Выпуск 10 1970

ОПЕРАТОРЫ КЛАССА C_0 И C_0^*

В. Д. Мильман

В настоящей работе изучаются связи между вполне непрерывными операторами и строго сингулярными по Т. Като [1], которые мы называем C_0-операторами [2, § 2. 2].

Класс C_0-операторов интересен тем, что, как показано в § 3 настоящей статьи, в ряде пространств ($C[0, 1]$, L_1, L_p при $p \geqslant 2$) он совпадает с классом операторов, возмущение которыми сохраняет индекс произвольного Ф-оператора. Все основные результаты формулируются в операторных терминах. Вместе с тем методы доказательств и вспомогательные построения носят функционально-геометрический характер. Основные результаты работы анонсированы в [18].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА C_0-ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть $\mathfrak{L}(B_1, B_2)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов $A(B_1 \to B_2)$, $T(B_1, B_2)$ — подпространство $\mathfrak{L}(B_1, B_2)$, состоящее из вполне непрерывных операторов; B_i — пространства Банаха. Когда $B_1 = B_2 = B$, мы будем писать $\mathfrak{L}(B)$ и $T(B)$. Это касается и вводимых ниже классов операторов. Через E_α обозначаются замкнутые подпространства B; $S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$; $B_1 \simeq B_2$ означает изоморфизм пространств B_1 и B_2, а $E(M)$ — линейную замкнутую оболочку множества $M \subset B$.

Последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{y_k\}_1^\infty$ называются **эквивалентными** (обозначение: $\{x_k\}_1^\infty \simeq \{y_k\}_1^\infty$), если ограничены операторы $T(E(\{x_k\}_1^\infty) \to E(\{y_k\}_1^\infty))$ и T^{-1}, где $\{Tx_k = y_k\}_{k=1}^\infty$.

Определение 1. *$A(B_1 \to B_2)$ называется** C_0-оператором, *если $\forall E \subset B_1 (\dim E = \infty)$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \subset E (\dim E_\varepsilon = \infty)$ такое, что $\|Ax\| < \varepsilon$ при $x \in S(E_\varepsilon)$; другими словами, $A(B_1 \to B_2) \in C_0(B_1, B_2)$ означает, что 0 есть единственная точка спектра* (см. [2, § 2.2]) *функции $\|Ax\| (x \in S(B_1)) : C(\|Ax\|) = \{0\}$.*

Определение 2. *$A(B_1 \to B_2)$ называется* C_0^*-оператором**, *если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n$ найдется N такое, что $\forall E_N \subset B (\dim E_N = N) \exists E_{n,\varepsilon} \subset E_N \times (\dim E_{n,\varepsilon} = n)$, $\|Ax\| < \varepsilon$ при $x \in S(E_{n,\varepsilon})$; другими словами, $A(B_1 \to B_2) \in C_0^*(B_1, B_2)$ означает, что (см. [2, § 1]) $C^*(\|Ax\|) = \{0\}$.*

Следующее предложение служит критерием принадлежности оператора классу C_0 либо C_0^*.

Предложение 1. а) *$A \in C_0(B_1, B_2)$ эквивалентно тому, что $\forall E \subset B_1$ $(\dim E = \infty) : \inf\{\|Ax\| : x \in S(E)\} = 0$;*

б) *$A \in C_0^*(B_1, B_2)$ эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall E_N \subset B_1 (\dim E_N = N) : \inf\{\|Ax\| : x \in S(E_N)\} < \varepsilon$.*

П. а) предложения имеются у Т. Като [1, § 4; 3, § 4]; доказательство п. б) опускаем (оно есть тривиальное следствие леммы 1.5 из [2]).

* Определяемый класс операторов $C_0(B_1, B_2)$ — это строго сингулярные операторы, введенные Т. Като [1].

** В других терминах этот же класс операторов определен в [20].

Т. Като [1] показал, что $\mathbf{C}_0(B)$ есть двусторонний замкнутый идеал в $\Omega(B)$. В [2, § 1.4] то же показано для $\mathbf{C}_0^*(B)$. Очевидно, что $T(B_1, B_2)\subset\mathbf{C}_0^*(B_1, B_2)\subset\mathbf{C}_0(B_1, B_2)$.

Поскольку в $l_p(1\leqslant p\leqslant\infty;\ l_\infty\equiv c_0)\,\Omega(l_p)$ имеет единственный собственный двусторонний замкнутый идеал ([3, § 5], для l_2 — [7]), то $\mathbf{C}_0(l_p)\equiv\equiv\mathbf{C}_0^*(l_p)\equiv T(l_p)$. Вместе с тем нетрудно показать [3], что $\mathbf{C}_0(B)\neq T(B)$, если B есть $C[0, 1]$ либо $L_p[0, 1]$ $(1\leqslant p<\infty,\ p\neq 2)$. Приводимые ниже примеры показывают, что все три подпространства, вообще говоря, различны.

Примеры. а) *при* $p>2\ T(l_2,l_p)\neq\mathbf{C}_0^*(l_2,l_p)\neq\mathbf{C}_0(l_2,l_p)$; б) *при* $p>2\ T(L_p[0, 1]\neq\mathbf{C}_0^*(L_p)\neq\mathbf{C}_0(L_p)$.

Доказательство примера а). Так как пространства l_2 и l_p $(p>2)$ не имеют изоморфных бесконечномерных подпространств [4, стр. 165], то в силу предложения 1, а) любой ограниченный линейный оператор из l_2 в l_p есть $\mathbf{C}_0$-оператор: $\Omega(l_2, l_p)=\mathbf{C}_0(l_2, l_p)$ $(p>2)$.

Вместе с тем оператор вложения $i(l_2\to l_p):\{ie_k=e'_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — естественный базис в l_2, а $\{e'_k\}_1^\infty$ — естественный базис в l_p, не является вполне непрерывным.

Таким образом, $T(l_2, l_p)\neq\mathbf{C}_0(l_2, l_p)$ $(p>2)$. Более тонким является тот факт, что при $p_2>p_1\geqslant 1$ $T(l_{p_1}, l_{p_2})\neq\mathbf{C}_0^*(l_{p_1}, l_{p_2})$.

Поскольку, как отмечено выше, оператор естественного вложения $i(l_{p_1}\to l_{p_2})\notin T(l_{p_1}, l_{p_2})$, то достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *При* $p_2>p_1\geqslant 1$ *оператор* $i(l_{p_1}\to l_{p_2})\in\mathbf{C}_0^*$.

