Выпуск 10 1970

МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ С СИМВОЛОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТИ

В. С. Рабинович

В статье исследуется на нетеровость один класс уравнений типа свертки 1-го рода в гладких выпуклых конусах.

Пусть R^n — n-мерное вещественное пространство: $\dot{R}^n$ — замыкание пространства R^n до бикомпакта единственной бесконечно удаленной точкой; $\tilde{R}^n$ — бикомпактное расширение пространства R^n, сопоставляющее каждому лучу, выходящему из начала координат, бесконечно удаленную точку. Мера на пространства $\dot{R}^n$ и $\tilde{R}^n$ переносится с R^n, т. е. мера множества бесконечно удаленных точек объявляется равной нулю [1].

Пусть $\tilde{\Gamma}$ — выпуклый, замкнутый в топологии пространства $\tilde{R}^n$ конус, вырезающий на единичной сфере множество с гладкой границей. Обозначим через $P_{\tilde{\Gamma}}$ проектор на конус $\tilde{\Gamma}$, $\left(P_{\tilde{\Gamma}}\varphi\right)(x) = \varphi(x)$, если $x \in \tilde{\Gamma}$, и $P_{\tilde{\Gamma}}\varphi = 0$, если $x \bar{\in} \tilde{\Gamma}$. В статье рассматривается следующее уравнение Винера-Хопфа 1-го рода:

$$\left(P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}} u\right)(x) = \int_{\Gamma} A(x-t)\, u(t)\, dt = f(x), \quad x \in \tilde{\Gamma}, \tag{1}$$

где $A(x)$, вообще говоря, обобщенная функция класса $S'(R^n)$. Как известно, символом оператора $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ называется функция $\hat{A}(\xi)$ — преобразование Фурье ядра $A(x)$, понимаемое в смысле обобщенных функций. В том случае, когда $\hat{A}(\xi) \in C(\dot{R}^n)$-кольцу непрерывных на бикомпакте $\dot{R}^n$ функций, уравнение (1) (а также в ситуации, когда символ зависел от параметра $x \in \tilde{R}^n$) было исследовано в работе [1]. Им было получено необходимое и достаточное условие нетеровости оператора $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Это условие заключается в том, чтобы символ оператора $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ был отличен от нуля на $\dot{R}^n$.

В настоящей заметке рассмотрено уравнение (1) в случае, когда символ $\hat{A}(\xi)$ обращается в нуль или бесконечность на некоторых множествах в R^n. Предполагается, что особенности символа согласованы с конусом Γ в том смысле, что функции, заключающие в себе особенности символа, голоморфно продолжаются в области $R^n \pm i\Gamma^*$ (Γ^* — конус, двойственный к Γ). Особенностям символа сопоставляются функциональные пространства типа пространств H^s — Соболева — Слободецкого, и уравнение (1) рассматривается в этих пространствах.

Используя результаты работы [1], мы получили необходимые и достаточные условия нетеровости оператора $P_{\widetilde{\Gamma}}AP_{\widetilde{\Gamma}}$ в этих пространствах. В работе также рассмотрены операторы составной свертки, символ которых имеет особенности, согласованные с соответствующими конусами.

Отметим, что одномерные уравнения свертки с символом, имеющим особенности, изучались в работах [5—7] и др. Подробная библиография приведена в работе [6].

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОСОБЕННОСТИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1°. Будем обозначать через $x=(x_1, \ldots, x_n)$ точки n-мерного вещественного пространства R^n_x, а через $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — точки пространства R^n_ξ, двойственного к R^n_x, относительно формы $((x_1)\xi)=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$. Положим $\zeta=\xi+i\eta$, где $\eta\in R^n_\eta$. Преобразование Фурье функции $u(x)$ обозначается через

$$\hat{u}(\xi)=F[u(x)]=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{R^n} u(x)\,e^{i(x,\,\xi)}dx, \tag{1.1}$$

а через F^{-1} — обратное преобразование Фурье. Положим $D=(D_1, \ldots, D_n)$, где $D_j=-i\dfrac{D}{Dx_j}$. Если $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т. е. набор из n натуральных чисел, то $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$. Аналогично $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_k^{\alpha_n}$.

