УДК 517.5

П. М. ЮДИЦКИЙ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ j-СЖИМАЮЩЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ ПО ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ЕЕ j-ФОРМЫ И СВЯЗАННАЯ С ЭТИМ ЗАДАЧА «ИНТЕРПОЛЯЦИИ»

Пусть $A^{-1}(\zeta)$ — аналитическая в единичном круге комплексной плоскости j-сжимающая обратимая матрица-функция

$$\Gamma(\zeta) = j - A^{-1*}(\zeta)\, jA^{-1}(\zeta) \geqslant 0, \quad j = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 1 - \bar{\zeta}\zeta > 0.$$

Как известно, j-сжимающие (растягивающие) функции имеют почти всюду предельные граничные значения. Таким образом, на окружности определена функция $\Gamma(t) = \lim\limits_{r\to 1} \Gamma(rt)$.

Вопрос: когда возможно и как по заданной на окружности неотрицательной 2×2 матрице функции $\Gamma(t)$ построить $A^{-1}(\zeta)$ (функция указанного класса, предельные значения j-формы которой равны Γ). В данной работе дан ответ на этот вопрос в рамках j-теории В. П. Потапова.

Для j-теории характерно рассматривать j-растягивающую аналитическую функцию как матрицу коэффициентов дробно-линейного преобразования, дающего описание множества решений той или иной «классической задачи интерполяции» [1—3]. Пусть $w(\zeta)$ — образ дробно-линейного преобразования с матрицей коэффициентов $A(\zeta) = \| a_{ij}(\zeta) \|$ над некоторой произвольной сжимающей аналитической функцией $\omega(\zeta)$ $(1 - \overline{\omega(\zeta)}\,\omega(\zeta) \geqslant 0)$:

$$\begin{bmatrix} w(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} = A(\zeta) \quad \begin{bmatrix} \omega(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} (a_{21}(\zeta)\,\omega(\zeta) + a_{22}(\zeta))^{-1}. \tag{1}$$

Тогда если Γ — предельные значения j-формы матрицы $A^{-1}(\zeta)$, предельные значения аналитической функции $w(\zeta)$ удовлетворяют неравенству

$$1 - \bar{w}w - [\bar{w},\ 1]\,\Gamma \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \overline{(a_{21}\omega + a_{22})}^{-1}(1 - \bar{\omega}\omega)(a_{21}\omega + a_{22})^{-1} \geqslant 0. \tag{2}$$

Удобно связать с неотрицательной матрицей-функцией $\Gamma(t)$ ограниченную неотрицательную матрицу-функцию $\Lambda = \Gamma^{1/2}(I + \Gamma^{-1/2}$. При этом $\Gamma = \Lambda(I - \Lambda^2)^{-1}\Lambda$, $0 \leqslant \Lambda \leqslant I$, и неравенство (2) эквивалентно неотрицательности матрицы:

$$\left[\begin{array}{c|c} I - \Lambda^2 & \Lambda \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline * & 1 - \bar{w}w \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{3}$$

Итак, если Λ построена указанным способом по j-форме матрицы $A^{-1}(\zeta)$, то существует семейство сжимающих аналитических функций, задаваемое формулой (1), предельные значения каждой удовлетворяют неравенству (3).

Формулировка задачи интерполяции. Пусть Λ — измеримая 2×2 матрица-функция, заданная на единичной окружности, $0 \leqslant \Lambda \leqslant I$. Требуется отыскать аналитическую сжимающую функцию $w(\zeta)$, предельные значения которой удовлетворяют неравенству (3), и описать множество решений в случае неоднозначной разрешимости.

Канонический метод исследования дает следующие результаты:

Теорема 1. *Аналитическая функция $w(\zeta)$ тогда и только тогда является решением поставленной задачи при заданном* Λ, *когда она удовлетворяет основному матричному неравенству:*

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle Dx,\ x\rangle & \langle(\zeta - T)^{-1}(ew(\zeta) - m),\ x\rangle \\ \hline * & \dfrac{1 - \overline{w(\bar{\zeta})}\, w(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0. \qquad \text{(ОМН)}$$

В данном случае

$\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\boldsymbol{C}^2)$; x — произвольный вектор из $L^2(\boldsymbol{C}^2)$; $D = I - \Lambda^2 - \Lambda P_+ j\Lambda$; P_+ — проектор $L^2(\boldsymbol{C}^2)$ на $H^2(\boldsymbol{C}^2)$; $e = \Lambda\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; $m = -\Lambda\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$; T — оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\boldsymbol{C}^2)$;

$|\zeta| \neq 1$, при $|\zeta| > 1$ под $w(\zeta)$ понимается ее доопределение по принципу «принудительной симметрии» $\overline{w(\bar{\zeta})} = w^{-1}(1/\zeta)$. Операторы D и T связаны с векторами e и m основным тождеством:

$$D - TDT^* = e\langle\ ,\ e\rangle - m\langle\ ,\ m\rangle. \qquad \text{(ОТ)}$$

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием разрешимости ОМН является условие $D \geqslant 0$.*

Пусть $\Lambda_\varepsilon = (1-\varepsilon)\Lambda$, $0 < \varepsilon < 1$, и D_ε — оператор, построенный по Λ_ε. Легко видеть, что при $D \geqslant 0$ D_ε — обратим.

Теорема 3 (основная). *Необходимым и достаточным условием неоднозначной разрешимости ОМН является условие:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| \langle D_\varepsilon^{-1}\Lambda, \Lambda\rangle \| < \infty, \quad \det\{j + \lim_{\varepsilon\to 0}\langle D_\varepsilon^{-1}\Lambda,\ \Lambda\rangle\} \neq 0.$$

При этом множество решений задачи описывается формулой (1), независимый параметр $\omega(\zeta)$ пробегает весь класс аналитических сжимающих функций, матрица $A(\zeta)$ определяется формулой

$$A(\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{j + P_+(\Lambda\,(D_\varepsilon^{-1}\Lambda))(\zeta)\}R,$$

где R — постоянная матрица, определенная с точностью до j-унитарного множителя справа.

Сама матрица $A(\zeta)$ обладает следующими свойствами:

$$A^*(\zeta)\,jA(\zeta) - j \geqslant 0, \quad 1 - \bar{\zeta}\zeta > 0;$$
$$\lim_{|\zeta|\to 1}\{j - A^{-1*}(\zeta)\,jA^{-1}(\zeta)\} = \Lambda(I - \Lambda^2)^{-1}\Lambda.$$

Список литературы: 1. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Интегральное представление эрмитово позитивных функций. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2984—81 Деп., 1981.—119 с. 2. *Кацнельсон В. Э.* Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 143—83 Деп., 1983.—350 с. 3. *Юдицкий П. М.* Задача о лифтинге. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 311 Ук-Д 83, 1983.— 59 с.

Поступила в редколлегию 25.11.83.