Доказательство опирается на следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть E — некоторое пространство функций на T, причем $\forall x\in E$, существует* $\max\{|x(t)|:t\in T\}$. *Тогда любое подпространство $E_N\subset E$* $(\dim E_N=N)$ *содержит функцию $x(t)$ такую, что* $\max\{|x(t)|: :t\in T\}$ *достигается не менее, чем в N точках* $\{t_i\}_{i=1}^N$.

Доказательство. Пусть при $N=N_0$ утверждение доказано. Рассмотрим произвольное подпространство $E_{N_0+1}\subset E(\dim E_{N_0+1}=N_0+1)$. По предположению существует функция $x_0(t)\in E_{N_0+1}$ и $\max|x_0(t)|$ достигается в N_0 точках $\{t_i\}_{i=1}^{N_0}$. Подпространство $E_0^{N_0}=\{x(t)\in E:x(t_i)=0$ при $i=1, \ldots, N_0\}$ имеет дефект N_0 и, значит, пересекается с E_{N_0+1}. Пусть $0\neq y(t)\in E_0^{N_0}\cap E_{N_0+1}$ и $\max|y(t)|=|y(\tau)|$. Так как $\{y(t_i)=0\}_{i=1}^{N_0}$, то $\tau\neq t_i(i=1, \ldots, N_0)$. Но тогда в семействе функций $\{\alpha x(t)+(1-\alpha)y(t)\}_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}$ найдется $z_{\alpha_0}(t)=\alpha_0x(t)+(1-\alpha_0)y(t)$, принимающая максимум модуля в N_0+1 точке $\{t_i\}_{i=1}^{N_0+1}$ (t_{N_0+1}, вообще говоря, не совпадает с τ).

Доказательство леммы 1. Согласно предложению 1 следует показать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ такое, что $\forall E_N\subset l_{p_1}(\dim E_N=N)$:

$$\inf\left\{\frac{\left\|\sum\limits_1^\infty\alpha_ke_k\right\|_{p_2}}{\left\|\sum\limits_1^\infty\alpha_ke_k\right\|_{p_1}}=\frac{(\Sigma|\alpha_k|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}}}{(\Sigma|\alpha_k|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}}:\ \sum\alpha_ke_k=x\in E_N\right\}<\varepsilon. \tag{1}$$

Воспользовавшись леммой 2, возьмем $x_0=\sum\alpha_k^0e_k\in E_N$ такое, что $\max\limits_{k\geqslant 1}|\alpha_k^0|=\delta$ достигается на N числах: $\delta=|\alpha_{i_1}^0|=|\alpha_{i_2}^0|=\ldots=|\alpha_{i_N}^0|$. Ниже (1) проверяется именно на этом x_0.

Обозначим для какого-либо $i_0\neq i_k(k=1, \ldots, N)\,|\alpha_{i_0}^0|=t_0$, $\left\|\sum\limits_{k\neq i_0}\alpha_ke_k\right\|_{p_2}^{p_2}=$

$= a$, $\left\| \sum_{k \neq i_0} \alpha_k e_k \right\|_{p_1}^{p_1} = b$. Надо показать, что при достаточно большом $N(\varepsilon)$ функция

$$\varphi(t) = \frac{(a + t^{p_2})^{\frac{1}{p_2}}}{(b + t^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}}$$

при $t = t_0$ меньше ε. Однородность функции $\varphi(t)$ позволяет считать $b = 1$. В силу выбора x_0

$$t_0 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{N^{\frac{1}{p_1}}} \tag{2}$$

и

$$a \geqslant N \cdot \delta^{p_2} \geqslant N \cdot t_0^{p_2}. \tag{3}$$

Разберем теперь две возможности:

1. Пусть $a \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, учитывая (2), получаем

$$\varphi(t_0) \leqslant \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} + t_0^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}}{(1 + t_0^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + N^{-\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Так как $p_2 > p_1$, то существует $N_1(\varepsilon)$ такое, что при $N > N_1(\varepsilon)$ $\varphi(t_0) < \varepsilon$.

2. Пусть $a > \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $a \leqslant b = 1$, то из (3) следует, что существует $N(\varepsilon)\,(\geqslant N_1(\varepsilon))$ такое, что при $N \geqslant N(\varepsilon)$

$$t_0^{p_2 - p_1} < \frac{\varepsilon}{2} < a. \tag{4}$$

Вычисление производной функции $\varphi(t)$ показывает, что $\varphi(t)$ монотонно убывает при $0 < t^{p_2 - p_1} < \frac{a}{b} = a$. В силу (4) t_0 попадает в указанный интервал. Значит $\varphi(0) \geqslant \varphi(t_0)$ и достаточно показать, что $\varphi(0) < \varepsilon$. Итак, мы перешли к вектору, у которого равна нулю координата с номером i_0. Рассуждая аналогичным образом, придем к вектору с N не нулевыми и равными координатами $\bar{x}_0 = \sum_{k=1}^{N} \delta e_{i_k}$, для которого

$$\frac{\|\bar{x}_0\|_{p_2}}{\|\bar{x}_0\|_{p_1}} = \frac{1}{N^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}},$$

что при достаточно большом N меньше ε. Этим закончено доказательство леммы 1.

Возвращаемся к разбору примера а). Нам остается показать, что $C_0^*(l_2, l_p) \neq C_0(l_2, l_p)$. Воспользуемся для этого следующим фактом [6, стр. 224]: в $l_p\,(p > 1)$ существует безусловный базис $\left\{(x_{k,n})_{k=1}^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x \in l_p$ эквивалентно $x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} x_{k,n}$, где

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} x_{k,n} \right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть $\{(e_{k,n})_{k=1}^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в l_2. Оператор вложения $i_1(l_2 \to l_p): \{i_1 e_{k,n} = x_{k,n}\}_{\substack{k=1,\ldots,n,\\ n=1,\ldots}}$ при $p > 2$ ограничен, и значит, как отмечено выше, $i_1 \in \mathrm{C}_0$.

Вместе с тем $i_1 \notin \mathrm{C}_0^*$, так как при $\forall n$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} x_{k,n} \right\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} x_{k,n} \right\|_2 = (\sum |\alpha_{k,n}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство примера б). Хорошо известно (например, [6, стр. 215]), что в $L_p[0, 1]$ $(p > 1)$ существует дополняемое подпространство $E_{(2)}$, изоморфное l_2 (линейная замкнутая оболочка системы Радемахера является, например, таким подпространством); очевидно также, что в $L_p[0, 1]$ существует подпространство $E_{(p)} \simeq l_p$. Пусть P — проектор из $L_p[0, 1]$ на $E_{(2)}$, а операторы $i(l_2 \to l_p)$ и $i_1(l_2 \to l_p)$ указаны при разборе примера а). Тогда при $p > 2$ $iP(L_p) \in \mathrm{C}_0^*$ и $iP \notin T(L_p)$, $i_1 P \in \mathrm{C}_0(L_p)$ и $i_1 P \notin \mathrm{C}_0^*(L_p)$.