Через $S(R^n)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций таких, что

$$\sup_x |x^\beta D^\alpha \varphi(x)|<\infty$$

для любых мультииндексов α, β; $S'(R^n)$ — сопряженное к $S(R^n)$ пространство обобщенных функций.

Пусть $\Gamma\ (\in R^n_x)$ — выпуклый открытый конус с центром в начале координат, $\Gamma^*\ (\in R^n_\eta)$ — двойственный к Γ конус $\Gamma^*=\{\eta:(x,\eta)>0,$ для всех $x\in\Gamma,\ x\neq 0\}$, Γ_- — противоположный Γ конус.

Обозначим

$$\overset{\circ}{S}(\overline{\Gamma})=\{\varphi:\varphi\in S(R^n),\ \operatorname{supp}\varphi\subset\overline{\Gamma}\},$$

$\overset{\circ}{S}(\overline{\Gamma})$ — замкнутое пространство в $S(R^n)$. Двойственное к $\overset{\circ}{S}(\overline{\Gamma})$ пространство состоит из сужений обобщенных функций пространства $S'(R^n)$ на конус $\overline{\Gamma}$ и обозначается как $S'(\overline{\Gamma})$.

Аналогично

$$\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Gamma})=\{u:u\in S'(R^n),\ \operatorname{supp}u\subset\overline{\Gamma}\},$$

а $S(\overline{\Gamma})$ — множество сужений на $\overline{\Gamma}$ функций из $S(R^n)$. Пространства $S(\overline{\Gamma})$ и $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Gamma})$ оказываются сопряженными друг к другу.

2°. Введем классы функций, заключающие в себе особенности символа оператора свертки, и свяжем с этими функциями банаховы пространства типа пространств Соболева — Слободецкого [3].

Определение 1.1. *Обозначим через $\sigma^N_\pm(R^n,\Gamma^*)$ класс функций $R(\zeta)$, голоморфных на ζ в области $R^n_\xi\pm i\Gamma^*$ и удовлетворяющих оценкам*

$$|D^\alpha_\xi R(\xi+i\eta)|\leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^N,\quad |D^\alpha_\xi R^{-1}(\xi+i\eta)|\leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^N, \tag{1.2}$$

где $\eta\in\Gamma^*$, $\eta\neq 0$, а положительные постоянные C_α и N не зависят от ξ.

и η. *Объединение классов* $\sigma_{\pm}^{N}(R^n, \Gamma^*)$ *будем обозначать* $\sigma_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$. *Очевидно, что вместе с функцией* $R(\zeta)$ *классу* $\sigma_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$ *принадлежит также* $R^{-1}(\zeta)$.

Из оценок (1.2) следует, что у функций $R(\zeta) \in \sigma_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$ существуют граничные значения

$$R(\xi \pm i0) = \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \in \Gamma^*}} R(\xi \pm i\eta),$$

где предел понимается в топологии пространства $S'(R^n)$ [4, стр. 275]. Множество граничных значений функций из $\sigma_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$ обозначается через $\overset{\circ}{\sigma}_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$. Отметим, что классы $\overset{\circ}{\sigma}_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$ являются коммутативными кольцами и содержат, в частности, гиперболические полиномы*, для которых конус $\Gamma_{\pm}^*$ вложен в конус V гиперболических направлений полинома, а также их произвольные степени.

Предложение 1.1. *Носители обобщенных функций* $r_{\pm}(x) = F^{-1}[R(\xi \pm i0)]$ $(\in S'(R^n))$ *лежат в конусе* $\overline{\Gamma}_{\pm}$. *Аналогичное заключение справедливо относительно функций* $q_{\pm}(x) = F^{-1}[R^{-1}(\xi \pm i0)]$.

