УДК 517.946

Ю. И. ЧУДИНОВИЧ

ОСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПУСТОТАМИ. II. СЛУЧАЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУСТОТ

В настоящей работе построен набор ячеечных задач, через решения которых выражаются коэффициенты осредненного уравнения в случае периодического распределения пустот. Будем использовать обозначения, введенные ранее*.

Рассматривается случай постоянных коэффициентов $a_{\alpha_p\beta_q}$ исходной формы $W(u(x), v(x))$. Пусть центры x_{is} шаров F_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ образуют периодическую структуру с периодом $(h_{1s}, \ldots, h_{ds})$, где $h_{ks}(1 \leqslant k \leqslant d)$ — период в направлении k-й оси. Считаем $h_{ks} > 2r_s = 2s^{-1/d}(1 \leqslant k \leqslant d)$, положим, кроме того, отношения $h_{ks}/r_s = c_k$ $(k = 1, \ldots, d)$ константами, не зависящими от s.

В области Ω естественным образом выделяются ячейки $P_{is}(i = 1, \ldots, s)$ — параллелепипеды Π_{is} со сторонами $h_{ks}(k = 1, \ldots, d)$ и центрами в точках x_{is}, из которых выброшены шары F_{is}. Заменой переменных $\xi = (x - x_{is})s^{1/d}$ каждая из ячеек P_{is} сводится к стандартной ячейке $P = \Pi/F$, где Π — параллелепипед с центром в начале координат и сторонами $c_k (k = 1, \ldots, d)$; F — шар единичного радиуса.

Введем m-компонентные векторы $\bar{\xi}_{\alpha_p}$ $(p = 1, \ldots, m;\ |\alpha_p| = n_p)$, имеющие нулевые компоненты за исключением p-й, равной $\frac{1}{2p!}\xi^{\alpha_p}$. Назовем при каждом фиксированном $\alpha_p(p = 1, \ldots, m;$ $|\alpha_p| = n_p)$ ячеечной задачу о минимизации формы

---

* Чудинович И. Ю. Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. I. Общая теорема об осреднении. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 42, с. 21—26.

$L_P(u, u)$ в классе вектор-функций $u(\xi) \in H^n(P)$ таких, что $u(\xi) - \bar{\xi}_{\alpha_p}$ периодичны на $\partial\Pi$:

$$D^{\alpha_q}\left(u^{(q)}(\xi) - \frac{\delta_{pq}}{\alpha_p!}\xi^{\alpha_p}\right)\Bigg|_{\xi_k = \frac{c_k}{2}} = D^{\alpha_q}\left(u^{(q)}(\xi) - \frac{\delta_{pq}}{\alpha_p!}\xi^{\alpha_p}\right)\Bigg|_{k = -\frac{c_k}{2}} \qquad (1)$$

$(k = 1, \ldots, d;\ q = 1, \ldots, m;\ |\alpha_q| \leqslant n_q - 1)$. Разрешимость (с точностью до постоянного вектора) ячеечной задачи для каждого α_p доказывается стандартными методами, соответствующую минимизирующую вектор-функцию обозначим через $u_{\alpha_p}(\xi)$. Предположим, что $u_{\alpha_p}(\xi)$ являются классическими решениями уравнения $Au_{\alpha_p}(\xi) = 0$, где A — матричное дифференциальное выражение, порожденное формой L_P, гладкими вплоть до границы ячейки P. При этом $u_{\alpha_p}(\xi)$ удовлетворяют системе естественных граничных условий на ∂F, а $u_{\alpha_p}(\xi) - \bar{\xi}_{\alpha_p}$ — условиям периодичности на $\partial\Pi$.