2. ПРИЗНАК ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОПЕРАТОРА КЛАССУ C_0

Теорема 1. *Пусть* $A(B_1 \to B_2)$ *и*

а) *не существует* $E \subset B_2$, $E \simeq E_0 \subset B_1$, где E_0 — *дополняемо в* B_1 $(\dim E = \infty)$;

б) $\forall E \subset B_2 (\dim E = \infty) \exists E_1 \subset E (\dim E_1 = \infty)$ *и* E_1 — *дополняемо в* B_2. *Тогда* $A \in \mathrm{C}_0(B_1, B_2)$, т. е. $\Omega(B_1, B_2) = \mathrm{C}_0(B_1, B_2)$.

Доказательство. Пусть $A(B_1 \to B_2) \notin \gamma_0(B_1, B_2)$. Тогда $\exists E_1 \subset B_1$ $(\dim E_1 = \infty)$ и $\|Ax\| \geqslant c > 0$ при $x \in S(E_1)$. В силу условия б) существует $E_2 \subset AE_1 \subset B_2$ $(\dim E_2 = \infty)$ и E_2 — дополняемо в B_2, т. е. существует проектор $P(B_2 \to E_2)$. Оператор A на E_1 есть изоморфизм E_1 и AE_1, в частности, изоморфизм E_2 и $A^{-1}E_2 \subset E_1$; но оператор $PA(B_1 \to E_2)$, следовательно, пространство $A^{-1}E_2 \subset B_1$ дополняемо в B_1, что противоречит условию а).

Замечание 1. Тривиально доказывается, что условие б) выполняется для пространств $l_p (1 \leqslant p \leqslant \infty;\ l_\infty \equiv c_0)$ (см. например, [6, стр. 214]). Из результатов работы [8] следует, что условие б) выполнено для L_p при $p \geqslant 2$. Для $L_p (1 \leqslant p < 2)$ условие б) не выполнено, как следует из результата Кадеца [9] о вложении l_q в $L_p (1 \leqslant p < q < 2)$; при этом дополняемое вложение невозможно.

3. ОПЕРАТОРЫ, СОПРЯЖЕННЫЕ К C_0-ОПЕРАТОРАМ

В связи с использованием операторов, сопряженных к C_0-операторам, нам понадобится понятие частичной дополняемости.

Говорят, что $E \subset B (\operatorname{codim} E = \infty)$ частично дополняемо, если существует $E_1 \subset B (\dim E_1 = \infty)$, $E \cap E_1 = 0$ и $E + E_1 = \overline{E + E_1}$. В отличие от дополняемости не требуется, чтобы $E + E_1 = B$.

Лемма 3. *Пусть* $E_i \subset B$ *и* E_2 — *частичное дополнение к* E_1; $E_1^{\perp} = \{f \in B^* : f(E_1) = 0\}$. *Тогда* $\exists c > 0$ *такое, что при* $\forall x \in E_2$

$$\|x\| \geqslant \sup_{\varphi \in S(E_1^{\perp})} |\varphi(x)| \geqslant c\|x\|. \tag{5}$$

Доказательство. Частичная дополняемость означает (по теореме Банаха об обратном операторе), что между E_1 и E_2 положительный наклон, т. е. $\exists c > 0$ такое, что расстояния $\rho(S(E_1), E_2) \geqslant c$ и $\rho(S(E_2),$

$E_1) \geqslant c$. Но тогда по теореме Хана — Банаха для любого $x \in E_2$ $\exists f \in E_1^{\perp}$, $\|f\| \leqslant \frac{1}{c}$ и $f(x) = \|x\|$. Это доказывает правое неравенство в (5). Левое неравенство тривиально.

Хорошо известен пример подпространства $E \subset l_1$, не имеющего частичного дополнения. Линденштраусс [10] показал, что любое сепарабельное $E \subset B$, где B — рефлексивно и несепарабельно, имеет частичное дополнение. Вместе с тем в сепарабельных рефлексивных пространствах (и даже равномерно выпуклых) это не так.

Предложение 2. а) *в* $L_p (1 < p \leqslant 2)$ *любое* $E \subset L_p (\operatorname{codim} E = \infty)$ *частично дополняемо; более того,* $\exists E_1 \subset L_p : E \subset E_1$, E_1 *— дополняемо в* $L_p (\operatorname{codim} E_1 = \infty)$.

б) *в любом* $L_p [0, 1]$ $(p > 2)$ *существует подпространство* E, *не имеющее частичного дополнения.*

Доказательство. Пусть $E \subset L_p (1 < p < 2)$. Обозначим $E^{\perp} \subset L_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ все аннулирующие E функционалы. Поскольку $q > 2$, то [8] существует $E_1 \subset E^{\perp} (\dim E_1 = \infty)$ и E_1 дополняемо в L_q. Но тогда $E_1^{\perp} \subset L_p$ дополняемо в L_p и $E_1^{\perp} \supset E$.

Построим теперь пример, о котором идет речь в п. б). В силу теоремы Кадеца [9] для $\forall q$, $1 < q < 2$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, существует $E_{r_1} \subset L_q$ такое, что $E_{r_1} \simeq l_{r_1} (q < r_1 < 2)$. Покажем, что $E_{r_1}^{\perp} \subset L_p$ не имеет частичного дополнения. Действительно,

$$L_p / E_{r_1}^{\perp} \simeq l_{r_1}^* = l_{r_2} (r_1^{-1} + r_2^{-1} = 1), \ 2 < r_2 < p.$$

Если в L_p существует частичное дополнение E к $E_{r_1}^{\perp}$, то $E \simeq E_1 \subset L_p / E_{r_1}^{\perp}$. В силу минимальной размерности l_{r_2} E содержит подпространство, изоморфное l_{r_2}, что невозможно (по теореме Палея [12] L_p при $p > 2$ не содержит l_r при $r \neq p$ и $r \neq 2$).

Мы остановились на предложении 2 в связи со следующей теоремой.

Теорема 2. *Если любое подпространство* $E \subset B_1$, $\operatorname{codim} E = \infty$, *частично дополняемо, то из* $A \in C_0 (B_1, B_2)$ *следует* $A^* \in C_0 (B_2^*, B_1^*)$.