Предложение 1.1 следует из оценок (1.2) и доказывается с помощью стандартного приема [2, стр. 188].

Каждой функции $R(\xi \pm i0)$ с $\overset{\circ}{\sigma}_{\pm}(R^n, \Gamma^*)$ сопоставим псевдодифференциальные операторы $R^{\pm 1}(D \pm iO)$:

$$R(D \pm iO)\, u(x) = (r_{\pm} * u)(x), \quad R^{-1}(D \pm iO)\, u(x) = (q_{\pm} * u)(x), \quad (1.3)$$

определенные на функциях $u(x) \in S(R^n)$, где $*$ означает свертку. Такое определение корректно, так как свертка основной и обобщенной функций определена и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию.

Операторы $R^{\pm 1}(D \pm iO)$ можно распространить на обобщенные функции классов $\overset{\circ}{S'}(\overline{\Gamma})$, $S'(\overline{\Gamma})$. Имеет место следующее.

Предложение 1.2. *Оператор* $R(D + iO)$, *отвечающий функции* $R(\xi + iO) \in \overset{\circ}{\sigma}_{+}(R^n, \Gamma^*)$, *непрерывен в пространстве* $\overset{\circ}{S}(\overline{\Gamma})$ $(\overset{\circ}{S'}(\overline{\Gamma}))$ *и отображает его изоморфно на себя.*

На функциях $\varphi(x) \in \overset{\circ}{S}(\overline{\Gamma})$ операторы $R^{\pm 1}(D + iO)$ можно определить следующим образом:

$$R^{\pm 1}(D + iO)\, u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} R^{\pm 1}(\zeta)\, \hat{\varphi}(\zeta)\, e^{-i(\zeta, x)} d\xi, \quad (1.4)$$

причем последний интеграл не зависит от $\eta \in \Gamma^*$ в силу голоморфности подынтегральной функции в области $R_{\xi}^n + i\Gamma^*$. Отметим, что оператор $R^{-1}(D \pm iO)$ является обратным к $R(D + iO)$. Так как применение операторов $R^{\pm 1}(D + iO)$ есть свертка с обобщенной функцией $r_{+}(x)$, $\operatorname{supp} r_{+} \times (x) \subset \overline{\Gamma}$, $(q_{+}(x), \operatorname{supp} q_{+}(x) \subset \overline{\Gamma})$, то $\operatorname{supp} R^{\pm 1}(D + iO)\varphi \subset \overline{\Gamma}$, если $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\Gamma}$. Далее, дифференцируя (1.4), а затем интегрируя по частям в получившемся интеграле, найдем, что

$$x^{\beta} D_x^{\alpha} R^{\pm 1}(D + iO)\, \varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int D_{\xi}^{\beta} \left[(-\zeta)^{\alpha} R^{\pm 1}(\zeta)\, \hat{\varphi}(\zeta)\right] e^{-i(\zeta, x)} d\xi. \quad (1.5)$$

Правая часть неравенства (1.5) представляет собой непрерывный линейный функционал на пространстве $S(R^n)$, так как функция $(-\zeta)^{\alpha} R^{\pm 1}(\zeta)$

* Определение гиперболического полинома дано в § 2, см. также [2, стр. 178—186].

и все ее производные удовлетворяют оценкам (1.2) и, следовательно, принадлежат $S'(R^n)$. Таким образом, для любой функции $\varphi(x) \in \mathring{S}(\overline{\Gamma})$

$$|x^\beta D_x^\alpha R^{\pm 1}(D+iO)\varphi(x)| < \infty.$$

Следовательно, $R^{\pm 1}(D+iO)\varphi(x) \in \mathring{S}(\overline{\Gamma})$ также.

