УДК 517.5

*А. И. ЩЕРБА*

# О ХАРАКТЕРИСТИКАХ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Важные характеристики роста целых функций — величины $T(r, f)$ и $\log M(r, f)$. Существует много работ, посвященных изучению связи между ними[1]. Из известной оценки

$$\log M(r, f) \leqslant \frac{R+r}{R-r} \cdot T(R, f) \quad (0<r<R) \tag{1}$$

следует, что для целой функции конечного нижнего порядка

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} < \infty.$$

---

[1] Гольдберг А. А. Мероморфные функции.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М., 1983, 10.— 210 с.

Из результатов Симидзу [1] вытекает, что при $k > 1$ справедливо равенство

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f) \cdot \log^k T(r, f)} = 0. \qquad (2)$$

В монографии У. К. Хеймана «Мероморфные функции» показано, что соотношение 2 несправедливо при $k = 1$. Недавно автор и И. И. Марченко исследовали, на какую функцию можно заменить $\log^k T(r, f)$ в соотношении (2), чтобы оно оставалось верным. Из результатов статьи У. К. Хеймана [2] следует, что для любой возрастающей функции $g(r)$ найдется такая целая функция $f(z)$, что

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log M(r, f)}{g(T(r, f))} = \infty. \qquad (3)$$

Это означает невозможность оценить сверху $\log M(r, f)$ через $T(r, f)$ при $r \in (0, \infty)$ в классе всех целых функций. В некоторых случаях известна равномерная оценка $\log M(r, f)$ через $T(r, f)$. Для целых функций нулевого порядка с $T(r, f) = O(\log^2 r)$ было получено [2], что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} = 1.$$

Пусть $\varphi(r)$ — произвольная возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to +\infty$. В [2] также построен пример целой функции $f(z)$ такой, что $T(r, f) = O(\varphi(r) \cdot \log^2 r)$ и справедливо (3) с $g(t) \equiv \equiv t$. Как следует из (1), если $T(2r, f) = O(T(r, f))$, $r \to \infty$ (4), то

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} < \infty. \qquad (5)$$

А. Э. Еременко и М. Л. Содин показали [3], что для произвольной неубывающей функции $T(r, f)$ конечного порядка (4) выполняется вне множества сколь угодно малой верхней логарифмической плотности. Отсюда вытекает, что для произвольной целой функции конечного порядка (5) также выполняется вне такого множества. Отметим, что в работе [4] построена целая функция произвольного порядка, для которой $T(r, f) = o(\log M(r, f))$, когда $r \to \infty$, пробегая множество верхней плотности единицы.

В работе получены следующие результаты.

1°. Пусть $f(z)$ — непостоянная целая функция, а $\varepsilon(x)$ $(x \geqslant x_0)$ — положительная неубывающая функция такая, что

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{t \cdot \varepsilon(t)} < \infty. \qquad (6)$$

Тогда существует множество $I_f$ конечной логарифмической меры такое, что

$$\overline{\lim_{\substack{r \to \infty \\ r \notin I_f}}} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f) \cdot \varepsilon(T(r, f))} = 0.$$

2°. Предположим, что $f(z)$ — непостоянная целая функция и имеет конечный порядок. Тогда для произвольного $k > 0$:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r, f)}{\exp\{k \cdot T(r, f)\}} = 0.$$

Показано, что соотношение 2° нельзя уточнить в следующем смысле.

3°. Для произвольной монотонно убывающей положительной функции $\varphi(r)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = 0$ и произвольного числа $\rho$ $(0 < \rho < \infty)$ существует целая функция $f(z)$ нулевого нижнего порядка и порядка $\rho$, для которой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r, f)}{\exp\{\varphi(r) \cdot T(r, f)\}} = \infty.$$

Перейдем к доказательству полученных результатов.

1°. Легко видеть, что для любой функции $\varepsilon(t)$ из 1° существует положительная неубывающая функция $\varepsilon_1(t)$, для которой выполняется соотношение (6) и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon(t)} = 0$. Если в известной теореме Бореля — Неванлинны (используем обозначения из работы [5, с. 120) положить

$$u(x) = \log T(e^x, f), \quad \varphi(u) = \frac{1}{\varepsilon_1(e^u)},$$

то получим

$$T\left(r \cdot \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon_1(T(r, f))}\right\}, f\right) < e \cdot T(r, f), \ (r \geqslant r_0),$$

кроме, возможно, множества конечной логарифмической меры. Далее воспользуемся известным неравенством (1). Пусть

$$R = r \cdot \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon_1(T(r, f))}\right\}.$$

Тогда для всех $r$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической меры $I_f$, справедливо неравенство $\log M(r, f) \leqslant 2 \times \times e \cdot T(r, f) \cdot \varepsilon_1(T(r, f))(1 + o(1))$ $(r \to \infty)$, откуда имеем

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin I_f}}} \frac{\log M(r, f) \cdot \varepsilon_1(T(r, f))}{T(r, f) \cdot \varepsilon(T(r, f)) \cdot \varepsilon_1(T(r, f))} \leqslant 2e \lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon_1(T(r, f))}{\varepsilon(T(r, f))} = 0.$$

Это утверждение показывает возможность равномерной оценки характеристики $T(r, f)$ снизу через $\log M(r, f)$ вне множества конечной логарифмической меры.

