ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ ЗАДАЧИ РИМАНА ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Я. Тихоненко

В данной работе исследуется один способ приближенного решения задачи Римана

$$\frac{1}{x^r} K(x) F^+(x) = F^-(x) + G^+(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

где r — целое неотрицательное число, а заданная функция $K(x)$ такова, что произведение $\sqrt{x^2+q^2}\,K(x)$ на сомкнутой оси x отлично от нуля и удовлетворяет условию Гельдера; $q = \text{const} > 0$. Для описания свойств заданной функции $G^+(x)$ и искомых функций $F^+(x)$ и $F^-(x)$ введем следующие обозначения.

Символом $L_2^+[0, n]$, где n — целое число, будем обозначать класс функций $A^+(x)$, определенных на оси x, аналитически продолжимых на верхнюю полуплоскость, причем равномерно относительно $y \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A^+(x+iy)(x+iy-i)^{-n}|^2\,dx < \text{const}.$$

Символ $L_2^-[0, n]$ вводится так же, как и $L_2^+[0, n]$, но с заменой верхней полуплоскости на нижнюю $y \leqslant 0$. Известная функция $G^+(x)$ принадлежит классу $L_2^+[0, -1]$, а неизвестные функции $F^+(x)$ и $F^-(x)$ принадлежат классам

$$F^+(x) \in L_2^+[0, 2], \quad F^-(x) \in L_2^-[0, -1]. \tag{2}$$

В § 1 укажем типичные задачи теории упругости, приводящиеся к краевой задаче (1).

§ 1. Пример 1. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \tag{3}$$

в полосе $0 < y < 1$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad u_{yy}(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x > 0; \quad u_{yy}(x, 0) + \nu u_{xx}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$u_{yyy}(x, 0) + (2-\nu)\,u_{xxy}(x, 0) = 0, \quad x < 0.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, $\nu = \text{const} > 0$, $0 \leqslant \nu < 0{,}5$. Поставлена задача об изгибе пластины в форме полосы $0 < y < 1$. Край $y = 1$ опертый; часть $x > 0$ края $y = 0$ оперта, а остальная часть края $y = 0$ свободна.

Используя методику статьи [1], получим задачу Римана (1), (2), где $r = 2$, а функция $K(x)$ имеет вид

$$K(x) = \frac{2\,\text{sh}^2 x}{x\,[(3-2\nu-\nu^2)\,\text{sh}\,x \cdot \text{ch}\,x + (1-\nu)^2 x]}. \tag{4}$$

Пример 2. Дано уравнение (3) в полосе $-1 < y < 1$. Граничные условия:

$$u(x, 1) = g_1(x), \quad x > 0; \quad u(x, -1) = g_2(x), \quad x > 0;$$
$$u_{yy}(x, \pm 1) + \nu u_{xx}(x, \pm 1) = 0, \ -\infty < x < \infty;$$
$$u_{yyy}(x, \pm 1) + (2-\nu) u_{xxy}(x, \pm 1) = 0, \quad x < 0;$$

Значение ν то же, что и в примере 1. Поставлена задача об изгибе пластины в форме полосы $-1 < y < 1$. Части $x > 0$ краев $y = -1$, $y = 1$ оперты, а части $x < 0$ краев $y = -1$, $y = 1$ свободны. Эта граничная задача приводится к задаче Римана для двух пар функций. Однако мы будем разыскивать решение $u(x, y)$ в виде суммы четной и нечетной функций относительно переменной y. Тогда граничная задача примера 2 сведется к задаче примера 1 и следующей задаче:

$$u_y(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad u_{yyy}(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$
$$u(x, 0) = g(x), \quad x > 0; \quad u_{yy}(x, 0) + \nu u_{xx}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$
$$u_{yyy}(x, 0) + (2-\nu) u_{xxy}(x, 0) = 0, \quad x < 0.$$

Последняя приводится к задаче Римана (1), (2), где $r = 4$, а

$$K(x) = \frac{2x \operatorname{ch}^2 x}{(3 - 2\nu - \nu^2) \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x - (1-\nu)^2 x}. \tag{5}$$

В этом примере функция $K(x)$ не удовлетворяет условиям, наложенным на нее выше, однако ее легко подчинить требуемым условиям, разделив задачу (1) на $x^2 + q^2$.