Покажем, что операторы $R^{\pm 1}(D+iO)$ непрерывны в $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$ т. е. отображение $R(D+iO)$ есть изоморфизм $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$ на себя. С помощью оценок (1.2) из формулы (1.5) найдем, что существуют такие константы $C(\alpha, \beta, R^{\pm 1})$, $M(\alpha, \beta, n, R^{\pm 1})$ и полином $P(x)$, что выполняется следующее неравенство для всех $\eta \in \Gamma^*$:

$$|e^{-(\eta, x)}x^\beta D_x^\alpha R^{\pm 1}(D+iO)\varphi(x) \leqslant C(\alpha, \beta, R^{\pm 1}) \sup_x |(1+ \\ +|x|)^{Me} {}^{-(\eta, x)}P(D)\varphi(x)| \qquad (1.6)$$

Так как функция $e^{(-\eta, x)}$, $\eta \in \Gamma^*$ равномерно ограничена на $\operatorname{supp}\varphi$, то

$$|e^{-(\eta, x)}x^\beta D_x^\alpha R^{\pm 1}(D+iO)\varphi(x)| \leqslant C_1(\alpha, \beta, R^{\pm 1}) \sup_x |(1+|x|)^M P(D)\varphi(x)|. \qquad (1.7)$$

Переходя к пределу при $\eta \to 0$ в левой части неравенства (1.7), что возможно ввиду ее равномерной ограниченности при всех $\eta \in \Gamma^*$, включая $\eta = 0$, получим, что оператор $R^{\pm 1}(D+iO)$ непрерывен в $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$. С помощью аналогичных рассуждений, использующих возможность продолжения функции $R^{\pm 1}(\xi+iO)$ в область $R_\xi^n + i\Gamma^*$, а также оценок (1.2) получим, что операторы $R^{\pm 1}(D+iO)$ непрерывны и в пространстве $\mathring{S}'(\Gamma)$, т. е. отображение $R(D+iO)$ есть изоморфизм пространства $\mathring{S}'(\overline{\Gamma})$ на себя. Сопряженным (формально) к оператору $R(D+iO)$ относительно функционала

$$(u, \varphi) = \int_\Gamma u(x)\overline{\varphi(x)}dx \qquad (1.8)$$

является оператор $P_\Gamma \overline{R}(D-iO)$, где оператор $\overline{R}(D-iO)$ отвечает функции $\overline{R(\xi+iO)} \in \sigma_-^\circ(R^n, \Gamma^*)$. Поскольку оператор $\overline{R}(D+iO)$, отвечающий функции $\overline{R}(\xi+iO) \in \sigma_+^\circ(R^n, \Gamma^*)$, осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{S}(\Gamma)$ на себя, то сопряженный оператор $P_\Gamma R(D-iO)$, отвечающий функции $R(\xi-iO) \in \sigma_-^\circ(R^n, \Gamma^*)$, определяет отображение, являющееся изоморфизмом пространства $S'(\overline{\Gamma})$ на себя, причем

$$(P_\Gamma R(D-iO))^{-1} = P_\Gamma R^{-1}(D-iO). \qquad (1.9)$$

Из соотношения (1.9) найдем, что

$$P_\Gamma R(D-iO) = P_\Gamma R(D-iO)P_\Gamma. \qquad (1.10)$$

Введем функциональные пространства, являющиеся областями определения операторов $R(D+iO)$ и $P_\Gamma R(D-iO)$.

Определение 1.2. *Обозначим через $\mathring{H}_{R+}(\overline{\Gamma})$ пространство, являющееся замыканием множества $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$ в норме*

$$\|u\|_{\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma})} = \|R(D+iO)u\|_2 = \|R(\xi+iO)\hat{u}(\xi)\|_2. \qquad (1.11)$$