Замечание 2. В [3] приведен пример, показывающий, что из $A \in C_0 (B)$, вообще говоря, не следует $A^* \in C_0 (B^*)$.

Доказательство теоремы. Предположим, что существует $A \in C_0 (B_1, B_2)$ и $A^* \notin C_0 (B_2^*, B_1^*)$. Это означает, что существует $E \subset B_2^* (\operatorname{codim} E = \infty)$ такое, что $\|A^* f\| \geqslant c > 0$ при $f \in S(E)$. По условию пространство $E_1 = (A^* E)^{\perp} = \{x \in B_1 : x (A^* E) = 0\} \subset B_1$ имеет частичное дополнение $E_2 \subset B_1$ $(\dim E_2 = \infty)$. В силу леммы 3 существует $c' > 0$, при котором для $x \in E_2$

$$\|x\| \geqslant \sup_{\varphi \in S(A^* E)} |\varphi (x)| \geqslant c' \|x\|.$$

Поскольку A^* устанавливает изоморфизм E и $A^* E$, то существуют $c_2 > c_1 > 0$ такие, что при $x \in E_2$

$$c_2 \|x\| \geqslant \sup_{f \in S(E)} |(A^* f)(x)| = \sup_{f \in S(E)} |(Ax)(f)| \geqslant c_1 \|x\|.$$

Однако $\|Ax\| \geqslant \sup \{f(Ax) : f \in S(E)\}$. Таким образом, при $x \in E_2$ $\|Ax\| \geqslant c_1 \|x\|$, а это противоречит принадлежности A классу C_0. Доказательство закончено.

Принимая во внимание предложение 2, получаем

Следствие 1. *При* $1 < p < 2$ *из* $A \in \gamma_0 (L_p)$ *следует* $A^* \in C_0 (L_q)$, *где* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Ответ на то, верно ли аналогичное предложение при $p > 2$ находим, например, из приведенной в конце работы гипотезы.

§ 2. C_0-ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $l_p\,(1 \leqslant p \leqslant \infty;\ l_\infty \equiv c_0)$, $L_p\,(1 \leqslant p < \infty)$, $C(S)$

1. **Пространства** $l_p\,(1 \leqslant p \leqslant \infty;\ l_\infty \equiv c_0)$. Естественный базис в l_p будем обозначать $\{e_k\}_{l_p}$.

Теорема 3. *Пусть B не содержит дополняемых подпространств, изоморфных l_{p_0} (p_0 — фиксировано; $1 \leqslant p_0 \leqslant \infty$), т. е. нет ограниченного проектора из B на $E \subset B$, если только $E \simeq l_{p_0}$. Тогда $\Omega(B, l_{p_0}) = C_0(B, l_{p_0})$ и для любых $A_1 \in \Omega(l_{p_0}, B)$ и $A_2 \in \Omega(B, l_{p_0}) : A_2A_1 \in T(l_{p_0})$.*

Доказательство. В замечании 1 указано, что теорема 1 применима в условиях теоремы 3. Таким образом $\Omega(B, l_{p_0}) = C_0(B, l_{p_0})$. Но тогда $A_2A_1 \in C_0(l_{p_0})$. В § 1 п. 1 отмечено, что $C_0(l_{p_0}) = T(l_{p_0})$. Значит, $A_2A_1 \in T(l_{p_0})$.

Следствие 2. *В теореме 3 при $p_0 < \infty$ в качестве B можно взять $C[0, 1]$, что следует из теоремы Гротендика* [11] *о недополняемости $l_p\,(1 \leqslant p < \infty)$ в C.*

Следствие 3. *Теорема 3 имеет место для пары $B = L_p\,(1 \leqslant p < \infty)$ и l_q ($q \neq p$ и, если только $p \neq 1$, $q \neq 2$).*

Действительно, при $p > 2$ в L_p не существует подпространства, изоморфного l_q при $q \neq p$ и $q \neq 2$ [12]. Если же $1 \leqslant p < 2$, то по теореме Кадеца [9] существует $E_q \subset L_p$ и $E_q \simeq l_q\,(p < q < 2)$, но указанное подпространство E_q недополняемо. Наконец, в L_1 недополняемо и любое подпространство $E \simeq l_2$, так как квадрат любого слабо вполне непрерывного оператора в L_1 вполне непрерывен [14, стр. 547].

Теорема 4. $C_0(B, l_1) \equiv T(B, l_1)$. *Более того, если $A(B \to l_1) \notin T(B, l_1)$, то $\exists \{x_k\}_1^\infty \subset S(B)$, $\{x_k\}_1^\infty \approx \{e_k\}_{l_1}$; в частности, $E_0 = E(\{x_k\}_1^\infty) \simeq l_1\,(E_0 \subset B)$. При этом оператор A устанавливает эквивалентность $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{e_k\}_{l_1}$, в частности $A(E_0 \to l_1)$ мономорфизм.*

Доказательство. Если $A(B \to l_1) \notin T(B, l_1)$, то $AS(B)$ некомпактное множество. Но тогда $\exists \{y_k\}_1^\infty \subset S(B)$ и $\{z_k = Ay_k\}_1^\infty$ не имеет предельных точек. Доказательство заканчивается применением следующих двух лемм.

Лемма 4. Если $Z = \{z_k\}_1^\infty \subset D(l_1)$ не имеет предельных точек, то существует подпоследовательность

$$Z^0 = \{z_k^0\} \approx \{e_k\}_{l_1}.$$

Доказательство. Пусть $\left\{z_n = \sum\limits_1^\infty \alpha_k^n e_k\right\}_{n=1}^\infty \left(\sum\limits_{k=1}^\infty |\alpha_k^{(n)}| \leqslant 1\right)$. Выберем подпоследовательность Z' так, чтобы для $z_n' = \sum\limits_{k=1}^\infty \beta_k^{(n)} e_k$, $\beta_k^{(n)} \to \beta_k^0$ при $n \to \infty$. Тогда $\sum |\beta_k^0| \leqslant 1$, и потому существует $z_0 = \sum \beta_k^0 e_k$. Для любого функционала $f \in c_0$, $f(z_n' - z_0) \to 0$ $(n \to \infty)$. Поэтому (например, лемма 2. 2 из [2]) из $\{z_n' - z_0\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_n'' - z_0\} \approx \{e_n\}_{l_1}$. Вместе с тем из подпоследовательности $\{e_n + z_0\}_1^\infty$ по теореме Кадеца — Пелчинского [5] можно выделить базисную, поскольку $\{e_n + z_0\}$ не имеет слабо предельных точек. Но очевидно, что базисная последовательность $\{e_n + z_0\}_1^\infty$ эквивалентна $\{e_n\}_{l_1}$.