Строгая постановка граничных задач и обоснование приведения их к задаче Римана производится так же, как и в [2].

§ 2. Запишем задачу Римана, соответствующую примеру 1,

$$\frac{1}{x^2} K(x) F^+(x) = F^-(x) + G^+(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

здесь

$$F^+(x) \in L_2^+[0, 2], \quad F^-(x) \in L_2^-[0, -1], \tag{7}$$

а $G^+(x)$ принадлежит $L_2^+[0, -1]$ и функция $K(x)$ имеет вид (4). Индекс функции $\sqrt{x^2 + q^2}\, K(x)$ равен нулю, т. е.

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arg} K(x) \sqrt{x^2 + q^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Используя известные методы решения задачи Римана (см., например, [3, главы 2 и 4]), приходим к следующим результатам:

а) для разрешимости задачи (6), (7) необходимо и достаточно существование постоянной C такой, что

$$[\sqrt{x + iq}]^+ \left\{ \left[\frac{x^2 G^+(x)}{(x - iq)[\sqrt{x - iq}]^- X^-(x)} \right]^+ + \frac{C}{x - iq} \right\} \in L_2(-\infty, \infty). \tag{8}$$

Здесь квадратные корни $[\sqrt{z}]^+$ и $[\sqrt{z}]^-$ определены и аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, их значения имеют положительную мнимую часть;

$$X^{\mp}(x) = \exp\left\{ \pm \frac{\ln[\sqrt{x^2 + q^2}\, K(x)]}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln[\sqrt{t^2 + q^2}\, K(t)]}{t - x}\, dt \right\}. \tag{9}$$

В формуле (9) $\ln\left[\sqrt{x^2+q^2}\,K(x)\right]$ — непрерывная функция, исчезающая на бесконечности*, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Символ $[\ldots]^+$ означает оператор, ставящий в соответствие функции $\Omega(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ функцию

$$[\Omega(x)]^+ = \frac{\Omega(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega(t)\,dt}{t-x} \in L_2(-\infty, \infty). \tag{10}$$

б) если постоянная C существует, то существует указанный ниже предел и имеет место равенство

$$C = -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sqrt{N-iq}\right]^- \int\limits_N^\infty \left[\frac{x^2G^+(x)}{(x-iq)\left[\sqrt{x-iq}\right]^-\chi^-(x)}\right]^+ \frac{dx}{\left[\sqrt{x-iq}\right]^-}. \tag{11}$$

в) если решение $F^+(x)$ задачи (6), (7) существует, то оно определяется равенством

$$F^+(x) = -\left[\sqrt{x+iq}\right]^+\chi^+(x)\left\{(x-iq)^2\left[\frac{x^2G^+(x)}{(x-iq)\left[\sqrt{x-iq}\right]^-\chi^-(x)}\right]^+ + Cx + C_1\right\}. \tag{12}$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная.

§ 3. Метод построения приближенного решения задачи Римана (6), (7) основывается на сформулированной ниже теореме. Эта теорема является обобщением теоремы 2 работы [4].

Теорема. *Пусть выполнены следующие предположения:*

1. M и M^* — линейные операторы, определенные на линейном пространстве A. Значения их лежат в линейном пространстве B.

2. Уравнение

$$Mf = g \tag{13}$$

при данном элементе $g \in B$ имеет решение $f \in A$ (возможно неединственное).

3. Для любого элемента f_1, принадлежащего A,

$$\left(M - \tilde{M}\right) f_1 \in B_0, \tag{14}$$

где B_0 — нормированное пространство и $B_0 \subseteq B$.

4. Приближенное уравнение

$$\tilde{M}\tilde{f} = \tilde{g} \tag{15}$$

при данном элементе $\tilde{g} \in B$ таком, что

$$g - \tilde{g} \in B_0 \tag{16}$$

имеет решение $\tilde{f} \in A$; однородное уравнение

$$\tilde{M}\tilde{f}_0 = 0 \tag{17}$$

* Не ограничивая общности, можно принять, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+q^2}\,K(x)\right] = 1$. Для этого коэффициенты задач Римана примеров 1 и 2 нужно домножить на $\frac{3-2\nu-\nu^2}{2}$.