2. В этом пункте мы докажем соотношения 2° и 3° между характеристиками $T(r, f)$ и $\log M(r, f)$ для целых функций конечного порядка.

Если $f(z)$ — полином, то утверждение 2° очевидно. Для целой же трансцендентной функции $f(z)$ справедливо равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty.$$

Поэтому для каждого положительного числа $c$ существует такое число $r(c)$, что при всех $r \geqslant r(c)$ выполняется неравенство $T(r, f) > \log r^c$. Из определения порядка целой функции следует, что

$$\log M(r, f) \leqslant r^{\rho+1} \quad (r \to \infty).$$

Выбирая теперь $c = \frac{\rho+1}{k} + 1$, получим соотношение 2°.

Покажем теперь, что выполняется утверждение 3°. Пусть $f(z) = \exp\left\{\frac{c}{1-z}\right\}$, $c \geqslant 1$. Так как функция $g(z) = \frac{c}{1-z}$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ и $\operatorname{Re} g(z) > 0$, то $T(r, f) = \log f(0) = c$, $0 \leqslant r < 1$. Пусть

$$p_N(z, c) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \quad \text{а} \quad K_N = 1 - 8\left(\frac{2c}{N}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $a_n$ — коэффициенты тейлоровского разложения для функции $f(z)$ ($f(z) = f(z, c)$). При доказательстве 3° мы будем использовать следующие результаты [2].

**Лемма А** [2]. *Если $K_N > \frac{1}{2}$, то выполняются неравенства:*

1) $|p_N(z, c) - f(z, c)| < 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant K_N;$

2) $c - \log 2 \leqslant T(r, p_N(z, c)) \leqslant c + \log 2, \quad \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant K_N;$

3) $T(r, p_N(z, c)) \leqslant 17(cN)^{\frac{1}{2}} + N \log^+ r, \quad K_N \leqslant r, \quad |z| = r.$

Пусть последовательности $r_n$, $c_n$, $N_n$ удовлетворяют следующим условиям: $r_1 = 1$, $r_{n+1} \geqslant 2r_n$, $c_n \geqslant n$, $N_n \geqslant 512c_n$ (7), $N_n$ — натуральные числа ($n = 1, 2, \ldots$).

**Лемма В** [2]. *Функция*

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4c_n} \cdot p_{N_n}\left(\frac{z}{r_n}, c_n\right)$$

*есть целая функция такая, что при* $\frac{1}{2} r_\nu \leqslant r \leqslant \frac{1}{2} r_{\nu+1}$, $\nu \geqslant 2$, *выполняется неравенство*

$$T(r, p(z)) \leqslant T\left(\frac{r}{r_\nu}, e^{-4c_\nu} \cdot p_{N_\nu}(z, c_\nu)\right) + \sum_{n=1}^{\nu-1} N_n \left(\log \frac{r}{r_n} + 2\right), \quad (|z| = r).$$

Перейдем теперь непосредственно к построению нужной нам целой функции. Пусть $p(z)$ — функция, определенная в лемме B. Положим $\psi(r) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{1}{\varphi(r)}$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi(r) \leqslant \log r$. Очевидно, что можно выбрать последовательности $r_n$, $c_n$, $N_n$ так, чтобы выполнялись условия (7) и $r_{n-1}^{2\rho} < \psi(r_n)$, $r_{n-1}^{\rho} < \log r_n$, $c_1 = 1$, $N_1 = 513$, $c_n = \psi(r_n) \log r_n$, $N_n = [r_n^{\rho}]$ $(n > 1)$, где $\rho \in (0, \infty)$ (8). Предположим, что $\frac{1}{2} r_\nu \leqslant r \leqslant \frac{1}{2} r_{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 1)$. Тогда из (8) следует

$$\sum_{n=1}^{\nu-1} N_n \left(\log \frac{r}{r_n} + 2\right) = O\left(\sum_{n=1}^{\nu-1} N_n \log r\right) = O(N_{\nu-1} \log r) =$$
$$= O(r_{\nu-1}^{\rho} \log r) = O(\sqrt{\psi(r_\nu)} \log r), \quad (r_\nu \to \infty). \qquad (9)$$

Из леммы А имеем

$$T\left(\frac{r}{r_\nu},\ e^{-4c_\nu} \cdot p_{N_\nu}(z,\ c_\nu)\right) = O\left(N_\nu \left(1 + \log^+ \frac{r}{r_\nu}\right)\right) =$$
$$= O(r_\nu^{\rho} \log r) \quad (r_\nu \to \infty). \qquad (10)$$

Отсюда следует, что функция $p(z)$ имеет порядок не больше $\rho$.