Лемма 5. *Если $A(B \to l_1)$ и $\exists \{x_k\}_1^\infty \subset S(B): Ax_k = e_k$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — естественный базис l_1, то $\{x_k\}_1^\infty \simeq \{e_k\}_1^\infty$ и A — устанавливает эквивалентность последовательностей.*

Доказательство. Пусть $x = \sum_1^n \alpha_k x_k \in B$, тогда

$$\sum_1^n |\alpha_k| = \left\| \sum_1^n \alpha_k A x_k \right\| = \|Ax\| \leqslant c\|x\| \leqslant c\sum_1^n |\alpha_k|.$$

Следствие 5. *Если B не имеет дополняемых подпространств, изоморфных l_1, то $\Omega(B, l_1) = T(B, l_1)$.*

Действительно, теорема 3 дает $\Omega(B, l_1) = C_0(B, l_1)$, а из теоремы 4 получаем $C_0(B, l_1) = T(B, l_1)$. Значит, $\Omega(B, l_1) = T(B, l_1)$.

Для того, чтобы полнее осветить связи между разными классами операторов, приведем следующее хорошо известное предложение, по существу идущее от доказательства Банаха [4, стр. 165], минимальности линейной размерности l_p.

Теорема 5. *При $p_1 > p_2 \geqslant 1$, $\Omega(l_{p_1}, l_{p_2}) = T(l_{p_1}, l_{p_2})$.*

Доказательство. При $p_2 = 1$ теорема уже доказана (см. следствие 5). Пусть $p_2 > 1$. Предполагая, что $A(l_{p_1} \to l_{p_2}) \notin T(l_{p_1}, l_{p_2})$, получаем некомпактность $AS(l_{p_1}) \subset l_{p_2}$. Но тогда $\exists \{x_k\}_1^\infty \subset S(l_{p_1})$ такая, что $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $\|Ax_k\| \geqslant c > 0$. По лемме 2.2 из [2] из $X = \{x_k\}$ и $Y = AX$ можно выделить подпоследовательность $X' = \{x_k'\} \simeq \{e_k\}_{l_{p_1}}$ и $AX' = \{y_k' = Ax_k'\} \simeq \{e_k\}_{l_{p_2}}$. В частности, для $\forall \{\alpha_k\}_1^\infty : \sum |\alpha_k|^{p_1} = 1$ должно выполняться $\|A(\sum \alpha_k x_k')\|_{p_2} = \|\sum \alpha_k A x_k'\|_{p_2} = (\sum |\alpha_k|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} < \infty$. Однако существуют последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ такие, что $\Sigma|\alpha_k|^{p_1} = 1$, а $\Sigma|\alpha_k|^{p_2} = \infty$ $(p_2 < p_1)$. Полученное противоречие показывает, что A — компактный оператор.

2. **Пространства $L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $C(S)$.** Обозначим $W(B_1, B_2)$ подпространство $\Omega(B_1, B_2)$, состоящее из слабо вполне непрерывных операторов ($A \in W(B_1, B_2)$ означает, что $AS(B_1)$ — относительно слабо компактно), $C(S)$ — пространство непрерывных функций, заданных на метрическом компактном пространстве S.

Теорема 6*. *Для произвольного пространства Банаха B*

$$C_0(C(S), B) = W(C(S), B); \quad C_0(B, L_1) \subset W(B, L_1);$$

$$C_0(L_1) = W(L_1).$$

Доказательство. Рассмотрим вначале пространство $C(S)$. Пелчинский [6, теорема 5] доказал, что каждый линейный оператор $A(C(S) \to B)$ (B — не содержит подпространств, изоморфных c_0) слабо компактен. Доказательство Пелчинского является уточнением доказательства близкого результата, приведенного в [14, стр. 532]. Нам понадобится следующая лемма, которая легко проглядывается из доказательства Пелчинского.

Лемма 6. *Пусть $(A(C(S) \to B)$ не является слабо компактным. Тогда существует последовательность $\{x_n(s)\}_1^\infty \subset C(S)$ такая, что $\sup_S \sum_{n=1}^\infty |x_n(s)| < \infty$, но ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ не является сходящимся в C и $\sum_{n=1}^\infty Ax_n$*

* Теорема имеется у Пелчинского [13]. Нам удобно привести доказательство этой теоремы.

слабо безусловно сходится (т. е. $\forall\varphi\in B^*$: $\sum\limits_1^\infty|\varphi(Ax_n)|<\infty$), *но* $\sum\limits_1^\infty Ax_n$ *не сходится в* B.

Итак, пусть $A(C(S)\to B)\notin W(C(S), B)$. Тогда, отправляясь от указанной в лемме 6 последовательности $\{x_n\}\subset C(S)$, построим индуктивно последовательность $\left\{z_j=\sum\limits_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}x_k\right\}_{j=1}^\infty$, $\|z_j\|\geqslant c>0$, причем так, что $\|Az_j\|\geqslant$ $\geqslant C_1>0$. Это можно сделать, так как ряды Σx_k и ΣAx_k не сходятся. Легко видеть, что $z_j\to 0$ и $Az_j\to 0$. Значит, из $\{z_j\}$ и $\{Az_j\}$ можно выделить базисные подпоследовательности $\{y_j\}_{j=1}^\infty\subset C(S)$ и $\{Ay_j\}_{j=1}^\infty\subset B$ [15].

Таким образом, $\exists m>0$ такое, что

$$\left\|\sum_1^\infty\alpha_k y_k\right\|\geqslant m\cdot\max_k|\alpha_k|;\quad \left\|\sum_1^\infty\beta_k y_k\right\|\geqslant m\cdot\max_k|\beta_k|. \tag{6}$$

Указанные в лемме 6 свойства последовательностей $\{x_n\}$ и $\{Ax_n\}$ и теорема Банаха — Штейнгауза (слабая ограниченность влечет сильную ограниченность) показывают, что $\exists M$

$$\sup_{n;\,|\alpha_k|\leqslant 1}\left\|\sum_1^n\alpha_k y_k\right\|<M;\quad \sup_{n;\,|\alpha_k|\leqslant 1}\left\|\sum_1^n\alpha_k Ay_k\right\|<M. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что $\{y_k\}_{k=1}^\infty\simeq\{e_k\}_{c_0}\simeq\{Ay_k\}_{k=1}^\infty$. Этим доказано

Предложение 3. *Если* $A(C(S)\to B)\notin W(C, B)$, *то*

а) $\exists E\subset C(S)$, $E\simeq c_0$ и A *устанавливает изоморфизм* E *и* $AE\subset B$.

