left|E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta_{kj})}}{t}\right)\right|_{t=e_0(\varphi-\theta_{kj})}^{t=\infty} = 0.$$

Следовательно, последняя сумма в (2. 19) равна нулю.

Так как при $r > P_{2k}$ выполняется $\tilde{n}_{kj}(r) = n_{kj}(r) - n_{kj}(p_{2k}^j) \geqslant \Delta_{kj} r^\rho - O(P_{2k}^\rho)$, $\theta_{kj} \in \Phi_2(\varphi_k)$, то

$$\sum_{\theta_{kj}\in\Phi_{134}(\varphi)} \int\limits_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}} \tilde{n}_{kj}(r_k t) K(t, \varphi-\theta_{kj})\, dt -$$

$$- \sum_{\theta_{kj}\in\Phi_{134}(\varphi)} O(P_{2k}^\rho) \int\limits_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}} t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj})\, dt \geqslant$$

$$\geqslant r_k^\rho \sum_{\theta_{kj}\in\Phi_{134}(\varphi)} \Delta_{kj} \int\limits_0^\infty t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj}) -$$

$$- O(P_{2k}^\rho) \sum_{\theta_{kj}\in\Phi_{134}(\varphi)} \int\limits_{\frac{p_{2k}^j}{r_k}}^{\frac{p_{2k+1}^j}{r_k}} t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj})\, dt -$$

$$- \sum_{\theta_{kj}\in\Phi_{14}(\varphi)} r_k^\rho \Delta_{kj} \int\limits_{r_k}^\infty t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj}) -$$

$$- \sum_{\theta_{kj}\in\Phi_1(\varphi)} r_k^\rho \Delta_{kj} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{r_k}}} t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj})\, dt.$$

В [7] показано, что каждое из слагаемых в двух последних суммах является величиной порядка $o(r_k^\rho)$. Таким образом, из последнего неравенства с учетом (2. 14), (2. 17), (2. 18), (2. 19) и равенства $\tilde{n}_{kj} = 0$ при $\theta_{kj} \in \Phi_2(\varphi)$ следует, что

$$\ln|f_2(r_k e^{i\varphi})| \geqslant r_k^\rho \sum_{j=1}^{m_k} \Delta_{kj} \int\limits_0^\infty t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta_{kj})\, dt - o(r_k^\rho). \tag{2. 20}$$

Но (см. [7])

$$\int\limits_0^\infty t^\rho \tilde{K}(t, \varphi-\theta)\, dt = H_+(\varphi-\theta).$$

Таким образом,

$$\ln|f(r_k e^{i\varphi})| \geqslant \ln|f_1(r_k e^{i\varphi})| - |\ln|f_2(r_k e^{i\varphi})|| -$$

$$- |\ln|f_3(r_k e^{i\varphi})|| \geqslant \sigma(T_k', \Delta(\theta), H_+(\varphi_k-\theta)) - \frac{r_k^\rho}{k} - o(r_k^\rho),$$

откуда следует (2. 16).

Перейдем теперь к случаю, когда $\delta(\Theta) \not\equiv 0$. Разность $D(\theta) - \delta(\theta) = \Delta(\theta)$ является неубывающей функцией. Действительно, предположим, что для некоторого $\theta > \theta_0$ выполняется $\Delta(\theta) < \Delta(\theta_0)$, тогда

$$D(\theta) - D(\theta_0) - (\delta(\theta) - \delta(\theta_0)) < 0,$$

т. е. $D(\Theta) < \delta(\Theta)$, что противоречит предположению. Обозначим $F(z) = f(z) \cdot \tilde{f}(z)$, где $f(z)$ — построенная выше целая функция по неубывающей функции $\Delta(\theta)$, а $\tilde{f}(z)$ — каноническое произведение порядка ρ с угловой плотностью нулей $\delta(\Theta)$. По теореме Б. Я. Левина [1, теорема 1, стр. 120, см. также замечание, стр. 150] функция $\tilde{f}(z)$ вполне регулярного роста и

$$h\left(\varphi; \tilde{f}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos \rho \left(|\varphi - \theta| - \pi\right) d\delta(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\delta(\theta) \int_0^{\infty} t^{\rho-1} \ln \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right) \right| dt.$$

Тогда

$$h(\varphi; F) = h(\varphi; f) + h\left(\varphi; \tilde{f}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\Delta(\theta) \int_0^{\infty} t^{\rho-1} \overset{+}{\ln} \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right) \right| + \int_0^{2\pi} d\delta(\theta) \int_0^{\infty} t^{\rho-1} \times$$

$$\times \ln \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right) \right| dt = \int_0^{2\pi} \left\{ dD(\theta) \int_0^{\infty} t^{\rho-1} \overset{+}{\ln} \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right) \right| - \right.$$

$$\left. - d\delta(\theta) \int_0^{\infty} t^{\rho-1} \overset{-}{\ln} \left| E\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{t}\right) \right| dt, \right.$$

т. е. для функции $F(z) \in G(\rho, D(\Theta), \delta(\Theta))$ в (2. 1) справедливо равенство для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Построение примера целой функции, для которой вне исключительного C_0-множества имеет место равенство в (2. 2) при всех $\varphi \in [0, 2\pi)$ проводится аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
2. А. А. Гольдберг. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями. Сибирск. матем. журн., 3 (1962), 170—177.
3. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I. Матем. сб. 58 (100) (1962), 289—334.
4. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II. Матем. сб., 61 (103) (1963), 334—349.
5. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III. Матем. сб., (65) (107) (1964), 414—453.
6. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV. Матем. сб., (66) (108) (1965), 412—457.
7. А. А. Кондратюк. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7 (1968), 37—52.
8. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 2. Изд-во МГУ, М., 1960.
9. Е. Камке. Интеграл Леберга — Стильтьеса. Физматгиз, М., 1959.
10. G. Pólya. Unersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Z. 29 (1929), 549—640.

Поступила 5 июля 1968 г.