Покажем, что $\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma})$ является полным нормированным пространством. Рассмотрим последовательность $\{u_m\} \in \mathring{S}(\overline{\Gamma})$, фундаментальную по норме (1.11). Так как функции из $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$ образуют плотное множество в пространстве $L_2(\overline{\Gamma})$, а оператор $R(D+iO)$ непрерывен в $\mathring{S}(\overline{\Gamma})$, то из полноты пространства $L_2(\overline{\Gamma})$ следует, что существует функция $v \in L_2(\overline{\Gamma})$ такая, что

$$\| R(D+iO)\, u_n - v \|_2 < \varepsilon.$$

Поскольку отображение $R(D+iO)$ есть изоморфизм пространства $\mathring{S}'(\overline{\Gamma})$ на себя, то найдется функция $u(x) \in \mathring{S}'(\overline{\Gamma})$ такая, что $R(D+iO)\,u = v$. Таким образом, пространство $\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma})$ полно и его можно определить и как множество обобщенных функций из $\mathring{S}'(\overline{\Gamma})$, для которых конечна норма (1.11).

Нетрудно убедиться, что если $R(\zeta)\,(\in \delta_+(R^n,\ \Gamma^*))$ ограничена снизу отличной от нуля константой, то

$$\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma}) \subset L_2(\overline{\Gamma}), \tag{1.12}$$

если же $R(\zeta)\,(\in \sigma_+(R^n,\ \Gamma^*))$ *ограничена сверху, то*

$$\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma}) \supset L_2(\overline{\Gamma}), \tag{1.13}$$

причем включения (1.12), (1.13) имеют место вместе с топологией. Очевидно, что оператор $R(D+iO)$ осуществляет изометрический изоморфизм пространств $H_{R_+}(\overline{\Gamma})$ и $L_2(\overline{\Gamma})$.

Определение 1.3. *Обозначим через* $H_{R_-}(\overline{\Gamma})$ *пространство обобщенных функций* $u(x)$ *из* $S'(\overline{\Gamma})$ *таких, что*

$$\| u \|_{H_{R_-}(\overline{\Gamma})} = \| P_\Gamma R(D-iO)\, u(x) \|_2. \tag{1.14}$$

Точно так же, как и выше, можно показать, что $H_{R_-}(\overline{\Gamma})$ — полное нормированное пространство; для него имеют место включения, аналогичные (1.12), (1.13). Стандартными рассуждениями, следуя, например [3, стр. 25], показывается, что пространства $H_{R_+}(\overline{\Gamma})$ и $H_{\overline{R}_-^{-1}}(\overline{\Gamma})$ являются сопряженными друг к другу.

Отметим, что оператор $P_\Gamma R(D-iO)$ осуществляет изометрический изоморфизм пространств $H_{R_-}(\overline{\Gamma})$ и $L_2(\overline{\Gamma})$ и обратный оператор к $P_\Gamma R(D-iO)$ определяется формулой (1.10).

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ТИПА СВЕРТКИ С СИМВОЛОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТИ ИЗ КЛАССОВ $\mathring{\sigma}_\pm(R^n,\ \Gamma^*)$

В этом параграфе изучаются уравнения типа свертки с символом, имеющим вид

$$\hat{A}(\xi) = R_-(\xi - iO)\, \hat{A}(\xi)\, R_+(\xi + iO), \tag{2.1}$$

где

$$\hat{A}(\xi) \in C(\dot{R}^n),$$

а

$$R_\pm(\xi + iO) \in \mathring{\sigma}_\pm(R^n,\ \Gamma^*).$$

1°. Приведем несколько примеров особенностей и операторов типа свертки, изучаемых в данной работе.

Пример 1. *Пусть* $\hat{A}(\xi) = \hat{A}(\xi)\, P^\lambda(\xi + iO)$, $-\infty < \lambda < \infty$, *где* $\hat{A}(\xi) \in C(\dot{R}^n)$, *а* $P(\xi)$ — *однородный полином гиперболический относительно век-*

тора $\omega \in R^n_\xi$, *т. е.* $P(\omega) \neq 0$ *и существует число* τ_0 *такое, что* $P(\xi + i\tau\omega) \neq 0$ *для всех* $\xi \in R^n$ *и* $\tau > \tau_0$. *В дальнейшем предполагается, что* $\tau_0 \leqslant 0$.