Теорема 3. *Коэффициенты $\tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}$ осредненной формы $\tilde{W}$ $(u(x), v(x))$ равны*

$$\tilde{a}_{\alpha_p\beta_q} = \prod_{k=1}^{d} c_k^{-1} L_P(u_{\alpha_p}, u_{\beta_q}) \ (p, q = 1, \ldots, m; |\alpha_p| = n_p, |\beta_q| = n_q).$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и куб $K_{0h} \subset \Omega$. Для каждых $p = 1, \ldots, m$ и $\alpha_p(|\alpha_p| = n_p)$ построим в Ω_s вектор-функцию $v_{s0\alpha_p}(x)$, положив ее компоненты в каждой ячейке P_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ равными

$$v^{(q)}_{s0\alpha_p}(x) = r_s^{n_q} u^{(q)}_{\alpha_p}\left(\frac{x - x_{is}}{r_s}\right) + \frac{\delta_{pq}}{\alpha_p!}\left[(x - x_0)^{\alpha_p} - (x - x_{is})^{\alpha_p}\right]$$

$(r_s = s^{-\frac{1}{d}})$. В силу граничных условий (1) $v_{s0\alpha_p} \in H^n(\Omega_s)$. Ищем $g_{sh0\alpha_p}$, минимизирующую характеристический функционал $T_{\alpha_p sh0}$, в виде

$$g_{sh0\alpha_p}(x) = v_{s0\alpha_p}(x) + w_{sh0\alpha_p}(x).$$

Ясно, что $w_{sh0\alpha_p}(x)$ в классе $H^n(K_{sh0})$ минимизирует функционал

$$Q_{sh0}(w) + 2L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p}, w) + 2\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\left(w^{(t)}, v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}\right)_{k, K_{sh0}},$$

где

$$Q_{sh0}(w) = L_{K_{sh0}}(w, w) + \sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|w^{(t)}\|^2_{k, K_{sh0}}. \qquad (2)$$

Значение $Q_{sh0}(w)$ на вектор-функции $w_{sh0\alpha_p}(x)$ обозначим через $Q^*_{\alpha_p, sh0}$. Очевидно,

$$Q^*_{\alpha_p,sh0} \leqslant 2\,|\,L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ w_{sh0\alpha p})\,| + 2\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\,|\,(w^{(t)}_{sh0\alpha_p},\ v_{s0\alpha_p} -$$

$$- P^{(t)}_{0p\alpha_p})_{k,K_{sh0}}\,|\,.$$

Оценим правую часть последнего неравенства:

$$|\,(w^{(t)}_{sh0\alpha_p},\ v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p})_{k,K_{sh0}}\,|^2 \leqslant \|\,w^{(t)}_{sh0\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}} \times$$

$$\times \|\,v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}},\quad \|\,v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}} \leqslant \frac{ch^d}{h_{1s}\cdots h_{ds}} r_s^{2(nt-k)+d} \times$$

$$\times \|\,u^{(t)}_{\alpha_p} - \frac{\delta_{tp}}{\alpha_p!}\xi^{\alpha_p}\|^2_{k,P} \leqslant ch^d\, r_s^{2(nt-k)}$$

$(k = 0, \ldots, n_t - 1)$. Следовательно,

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\,|\,(w^{(t)}_{sh0\alpha_p},\ v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p})_{k,K_{sh0}}\,| \leqslant$$

$$\leqslant cr_s h^{\frac{1}{2}(d-2|n|-\theta)}\cdot\{Q^*_{\alpha_Q},\ {}_{sh0}\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Перейдем к оценке первого слагаемого правой части в (2). Возьмем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим куб $K_{0,h-2\varepsilon}$ с центром в точке x_0 со стороной $h - 2\varepsilon$ и обозначим через $K_{0h\varepsilon} = K_{0h}\diagdown K_{0,h-2\varepsilon}$. Введем функцию $\psi_\varepsilon(x)$, обладающую следующими свойствами: $\psi_\varepsilon(x)\in D(K_{0h})$, $\psi_\varepsilon(x)\equiv 1$ при $x\in K_{0,h-2\varepsilon}$, $|\,D^\alpha\psi_\varepsilon(x)\,| \leqslant c\varepsilon^{-|\alpha|}$ $(|\,\alpha\,| = 0, 1, \ldots, |\,n\,|)$. Тогда функция $\varphi_\varepsilon(x) = 1 - \psi_\varepsilon(x)$ такова, что $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x) \subset K_{0h\varepsilon}\,|\,D^\alpha\varphi_\varepsilon(x)\,| \leqslant c\varepsilon^{-|\alpha|}$ $(|\,\alpha\,| \leqslant |\,n\,|)$.
Представим теперь $L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ w_{sh0\alpha_p})$ в виде

$$L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ w_{sh0\alpha_p}) = L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ \psi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}) + L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ \varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}).$$