Далее, рассмотрим $p(z)$ на окружности $|z| = r'_\nu = K_{N_\nu} \cdot r_\nu$. Тогда в силу леммы А

$$T\left(\frac{r'_\nu}{r_\nu},\ e^{-4c_\nu} \cdot p_{N_\nu}(z,\ c_\nu)\right) \leqslant T(K_{N_\nu} \cdot p_{N_\nu}(z,\ c_\nu)) \leqslant c_\nu + \log 2.$$

Используя лемму B и соотношения (9), получаем $T(r'_\nu,\ p(z)) \leqslant$ $\leqslant c_\nu + \log 2 + O(N_{\nu-1} \cdot \log r'_\nu) = c_\nu + O(N_{\nu-1} \log r_\nu) = c_\nu +$ $+ O(\sqrt{\psi(r_\nu)} \cdot \log r_\nu) = c_\nu(1 + o(1))$ (11). Оценим $\log M(r,\ f)$ снизу. Отметим, что коэффициенты полиномов $p_{N_k}(z,\ c_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ положительны. Отсюда $\log M(r'_\nu,\ p(z)) = \log p(r'_\nu) > \log\Big(e^{-4c_\nu} \times$ $\times\, p_{N_\nu}\left(\frac{r'_\nu}{r_\nu},\ c_\nu\right)\Big) = \log p_{N_\nu}(K_{N_\nu},\ c_\nu) - 4c_\nu$ (12). Применяя к (12) утверждение 1) из леммы А получаем

$$\log M(r'_\nu,\ p(z)) \geqslant \log p_{N_\nu}(K_{N_\nu},\ c_\nu) - 4c_\nu = \frac{c_\nu}{1 - K_{N_\nu}} \times$$
$$\times (1 + o(1)) \geqslant \frac{1}{16}(c_\nu N_\nu)^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)), \quad (\nu \to \infty). \qquad (13)$$

Для оценки снизу порядка построенной функции $p(z)$ понадобится оценка снизу коэффициентов полиномов $p_{N_k}(z,\ c_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$. Из формулы

$$\left(\exp\left(\frac{c_k}{1-z}\right)\right)^{(n)} = \left(\frac{c_k}{(1-z)^2}\exp\left(\frac{c_k}{1-z}\right)\right)^{(n-1)} =$$
$$= \frac{n!\,c_k}{(1-z)^{n+1}}\exp\left(\frac{c_k}{1-z}\right) + \cdots$$

следует, что коэффициент $a_n$ тейлоровского разложения функции $f(z,\ c_k)$ допускает оценку $a_n \geqslant c_k \cdot \exp(c_k)$. Далее, рассмотрим функцию $p(z)$ на окружности $|z| = e \cdot r_\nu$. Оценим снизу $\log M \times$ $\times (er_\nu,\ p(z)) = \log p(er_\nu) \geqslant \log p_{N_\nu}(e,\ \ c_\nu) - 4c_\nu \geqslant \log(a_{N_\nu} \cdot e^{N_\nu}) -$ $- 4c_\nu \geqslant N_\nu(1 + o(1)) = r_\nu^\rho(1 + o(1)),\ \nu \to \infty$. Отсюда и из оценки (10) следует, что порядок функции $p(z)$ равен $\rho$. В силу (11) и (13) получаем, что функция $p(z)$ имеет нулевой нижний порядок и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r,\ p(z))}{\exp\{\varphi(r)\cdot T(r,\ \rho)\}} \geqslant \frac{1}{20}\lim_{\nu\to\infty}\frac{(c_\nu N_\nu)^{\frac{1}{2}}}{\exp\{2\varphi(r_\nu)\cdot c_\nu\}} =$$
$$= \frac{1}{20}\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sqrt{c_\nu}\cdot\exp\left\{\frac{\rho}{2}\cdot\log r_\nu\right\}}{\exp\left\{\frac{\rho}{2}\log r_\nu\right\}} = \infty.$$

Таким образом, функция $p(z)$ удовлетворяет всем нужным условиям.

**Список литературы:** 1. *Shimizu T.* On the theory of meromorphic functions.— Japanes J. Math. 6 (1929), 119—171. 2. *Hayman W. K.* On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals.—Proc. London Math, Soc. 14A (1965), 93—128. 3. *Еременко А. Э., Содин М. Л.* О росте и убывании целых функций конечного порядка. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 02.06.83., № 419 Ук—Д 83, с. 12. 4. *Гольдберг А. А., Еременко А. Э.* Об асимптотических кривых целых функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, **109**, с. 555—581. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 591 с.

*Поступила в редколлегию 01.04.83.*