Поскольку по теореме Собчика [16] c_0 дополняемо в любом сепарабельном B-пространстве, то

б) E *дополняемо в* $C(S)$.

Из первой части предложения 3 следует, что $C_0(C, B)\subset W(C, B)$. Обратное включение вытекает из теоремы Гротендика [14, стр. 532] о том, что слабо вполне непрерывный оператор $A(C(S)\to B)$ переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся и, значит, ни на каком подпространстве $E\subset C(\dim E=\infty)$ не может быть изоморфизмом.

Переходим к пространству L_1. В работе М. Кадеца и А. Пелчинского [8, теорема 6] при доказательстве теоремы о том, что любое нерефлексивное подпространство $X\subset L_1$ содержит $E\subset X$, $E\simeq l_1$ и дополняемо в L_1, доказано по существу следующее предложение.

Лемма 7. *Если* $A(B\to L_1)$ *не слабо компактный оператор, то* $\exists\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ *и* $\{Ax_k\}_{k=1}^\infty\simeq\{e_k\}_1^\infty$, *где* $\{e_k\}_1^\infty$ *— естественный базис в* l_1, *причем* $E(\{Ax_k\}_{k=1}^\infty)$ *дополняемо в* L_1.

Сопоставление лемм 5 и 7 дает

Предложение 4. *Если* $A(B\to L_1)\notin W(B, L_1)$, *то* $\exists E\subset B$ *такое, что* A *устанавливает изоморфизм* E *и* $E_1\subset L_1$, *где* $E_1\simeq l_1$ *и дополняемо в* L_1. Следовательно, $C_0(B, L_1)\subset W(B, L_1)$.

Замечание 3. Если $B\simeq X\subset L_1$, то по теореме Кадеца и Пелчинского [8, теорема 6] нерефлексивное подпространство $E\subset B$ имеет подпространство $E_1\subset E$, $E_1\simeq l_1$ и E_1 дополняемо в B (поскольку дополняемо в L_1).

Как и выше, тот факт, что $W(L_1)\subset C_0(L_1)$, следует из теоремы Данфорда-Петтиса [14, стр. 547] о том, что слабо вполне непрерывный оператор $A(L_1\to L_1)$ переводит слабо компактные множества в сильно компактные.

Этим заканчивается доказательство теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть* $A_i \in C_0(B)$ $(i = 1, 2)$, *где* B — *одно из пространств* $L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *либо* $C(S)$. *Тогда* A_2A_1 — *вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Для пространств L_1 и C утверждение следует из теоремы 6 и известного аналогичного факта для операторов из $W(L_1)$ и $W(C)$ [14, стр. 549 и 532].

Проведем вначале доказательство для пространств L_p при $p > 2$ (для L_2 теорема в доказательстве не нуждается). Мы будем использовать при этом следующий результат М. Кадеца и А. Пелчинского [8, следствие 5]:

Предложение 5. *Из любой последовательности* $\{x_k\}_1^\infty \subset S(L_p)$ $(p > 2)$ *такой, что* $x_k \rightharpoonup 0$ $(k \to \infty)$, *можно выделить подпоследовательность* $\{y_k\}_1^\infty$, *эквивалентную естественному базису* $\{e_k\}_{l_2}$ *пространства* l_2 *либо естественному базису* $\{e_k\}_{l_p}$ *пространства* l_p. *При этом* $E(\{y_k\}_1^\infty)$ *дополняемо в* L_p.

Предположим, что оператор $A_2A_1(L_p \to L_p)$ не вполне непрерывный. Это означает, что $A_2A_1S(L_p) \subset L_p$ некомпактное множество. Значит, существует последовательность $X = \{x_k\}_1^\infty \subset L_p$, $\| x_k \| \geqslant c > 0$, $x_k \rightharpoonup 0$ и $\| A_2A_1x_k \| \geqslant c > 0$. Обозначим $Y = \{A_1x_k = y_k\} \subset L_{p_1}$ и $Z = \{A_2y_k = z_k\}$. Ясно, что $y_k \rightharpoonup 0$ и $z_k \rightharpoonup 0$. Из предложения 5 следует, что из последовательностей X, Y и Z можно выделить подпоследовательности $X' = \{x_k'\}$, $Y' = \{A_1x_k' = y_k'\}$ и $Z' = \{A_2y_k' = z_k'\}$, эквивалентные либо $\{e_k\}_{l_2}$, либо $\{e_k\}_{l_p}$. Таким образом, одно из трех отображений $A(X' \to Y')$, $A_2(Y' \to Z')$ либо $A_2A_1(X' \to Z')$ есть отображение $T_1(l_2 \to l_2)$ или $T_2(l_p \to l_p)$. Но в пространстве l_p всякий оператор из C_0 является вполне непрерывным (см. § 1,1), а сужение каждого оператора из C_0 на любое бесконечномерное подпространство есть оператор из C_0. Значит, одно из отображений $A_1(X' \to Y')$, $A_2(Y' \to Z')$ либо $A_2A_1(X' \to Z')$ вполне непрерывно, что противоречит некомпактности последовательностей X', $A_1X' = Y'$ и $A_2A_1X' = Z'$.

Доказательство в $L_p(1 < p < 2)$ использует теорему 2. Согласно следствию 1 к этой теореме, если $A_i \in C_0(L_p)$ при $1 < p < 2$, то $A_i^* \in C_0$ (L_q), где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Таким образом, как уже доказано, $A_1^*A_2^* \in T(L_q)$, а значит $A_2A_1 \in T(L_p)$.

Теорема 8. а) *пусть* $p_1 > p \geqslant 2$, $A_1(L_p \to L_{p_1}) \in C_0$ *и* $A_2(L_{p_1} \to L_p) \in \Omega$. *Тогда* $A_2A_1 \in T(L_p)$.

б) *если* $1 \leqslant p_1 < p \leqslant 2$, $A_1(L_p \to L_{p_1}) \in \Omega$ *и* $A_2(L_{p_1} \to L_p) \in C_0$, *то* $A_2A_1 \in T(L_p)$.