имеет в пространстве A n линейно независимых решений $\tilde f_{01}, \tilde f_{02}, \ldots, \tilde f_{0n}$, *и при этом*

$$\tilde f \in A_1, \tag{18}$$

$$\tilde f_{0i} \in A_1, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

а определитель

$$\left|(T_j, \tilde f_{0i})\right| \neq 0, \ j, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Здесь A_1 — линейное пространство такое, что $A_1 \subseteq A$, а $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — система линейных функционалов, определенных на A_1.

5. *При каждом элементе ψ из B_0 уравнение*

$$\tilde M \varphi = \psi \tag{21}$$

разрешимо и имеет единственное решение в линейном нормированном пространстве A_0 таком, что $A_0 \subset A_1$, а

$$|(T_j, \varphi)| = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

для всех $\varphi \in A_0$.

6. *Оператор $M - \tilde M$ ограничен в следующем смысле:*

$$\|(M - \tilde M)\varphi\|_{B_0} \leqslant \|M - \tilde M\| \, \|\varphi\|_{A_0}. \tag{23}$$

7. *Оператор $\tilde M^{-1}$ также ограничен:*

$$\|\tilde M^{-1}\psi\|_{A_0} \leqslant \|\tilde M\| \, \|\psi\|_{B_0}. \tag{24}$$

8. $\|M - \tilde M\| \, \|\tilde M^{-1}\| < 1.$ (25)

Тогда из предположений 1—8 следует, что

$$f \in A_1, \tag{26}$$

где f — любое зафиксированное решение уравнения (13). *Кроме того, если $\tilde f$ — такое решение уравнения* (15), *что*

$$\left(T_j, \tilde f\right) = (T_j, f), \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

то

$$f - \tilde f \in A_0, \tag{28}$$

$$M\tilde f - g \in B_0 \tag{29}$$

и

$$\|f - \tilde f\|_{A_0} \leqslant \frac{\|\tilde M^{-1}\| \, \|M\tilde f - g\|_{B_0}}{1 - \|\tilde M^{-1}\| \, \|M - \tilde M\|}. \tag{30}$$

Доказательство. Из уравнения $\tilde M(f - \tilde f) = \psi$, где $\psi = g - \tilde g + (\tilde M - M) f \in B_0$, имеем $f - \tilde f = \varphi + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \tilde f_{0i}$, где $\varphi \in A_0$, а c_i — произвольные постоянные. Используя (20), (22) и (27), получаем $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и т. д.

§ 4. Применим пункты 1—8 теоремы к нахождению приближенного решения задачи Римана (6), (7).

1. Положим $A = L_2^+[0,2]$. Каждый элемент пространства B является семейством функций, принадлежащих $L_2^+[0,3]$ и отличающихся друг от друга не более чем на многочлен второй степени, т. е. $H_1^+ = H_2^+$ в B, если $H_1^+(x) = H_2^+(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Операторы M и $\tilde{M}$ можно взять в виде

$$MF^+ = (x^2 + q^2)(x + iq)\left[K(x)\frac{F^+(x)}{x+iq}\right]^+ \text{ в } B,$$

$$\tilde{M}F^+ = (x^2 + q^2)(x + iq)\left[\tilde{K}(x)\frac{F^+(x)}{x+iq}\right]^+ \text{ в } B.$$

Пусть функция $\tilde{K}(x)$ подчинена требованию: произведение $\sqrt{x^2+q^2}\,\tilde{K}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на сомкнутой оси x и $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+q^2}\,\tilde{K}(x) = 1$. Ниже на функцию $\tilde{K}(x)$ мы наложим дополнительные условия.

2. Уравнение (13) в пространстве B имеет вид

$$(x^2 + q^2)(x + iq)\left[K(x)\frac{F^+(x)}{x+iq}\right]^+ = H^+(x) \text{ в } B,$$

или

$$(x^2 + q^2)(x + iq)\left[K(x)\frac{F^+(x)}{x+iq}\right]^+ = H^+(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \text{ в } B, \qquad (31)$$

где c_0, c_1, c_2 — постоянные, а $H^+(x) = x^2(x^2+q^2)G^+(x)$.

Уравнение (31) равносильно следующей задаче Римана*:

$$K(x)F^+(x) = \Phi^-(x) + x^2G^+(x) + \frac{C_3 x + C_4}{x+iq}, \qquad (32)$$

$$F^+(x) \in L_2^+[0,\ 2],\ \Phi^-(x) \in L_2^-[0,\ 1]. \qquad (33)$$

Здесь C_3, C_4 — произвольные постоянные. Но задача (32), (33) разрешима одновременно с задачей (6), (7), так как их коэффициенты совпадают и $\varkappa = 0$. В силу этого уравнение (31) разрешимо.