Известно [2, стр. 182], что существует выпуклый конус V, все векторы которого являются направлениями гиперболичности полинома $P(\xi)$. Конус V совпадает с компонентой множества $P(\xi) \neq 0$, содержащей вектор ω. Символ $\hat{A}(\xi)$ обращается в нуль или бесконечность на границе конуса V в зависимости от знака λ.

Классическим примером гиперболического полинома является $P(\xi) = \xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2$. В этом случае V — шаровой конус, $V = \{\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2 > 0,\ \xi_1 > 0\}$, причем $V = V^*$.

Символу $A(\xi)$ сопоставим псевдодифференциальный оператор

$$\int_{\Gamma} A(x-t)\, P^{\lambda}(D + iO)\, u(t)\, dt = f(x),\quad x \in \tilde{\Gamma}, \tag{2.2}$$

где $A(x)$ ($\in S'R^n$)) — ядро, соответствующее функции $\hat{A}(\xi)$. Предполагается, что конус $\Gamma^* \subset V$.

Пример 2. $A(\xi) = \hat{A}(\xi)\,|(\omega, \xi)|^{\lambda}$, $-\infty < \lambda < \infty$, $\hat{A}(\xi) \in C(\dot{R}^n)$, $\omega\ (\in R^n_x)$ — *единичный вектор. Символ* $\hat{A}(\xi)$ *обращается в нуль или бесконечность в окрестности гиперплоскости* $(\omega, \xi) = 0$ *в зависимости от знака* λ. *Символу* $\hat{A}(\xi)$ *сопоставляется оператор Винера—Хопфа для выпуклого конуса* $\Gamma \supset \omega$ *с ядром* $A(x) \in S'(R^n)$,

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\lambda}(|(\omega, x-t)|)\, A(t_{\omega}, t')\, dt_{\omega}, \tag{2.3}$$

где $E_{\lambda}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)|x|^{-\lambda-1}}{2^{-\lambda}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$ — *ядро риссовского потенциала* [9, стр. 243].

Интегрирование в формуле (2.3) *ведется вдоль прямой, отвечающей вектору* ω, t' — *проекция вектора* t *на подпространство* $(\omega, t) = 0$. *Функцию* $|(\omega, \xi)|^{\lambda}$ *представим в виде*

$$|(\omega, \xi)|^{\lambda} = (-i(\omega, \xi) + 0)^{\frac{\lambda}{2}}\,(i(\omega, \xi) + 0)^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{2.4}$$

где обобщенные функции $R_{\pm}(\xi \pm iO) = (\mp i(\omega, \xi) + 0)^{\frac{\lambda}{2}} = \lim\limits_{\eta \to 0}(\mp i(\omega, \xi + i\eta))^{\frac{\lambda}{2}} \subset \overset{\circ}{\sigma}_{\pm}(R^n, R^n_{\omega+})$; $R^n_{\omega+}$ — *полупространство* $(\eta, \omega) > 0$.

Пример 3. *Рассмотрим оператор Винера—Хопфа для полупространства*

$$(P_+AP_+u)(x) = \int_{R^n_+} A(x-t)\, u(t)\, dt = f(x),\quad x \in R^n_+, \tag{2.5}$$

где

$$R^n_+ = \{x_1 > 0,\ -\infty \leqslant x_j < \infty\}$$

и

$$\hat{A}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{\lambda}{2}} A(\xi).$$

Ядро $A(x)$ имеет следующий вид:

$$A(x) = \int_{R^n} G_\lambda(x-t)\, A(t)\, dt, \tag{2.6}$$

где $G_\lambda(x) = \dfrac{|x|^{\frac{-\lambda-n}{2}} K_{\frac{n+\lambda}{2}}(|x|)}{2^{\frac{n-\lambda-2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$ *— ядро бесселева потенциала* [9, стр. 355]

($K_r(x)$ *— цилиндрическая функция Макдональда*).