Доказательство. а) предполагая, что $A_2A_1 \notin T(L_p)$, тем же приемом, что и при доказательстве предыдущего утверждения, получим существование трех последовательностей

$$X' = \{x_k'\} \subset L_p\ (\| x_k' \| \geqslant c > 0),\quad Y' = A_1X' \subset L_{p_1}\ (\| A_1x_k' \| \geqslant c > 0)$$

и

$$Z' = A_2Y' \subset L_p\ (\| A_2A_1x_k' \| \geqslant c > 0),$$

причем X' и Z' эквивалентны $\{e_k\}_{l_2}$ или $\{e_k\}_{l_p}$, а Y' эквивалентна $\{e_k\}_{l_2}$ либо $\{e_k\}_{l_{p_1}}$. Поскольку в силу теоремы 5 любой оператор $A(l_{p_1} \to l_p)$ $(p_1 > p)$ вполне непрерывен, то $Y' \simeq \{e_k\}_{l_2}$. По той же причине отображение $A_1(X' \to Y')$ вполне непрерывно, если только $p > 2$ и $X' \simeq \{e_k\}_{l_p}$. Значит, во всех случаях $X' \simeq \{e_k\}_{l_2}$. Но тогда $A_1 \notin C_0$. Противоречие.

б) переход к случаю $1 < p_1 < p \leqslant 2$ осуществляется так же, как и в теореме 7 (переходом к рассмотрению сопряженных операторов). В случае $p_1 = 1 < p$ из отмеченного при доказательстве теоремы 6 свойства слабо вполне непрерывных отображений $A(L_1 \to B)$ тривиально следует более общий факт:

для произвольных рефлексивных пространств B_1 и B_2 и непрерывных линейных отображений $A_1(B_1 \to L_1)$ и $A_2(L_1 \to B_2)$ следует $A_2A_1 \in T(B_1, B_2)$.

§ 3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНДЕКСА Ф-ОПЕРАТОРА

Определения этого параграфа вместе с обозначениями заимствованы нами из [17] и [3]. Рассмотрим $A(B_1 \to B_2)$. Пусть $R_A \equiv AB_1$ — замкнуто в B_2. Обозначим $\alpha_A = \dim \operatorname{Ker} A$ и $\beta_A = \dim \operatorname{Coker} A$. Оператор называется Φ_+-оператором, если $\alpha_A < \infty$, Φ_--оператором, если $\beta_A < \infty$, и Φ-оператором, если $\alpha_A < \infty$ и $\beta_A < \infty$. Число $\varkappa_A = \alpha_A - \beta_A$ называется индексом Φ-оператора A. Оператор $V \in \Omega(B_1, B_2)$ называется Φ-допустимым возмущением, если для любого Φ-оператора $A \in \Omega$ оператор $A + V$ есть Φ-оператор. Класс всех Φ-допустимых возмущений обозначим $F(B_1, B_2)$. Аналогично вводятся классы $\Phi_\pm$-допустимых возмущений, обозначаемые $F_\pm(B_1, B_2)$. Если $B_1 = B_2 = B$, то будем писать $F(B)$ и $F_\pm(B)$. Отметим (см., например, [3]), что если $V \in F(B_1, B_2)$ и $A(B_1 \to B_2)$ Φ-оператор, то $\varkappa_A = \varkappa_{A+V}$. Юд [19] доказал, что $F(B)$ есть замкнутый двусторонний идеал в $\Omega(B)$. В [3] это показано и для $F_\pm(B)$. Като [1] установил, что $C_0(B) \subset F_+(B)$. Кроме того, (см. [3])

$$T(B) \subset C_0(B) \subset F_+(B) \subset F(B); \quad T(B) \subset F_-(B) \subset F(B).$$

В [3] показано, что, вообще говоря, все перечисленные идеалы операторов не совпадают (за исключением $C_0(B)$ и $F_+(B)$, для которых вопрос остается открытым; более того, из приведенной в конце работы гипотезы следовало бы совпадение этих классов).

Теорема 9. 1. *Пусть B — одно из пространств L_1, $L_p (p \geqslant 2)$, $C(S)$. Тогда $C_0(B) \equiv F(B)$, т. е. $C_0(B)$ совпадает с классом операторов, возмущение которыми сохраняет индекс произвольного* Φ-оператора.

2. *Пусть B — одно из пространств $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, $C(S)$. Тогда $F(B) \cdot F(B) \subset T(B)$.*

Доказательство опирается на следующие леммы.

Лемма 8. *Идеал $F(B)$ не содержит бесконечномерных проекторов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный проектор P: $PB = E (\dim E = \infty)$ и $P^2 = P$. Тогда $\operatorname{Ker}(I_B - P) = E$, $\dim E = \infty$, и, значит, $P \notin F(B)$.

Лемма 9. *Пусть B — одно из пространств L_1, $L_p (p \geqslant 2)$, C. Всякий двусторонний идеал $J \subset \Omega$ без бесконечномерных проекторов содержится в* C_0.

Доказательство. Если $A \notin C_0$, то $\exists E \subset B (\dim E = \infty)$ и A есть изоморфизм E и AE. Если B есть $C[0, 1]$, то в силу предложения 3,б существует бесконечномерное подпространство $E_1 \subset E$ такое, что E_1 и $E_2 = AE_1$ дополняемы в $C[0, 1]$. В том случае, когда $B = L_1[0, 1]$ также существует подпространство $E_1 \subset E (\dim E_1 = \infty)$ такое, что E_1 и $E_2 = AE_1$ дополняемы в L_1. Это следует из замечания 3 и предложения 4. Наконец, в случае $L_p (p \geqslant 2)$ существование бесконечномерных дополняемых подпространств $E_i (i = 1, 2)$ таких, что $E_1 \subset E$ и $E_2 = AE_1$, следует из предложения 5. Во всех указанных случаях обозначим P_i — проектор из B на $E_i (i = 1, 2)$. Отображение $AP_1 : E_1 \to E_2$ есть изоморфизм, поэтому определено отображение $C = (AP_1)^{-1} P_2$.

Итак, $AP_1C = P_2$. Значит, любой двусторонний идеал, в который входит A, содержит бесконечномерный проектор. Таким образом, лемма 9 доказана.

Леммы 8 и 9 завершают доказательство п. 1 теоремы 9. В силу теоремы 7 доказательство п. 2 следует провести лишь для $L_p (1 < p < 2)$. Пусть J — двусторонний идеал $\Omega(B)$, а J^* — множество операторов в $\Omega(B^*)$, состоящих из сопряженных к операторам из J. Если B — рефлексивно, то J^* — двусторонний идеал в $\Omega(B^*)$. При этом, если J не содержит бесконечномерных проекторов, то их не содержит и J^*. Таким образом, если B есть одно из пространств $L_p (1 < p < 2)$, в силу лемм 8 и 9 $(F(B))^* \subset F(B^*)$, откуда следует, что $[F(B)]^2 \subset T(B)$ (поскольку для $F(B^*)$ это известно).