3. В качестве пространства B_0 примем пространство функций вида

$$\Psi^+(x) = \Psi_0^+(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2,\quad \Psi_0^+(x) \in L_2^+[0,\ 0]. \qquad (34)$$

При этом элементы пространства B_0, отличающиеся лишь многочленом второй степени, считаются равными. Норму в пространстве B_0 вводим следующим образом:

$$\|\Psi^+(x)\|_{B_0} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0^+(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, B_0 — нормированное подпространство пространства B. Для выполнения условия (14) функция $\tilde{K}(x)$ должна удовлетворять условию

$$\max_{-\infty<x<\infty}(x^2+q^2)^2\,|K(x) - \tilde{K}(x)| < \infty. \qquad (35)$$

* То есть уравнение (31) и задача (32), (33) одновременно разрешимы или неразрешимы, и их решением служит одна и та же функция $F^+(x)$.

Более того, функция $\tilde{K}(x)$ должна быть выбрана так, чтобы в разложении в ряд на бесконечности по отрицательным степеням x она имела одинаковые четыре первых члена с функцией $K(x)$.

4. Пусть A_1 — линейное пространство функций $F^+(x)$, принадлежащих $L_2^+[0, 2]$ и являющихся интегралами Фурье обобщенных функций $f_+(x)$, представимых при малых положительных x в виде

$$f_+(x) = \frac{D_1 + D_2 x}{x\sqrt{x}} + f_0(x), \tag{36}$$

где D_1, D_2 — постоянные, а $f_0(x) \in L_2(\sigma)$ на малом отрезке $\sigma = [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Функционалы T_1, T_2 определим равенствами $(T_1, F^+) = D_1$, $(T_2, F^+) = D_2$. Предположим, что функция $\sqrt{x^2+q^2}\,\tilde{K}(x)$ отлична от нуля всюду на сомкнутой оси x и ее индекс $\varkappa = 0$. Тогда уравнение (17) примет вид

$$(x^2+q^2)(x+iq)\left[\tilde{K}(x)\frac{\tilde{F}_0^+(x)}{x+iq}\right]^+ = 0 \text{ в } B \tag{37}$$

и имеет в пространствах A и A_1 два линейно независимых решения $\tilde{F}_{01}^+(x)$, $\tilde{F}_{02}^+(x)$*, преобразования Фурье которых при малых положительных x равны

$$\tilde{f}_{01+}(x) = \frac{\frac{1}{2}(-1+i) + q(1-i)x}{x\sqrt{x}} + \tilde{f}_1(x); \quad \tilde{f}_{02+}(x) = \frac{(1+i)x}{x\sqrt{x}} + \tilde{f}_2(x).$$

Здесь $\tilde{f}_1(x)$, $\tilde{f}_2(x)$ принадлежат классу $L_2(\sigma)$ на малом отрезке $\sigma = [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Положив $\left(T_1, \tilde{F}_{01}^+\right) = \frac{1}{2}(-1+i)$;

$$\left(T_2, \tilde{F}_{01}^+\right) = q(1-i); \quad \left(T_1, \tilde{F}_{02}^+\right) = 0; \quad \left(T_2, \tilde{F}_{02}^+\right) = 1+i,$$

легко убедиться, что условие (20) выполнено. Приближенное уравнение (15) в пространстве B имеет вид

$$(x^2+q^2)(x+iq)\left[\tilde{K}(x)\frac{F^+(x)}{x+iq}\right]^+ = \tilde{H}^+(x), \tag{38}$$