Интегрированием по частям с учетом финитности $\psi_\varepsilon(x)$ убеждаемся в том, что $L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ \psi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}) = 0$. Далее

$$\{L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ \varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p})\}^2 \leqslant L_{K_{0h\varepsilon}}(v_{s0\alpha_p},\ v_{s0\alpha_p}) \times$$

$$\times L_{K_{sh0}}(\varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p},\ \varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}),\quad L_{K_{0h\varepsilon}}(v_{s0\alpha_p},\ v_{s0\alpha_p}) \leqslant c\varepsilon h^{d-1},$$

$$L_{K_{sh0}}(\varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p},\ \varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha}\ ) \leqslant c\,\|\,\varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}\|^2_{n,K_{sh0}} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t} \varepsilon^{2(k-n_t)}\,\|\,w^{(t)}_{sh0\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}} \leqslant c\,\{L_{K_{sh0}}(w_{sh0\alpha_p},\ w_{sh0\alpha_p}) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} \varepsilon^{2(k-n_t)}\,\|\,w^{(t)}_{sh0\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}}\}\,.$$

Положив $\varepsilon = h^{1+\frac{\theta}{2|n|}}$, получим

$$L_{K_{0h\varepsilon}}(v_{s0\alpha_p},\ v_{s0\alpha_p}) \leqslant ch^{d+\frac{\theta}{2|n|}},\quad L_{K_{sh0}}(\varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p},\ \varphi_\varepsilon w_{sh0\alpha_p}) \leqslant cQ^*_{\alpha_p,sh0}\,.$$

Итак, $|\,L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p},\ w_{sh0\alpha_p})\,| \leqslant ch^{\frac{d}{2}+\frac{\theta}{4|n|}}\{Q^*_{\alpha_p,sh0}\}^{\frac{1}{2}}$. (5)

Подставив (4), (5) в (2), придем к оценке

$$Q^*_{\alpha_p sh0} \leqslant c\{r_s^2 h^{d-2|n|-\theta} + h^{d+\frac{\theta}{2|n|}}\}.$$

Отсюда $\lim\limits_{h\to 0} \lim\limits_{s\to\infty} h^{-d} Q^*_{\alpha_p sh0} = 0.$

Из соотношения

$$T^*_{\alpha_p sh0} = L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p}, v_{s0\alpha_p}) + 2L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p}, w_{sh0\alpha_p}) + Q^*_{\alpha_p sh0} +$$

$$+ 2\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{nt-1} h^{2(k-nt)-\theta}\,(w^{(t)}_{sh0\alpha_p}, v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p})_{k,K_{sh0}} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\,\| v^{(t)}_{s0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}\|^2_{k,K_{sh0}}$$

и (3) — (6) получаем

$$\lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty} h^{-d} T^*_{\alpha_p sh0} = \lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty} h^{-d} L_{K_{sh0}}(v_{s0\alpha_p}, v_{s0\alpha_p}) = \tilde{a}_{\alpha_p\alpha_p}.$$

Тривиальные выкладки показывают, что

$$\tilde{a}_{\alpha_p\alpha_p} = \prod_{k=1}^{d} c_k^{-1} L_P(u_{\alpha_p}, u_{\alpha_p}).$$

Полученные оценки (3)—(6) влекут и более общие соотношения:

$$\tilde{a}_{\alpha_p\beta_q} = \prod_{k=1}^{d} c_k^{-1} L_P(u_{\alpha_p}, u_{\beta_q})$$

($p, q = 1, \ldots, m$; $|\alpha_p| = n_p\,|\beta_q| = n_q$), доказывающие утверждение теоремы.

Поступила в редколлегию 10.10.83.