Нам не ясно, совпадают ли $C_0(L_p)$ и $F(L_p)$ для $1 < p < 2$; из сформулированной в конце работы гипотезы следует совпадение этих идеалов.

§ 4. C_0^*-ОПЕРАТОРЫ; ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Обозначим

$$\mathfrak{a}_c(B_1, B_2) = \{A(B_1 \to B_2) : \|A\| \leqslant 1 \text{ и } \inf[\|Ax\| : x \in S(B_1)] \geqslant c\}.$$

Теорема 10. *Если* $V \in C_0^*(B_1, B_2)$, *то* $\forall c > 0\, \exists n$, *зависящие лишь от* V *и* c, *такое, что* $\forall A \in \mathfrak{A}_c(B_1, B_2)$, $\dim \operatorname{Ker}(A+V) \leqslant n$.

Доказательство. Если утверждение теоремы не верно, то для любого n существует $A_n \in \mathfrak{A}_c(B_1, B_2)$ такое, что $\dim \operatorname{Ker}(A_n - V) \geqslant n$. Обозначим $\operatorname{Ker}(A_n - V) = E_{(n)}$. Тогда для $x \in E_{(n)}$, $A_n x = Vx$. Поскольку $\inf \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \geqslant c$, то $\|Vx\| \geqslant c$ при $x \in S(E_{(n)})$, где $\dim E_{(n)} \geqslant n$. Это противоречит принадлежности V классу $C_0^*(B_1, B_2)$, утверждение доказано.

2. В заключение сформулируем задачу, решение которой сыграло бы существенную роль в рассматриваемом круге вопросов.

Гипотеза. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}(B_1, B_2)$ *и* $\exists E \subset B_1 (\dim E = \infty)$ *такое, что* $\|Ax\| \geqslant c\|x\| (c > 0)$ *при* $x \in E$. *Тогда* $\exists E_1 \subset B_1$, $E_1 \supset E$, *такое, что* E_1 — *дополняемо в* B_1 *и* $\|Ax\| \geqslant c_1\|x\| (c_1 > 0)$ *при* $x \in E_1$.

Отметим несколько случаев, когда гипотеза имеет положительное решение:

а) *если* $AE = B_2$, *то* E — *дополняемо в* B_1 (т. е. $E_1 = E$); дополнением может служить $\operatorname{Ker} A$.

б) *если* AE *дополняемо в* B_2 (пусть P — какой-нибудь ограниченный проектор из B_2 на AE), *то* E — *дополняемо в* B_1, так как отображение PA удовлетворяет условиям п. а).

в) **Предложение 6.** *Если* $E \subset B_1$ *не имеет частичного дополнения (см. § 1, 3), то* $\forall A(B_1 \to B_2)$ *такой, что* A/E (т. е. A, *рассматриваемый лишь на* E) — *мономорфизм**, есть Φ_+-*оператор, т. е. существует* E^N $(\operatorname{codim} E^N = N)$, $E \subset E^N \subset B$ *и* A/E_N *мономорфизм.*

Доказательство. Если A не есть Φ_+-оператор, то, как показал Т. Като [1, § 4], $\forall \varepsilon > 0\, \exists E_1 \subset B_1 (\dim E_1 = \infty)$ и $\|Ax\| \leqslant \varepsilon$ при $x \in S(E_1)$. Так как A/E — мономорфизм, то $\inf\{\|Ax\| : x \in S(E)\} = c > 0$. Выберем указанное выше $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Тогда $\rho(S(E_1), S(E)) \geqslant \frac{c}{2\|A\|} > 0$. Это означает, что E_1 есть частичное дополнение для E. По условию это невозможно. Значит A — Φ_+-оператор.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Kato. Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. Journal d'analise Math., 6 (1958), 261—322.

2. В. Д. Мильман. Спектр органических непрерывных функций, заданных на единичной сфере B-пространства. Функц. анализ и его приложения, т. 3, № 2 (1969), 67—79.

3. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, И. А. Фельдман. О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах. Известия Молдавского филиала АН СССР, № 10 (76) (1960), 51—69.

* $A(E \to B_2)$ называется мономорфизмом, если A есть изоморфизм E и AE.

4. С. Банах. Курс функціонального аналіза. Вид-во, Київ, 1948.
5. М. И. Кадец, А. Пелчинский. Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше. Studia Math, 25 (1965), 297—323.
6. A. Pelczyski. Projections in certain Banach spaces, Studia Math., 19 (1960), 209 — 228.
7. J. W. Calkin. Abstract symmetric boundary conditions, Trans. Amer. Math. Sor., 45, № 3 (1939), 369—442.
8. M. I. Kadec, A. Pelczynski. Bases, lacunary sequences and complemented Subspaces in the spaces L_p, Studia Math., 21 (1962), 161—176.
9. М. И. Кадец. О линейной размерности пространств L_p и l_q. УМН, т. 13, № 6 (1958), 95—98.
10. J. Lindestrauss. Ona theorem of Murray and Mackey, An. Acad. brasil cienc., 39, № 1 1967, 1—6.
11. A. Grotendieck. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du tupe C(K), Canad. J. Math., 5 (1953), 129—173.
12. R. Paley. Some theorems on abstract Spaces. Bull. Am. Math. Soc., 42, № 4 (1936), 181—186.
13. A. Pelczynski. On Strictly singular and strictly cosingular operators. I, II. Bull. Acad polon. Sci. Ser. Sci math astron et phys., 13 № 1 (1965), 31—41.
14. І. Данфорд и Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. I, ИЛ, М., 1962.
15. A. Pelczynski. A note on the paper of I. Singer «Basic sequences and reflexivity of Banach spaces», Studia Math., 21 (1962). 371—374.
16. A. Sobczyk, Projections of the space (m) on its Subspace (c_0). Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), 938—947.
17. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, XII, № 2, (1957), 43—118.
18. В. Д. Мильман. Некоторые свойства строго сингулярных операторов. Функц. анализ и его приложения, т. 3, № 1 (1969), 93—94.
19. B. Iood. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuons transformation, Duke Math. Journal. 18, № 3 (1951), 599—612.
20. Б. С. Митячин, А. Пелчинский. Nuclcar operators and approxi mative dimension, Тр. Меж. Конгресса матем., Москва, 1966, 366—372.

Поступила 7 октября 1968 г.