Символ $A(\xi)$ оператора (2.5) *представим так:*

$$A(\xi) = (|\xi'| + i\xi_1 + 1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{A(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{(|\xi_1|^2 + (1+|\xi'|^2))^{\frac{\lambda}{2}}} (|\xi'| - i\xi_1 + 1)^{\frac{\lambda}{2}},$$

где ξ' — проекция вектора ξ на подпространство $\xi_1 = 0$. Заметим, что

$$\hat{A}_1(\xi) = \frac{\hat{A}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{(|\xi_1|^2) + (1+|\xi'|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \in C(\dot{R}^n),$$

а функции

$$R_\pm(\xi) = (|\xi'| \mp i\xi_1 + 1)^{\frac{\lambda}{2}} \in \sigma^\bullet_\pm(R^n, R_{\eta_1}),$$

где R_{η_1} — луч $\eta_1 > 0$.

2°. Изучим уравнение Винера-Хопфа для выпуклого гладкого конуса Γ

$$P_{\tilde{\Gamma}} A u_+ = f,\ f \in H_{R_-^{-1}}(\overline{\Gamma}), \tag{2.7}$$

причем символ оператора (2.7) имеет вид (2.1). Решение $u_+(x)$ уравнения (2.7) находим в пространстве $\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma})$.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для того, чтобы уравнение* (2.7), *имеющее символ вида* (2.1), *удовлетворяло теории Нетера из $\mathring{H}_{R_+}(\overline{\Gamma})$ в $H_{R_-^{-1}}(\overline{\Gamma})$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\hat{A}(\xi)$, определяемая из представления* (2.1), *не обращалась в нуль на $\dot{R}^n$. При этом индекс оператора* (2.7) *равен нулю для $n > 1$.*

Из представления (2.1) следует, что уравнение (2.7) можно записать в виде

$$P_{\tilde{\Gamma}} R_-(D - iO)\, A R_+(D + iO)\, u_+ = f. \tag{2.8}$$

Так как операторы $R_+(D+iO)$ и $P_{\tilde{\Gamma}} R_-(D-iO)$ осуществляют изометрический изоморфизм пространств $H_{R_+}(\overline{\Gamma})$ и $L_2(\overline{\Gamma})$, $L_2(\overline{\Gamma})$ и $H_{R_-^{-1}}(\overline{\Gamma})$ соответственно, то исследование оператора (2.7) на нетеровость приводится к исследованию на нетеровость оператора $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ с символом $\hat{A}(\xi) \in C(\dot{R}^n)$ в пространстве $L_2(\overline{\Gamma})$. Такое исследование было проведено в работе [1], где установлено, что оператор $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ с символом $\widehat{A}(\xi)$ есть оператор Нетера в $L_2(\overline{\Gamma})$ тогда и только тогда, когда $A(\xi) \neq 0$ на $\dot{R}^n_\xi$. При этом индекс оператора $P_{\tilde{\Gamma}} A P_{\tilde{\Gamma}}$ равен нулю, если $n > 1$. Теорема доказана.

Замечание. В том случае, когда конус Γ — полупространство $R^n_+ = \{x_1 > 0, \ -\infty < x_j < \infty\}$, а символ $\widehat{A}(\xi)$ имеет вид (2. 1), где $R_\pm (D \pm \pm iO) \in \sigma^0_\pm (R^n R_{n_1})$, теорема 2. 1 может быть переформулирована с заменой нетеровости оператора (2. 7) на обратимость. Это следует из того, что для полупространства оператор $P_+ A P_+$ с непрерывным на $\dot{R}^n_\xi$ символом обратим в $L_2(\overline{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда $A(\xi) \neq 0$ на $\dot{R}^n_\xi$ [8].

3^0. Составные свертки. Пусть $\tilde{R}^n_x = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \tilde{\Gamma}_j U \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Gamma}_j$ — выпуклые замкнутые в топологии пространства $\tilde{R}^n_x$ конуса, $\tilde{\Omega} = \tilde{R}^n_x / U_j \tilde{\Gamma}_j$ — коническое множество. При этом след границы $\tilde{\Omega}/\mathrm{int}\tilde{\Omega} \cup (U\tilde{\Gamma}/\mathrm{int}\tilde{\Gamma})$ на единичной сфере состоит из гладких замкнутых непересекающихся поверхностей.