где $\tilde{H}^+(x) = x^2(x^2+q^2)\tilde{G}^+(x)$, причем функция $\tilde{G}^+(x)$ принадлежит $L_2^+[0, -1]$ и удовлетворяет условию

$$x^2(x^2+q^2)\left[G^+(x) - \tilde{G}^+(x)\right] \in L_2^+[0, 0] \tag{39}$$

(этого достаточно, чтобы выполнялось условие (16)). Уравнение (38) равносильно задаче Римана

$$\tilde{K}(x)\tilde{F}^+(x) = \Phi^-(x) + x^2\tilde{G}^+(x) + \frac{C_3 x + C_4}{x+iq}, \tag{40}$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные, а

$$\tilde{F}^+(x) \in L_2^+[0, 2], \quad \Phi^-(x) \in L_2^-[0, 1]. \tag{41}$$

---

* Уравнение (37) равносильно задаче Римана

$$\tilde{K}(x)\tilde{F}_0^+(x) = \Phi_0^-(x) + \frac{C_3 x + C_4}{x+iq}.$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (40), (41) имеет вид

$$[\sqrt{x+iq}]^{+}\left\{\left[\frac{x^2\widetilde{G}^{+}(x)}{(x-iq)[\sqrt{x-iq}]^{-}\chi^{-}(x)}\right]^{+}+\frac{\widetilde{C}}{x-iq}\right\}\in L_2(-\infty,\ \infty). \quad (42)$$

Если предположить, что в окрестности бесконечно удаленной точки функции $\sqrt{x^2+q^2}K(x)$ и $\sqrt{x^2+q^2}\widetilde{K}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем больше $\frac{1}{2}$, то можно показать, что условие (42) выполняется одновременно с условием (8). Предположим, что решение $\widetilde{F}^{+}(x)$ задачи (40), (41) *принадлежит* A_1.

5. В качестве пространства A_0 возьмем линейное пространство $L_2^{+}[0,0]$, в котором введена норма

$$\|\Phi^{+}\|_{A_0}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi^{+}(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда ясно, что для всех $\Phi^{+}(x)\in A_0$ $(T_1,\ \Phi^{+})=(T_2,\ \Phi^{+})=0$. Уравнение (21)

$$\widetilde{M}\Phi^{+}=(x^2+q^2)(x+iq)\left[\widetilde{K}(x)\frac{\Phi^{+}(x)}{x+iq}\right]^{+}=\Psi^{+}(x)\ \text{в}\ B_0 \quad (43)$$

равносильно задаче Римана

$$(x^2+q^2)\widetilde{K}(x)\Phi^{+}(x)=\Phi^{-}(x)+\Psi_0^{+}(x), \quad (44)$$

$$\Phi^{+}(x)\in L_2^{+}[0,\ 0];\quad \Phi^{-}(x)\in L_2^{-}[0,\ 1]. \quad (45)$$

Здесь $\Psi_0^{+}(x)$ — заданная функция, связанная с $\Psi^{+}(x)$ равенством (34). Задача (44), (45) имеет безусловное и единственное решение

$$\Phi^{+}(x)=-\frac{\widetilde{\chi}^{+}(x)}{[\sqrt{x+iq}]^{+}}\left[\frac{\Psi_0^{+}(x)}{\widetilde{\chi}^{-}(x)[\sqrt{x-iq}]^{-}}\right]^{+}, \quad (46)$$

где функции $\widetilde{\chi}^{+}(x)$ и $\widetilde{\chi}^{-}(x)$ определены формулами вида (9), причем

$$\sqrt{x^2+q^2}\widetilde{K}(x)=\frac{\widetilde{\chi}^{-}(x)}{\widetilde{\chi}^{+}(x)}. \quad (47)$$

Следовательно, уравнение (43) при любой правой части $\Psi^{+}(x)$, принадлежащей B_0, имеет в A_0 единственное решение $\Phi^{+}(x)=\widetilde{M}^{-1}\Psi^{+}(x)$, определяемое равенством (46).

6. В силу условия (35)

$$\|M-\widetilde{M}\|\leqslant\max_{-\infty<x<\infty}(x^2+q^2)|K(x)-\widetilde{K}(x)|. \quad (48)$$

7. Аналогично оценивается оператор $\widetilde{M}^{-1}$.

$$\|\widetilde{M}^{-1}\|\leqslant\max_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{\chi}^{+}(x)(x^2+q^2)^{-\frac{1}{4}}\right|\max\left|\frac{1}{\widetilde{\chi}^{-}(x)\sqrt[4]{x^2+q^2}}\right|. \quad (49)$$

8. Значения функции $\widetilde{K}(x)$ должны быть настолько близки к значениям $K(x)$, чтобы выполнялось условие (25). Переходим к утверждениям

теоремы. В силу (26) решение $F^+(x)$ уравнения (31), а значит, и задачи (32), (33) принадлежит A_1. Из этого следует, что решение $F^+(x)$ задачи (6,) (7) является интегралом Фурье функции, представимой в виде (36). Допустим, что соответствующие последнему постоянные D_1 и D_2 известны