Рассмотрим уравнение

$$Bu = \sum_{j=1}^{m} B_j u_j + B_\omega P_\Omega u = f, \quad f \in L_2(R^n). \tag{2.9}$$

в котором операторы B_j, B_ω инвариантны относительно сдвига, и их символы имеют вид

$$\widehat{B}_j(\xi) = \widehat{B}_j(\xi) R^{(j)}_+ (\xi + iO), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.10}$$

где

$$\widehat{B}_j(\xi), \quad B_\omega(\xi) \in C(\dot{R}^n), \quad R^{(j)}_+ (\xi + iO) \in \sigma^0_+ (R^n, \Gamma^*_j).$$

Решение уравнения (2. 9) ищется в пространстве

$$H = \bigoplus_{j=1}^{m} H_{R^{(j)}_+} (\overline{\Gamma}_j) \oplus L_2(\overline{\Omega}).$$

Обозначим через R оператор

$$Ru = \sum_{j=1}^{m} R^{(j)}_+ (D + iO) u_{j+} + P_\Omega u. \tag{2.11}$$

Легко видеть, что оператор R изоморфно отображает пространство H на $L_2(R^n)$. Уравнение (2. 9) можно записать в виде

$$Bu = \sum_{j=1}^{m} B_j P_{\Gamma_j} R^{(j)}_+ (D + iO) u_{j+} + B_\Omega P_\Omega u = BRu = f, \tag{2.12}$$

где

$$B = \sum_{j=1}^{m} B_j P_{\Gamma_j} + B_\omega P_\Omega.$$

Теперь из результатов работы [1] следует

Теорема 2.2. *Для того, чтобы оператор составной свертки B с символом, определяемым формулами (2.10), был оператором Нетера из H в $L_2(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы ни одна из функций $\hat{B}_j(\xi)$, $\hat{B}_\omega(\xi)$ не обращалась в нуль на $\dot{R}^n_\xi$. При этом индекс оператора (2.9) для $n > 1$ равен нулю.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для другого оператора составной свертки

$$Du = \sum_{j=1}^{m} P_{\tilde{\Gamma}_j} D_j\, u + P_\Omega D_\omega u = f,\ f \in L_2(R^n),$$

где

$$\hat{D}_j(\xi) = \hat{L}_j(\xi)\, R^{(j)}_{-}(\xi - iO),\quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\hat{L}_j(\xi),\quad D_\omega(\xi) \in C(\dot{R}^n_\xi),\quad R^{(j)}_{-}(\xi - iO) \in \sigma^0_{-}(R^n, \Gamma^*_j).$$

В заключение автор выражает благодарность В. А. Какичеву за руководство, а также И. Б. Симоненко за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Симоненко. Операторы типа свертки в конусах. «Матем. сб.», т. 74, 116(2), 1967, стр. 298—313.

2. Л. Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. «Мир», М., 1965.

3. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН, т. XX, в. 1, стр. 3—71.

4. В. С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964.

5. В. Б. Дыбин. Исключительный случай в теории интегральных уравнений свертки. Изв. АН БССР, сер. матем., № 3 (1966), 37—45.

6. Г. Н. Чеботарев. О нормальной разрешимости уравнений Винера — Хопфа в некоторых особых случаях. Изв. вузов, матем. № 3 (70), 1968, стр. 113—118.

7. М. И. Хайкин. Об интегральном уравнении типа свертки I-го рода. Изв. вузов, матем., 3(58), 1967.

8. Л. С. Гольденштейн. О многомерных интегральных уравнениях Винера — Хопфа. Изв. Ан Молд. ССР (сер. физ-матем. и техн.), 1964, № 6, 27—38.

9. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.

Поступила 30 мая 1968 г.