Тогда для построения искомого приближенного решения $\tilde{F}^+(x)$ задачи (6), (7) достаточно найти решение задачи (40), (41) и выбрать постоянные C_3 и C_4 так, чтобы $\left(T_i, \tilde{F}^+\right) = (T_i, F^+) = D_i$, $i = 1, 2$. Построенное таким образом решение будет обладать свойством (28), т. е. $F^+(x) - \tilde{F}^+(x) \in L_2^+ [0, 0]$. Обозначив

$$\delta = \frac{\left\| \tilde{M}^{-1} \right\|}{1 - \left\| \tilde{M}^{-1} \right\| \left\| M - \tilde{M} \right\|},$$

из неравенства (35) получаем оценку погрешности

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| F^+(x) - \tilde{F}^+(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| (x^2 + q^2) \left\{ (x + iq) \left[K(x) \frac{\tilde{F}^+(x)}{x + iq} \right]^+ - x^2 G^+(x) \right\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

Здесь постоянные c_0, c_1, c_2 выбраны так, чтобы интеграл, стоящий в правой части неравенства, сходился. Функции $\tilde{K}(x)$, $\tilde{G}^+(x)$ и постоянная q выбираются так, чтобы правая часть неравенства (50) и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 (x^2 + q^2) \left[G^+(x) - \tilde{G}^+(x) \right] \right|^2 dx$ были малыми. Если функции $\tilde{K}(x)$ и $\tilde{G}^+(x)$ взять в виде

$$\tilde{K}(x) = \frac{P_1}{\sqrt{x^2 + c^2}\, P_2}; \quad \tilde{G}^+(x) = \left[\frac{P_3}{\sqrt{x^2 + c^2}\, P_4} + \frac{P_5}{P} \right]^+,$$

где c — постоянная, а P_i — многочлены, $i = 1, 2, \ldots, 6$, то решение задачи Римана (40), (41) можно построить без квадратур. В нашем случае

$$\tilde{K}(x) = \frac{2}{3 - 2\nu - \nu^2} \cdot \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + c^2}\,(x^2 + b^2)}.$$

Здесь величины c^2 и b^2 определяются из условия совпадения третьих и пятых коэффициентов разложений по отрицательным степеням x в ряд на бесконечности функций $K(x)$ и $\tilde{K}(x)$ (вторые и четвертые коэффициенты равны нулю). В силу этого условие (35) выполнено. Постоянная a^2 определяется из условия достижения

$$\inf \sup_x (x^2 + q^2) \left| K(x) - \tilde{K}(x) \right|$$

на отрезке $[0; A]$, где A — достаточно большое число.

Для $q = 10$ и для $0 \leqslant \nu < 0{,}5$ с шагом $h = 0{,}05$ по ν были найдены оптимальные значения величин c^2, a^2 и b^2 и значения δ, им соответствующие. Результаты вычислений приведены в таблице. Все вычисления были произведены на ЭЦВМ «Урал—2».

ν	c^2	a^2	b^2	δ
0	15,525653	11,644240	3,8814132	0,0797
0,05	15,051257	11,288443	3,7628143	0,0767
0,1	14,596757	10,947567	3,6491891	0,0736
0,15	14,161315	10,620987	3,5403290	0,0704
0,2	13,749907	10,307930	3,4359765	0,0672
0,25	13,343572	10,007670	3,3358929	0,0638
0,3	12,959252	9,7194395	3,2398132	0,0603
0,35	12,590257	9,4426927	3,1475642	0,0568
0,4	12,235850	9,1768876	3,0589625	0,0531
0,45	11,895295	8,9214721	2,9738840	0,0493
0,49	11,632294	8,7242205	2,9080735	0,0462

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю проф. Ю. И. Черскому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Черский. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана. Труды Тбилисск. матем. ин-та, т. 28, Тбилиси, 1962, 209—246.

2. Ю. И. Черский. К решению смешанных задач для уравнений в частных производных. Дифференциальные уравнения, т. 1, № 5, 1965, 647—662.

3. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.

4. Ю. И. Черский. Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения. ДАН СССР, т. 150, № 2, 1963, 271—274.

Поступила 12 июля 1968 г.