УДК 517.9

В. И. ХРАБУСТОВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ВЕСОМ НА ОСИ И ПОЛУОСИ

В работе строятся формулы для спектральной матрицы периодической симметрической системы дифференциальных уравнений $l[y] = \lambda w(t) y$ произвольного порядка с матричным (возможно, всюду вырожденным) весом $w(t) \geqslant 0$ на оси и на полуоси. В случае оси, если $w(t)$ — вес положительного типа, найденная формула эквивалентна установленной [1]. В случае полуоси формулы являются новыми даже для скалярного уравнения с $w(t) \equiv 1$.

Основные результаты работы анонсированы в работе [2].

1. Характеристическая и спектральная матрицы системы с вырождающимся весом. Рассмотрим квазидифференциальную систему произвольного порядка r:

$$l[y] \equiv \sum_{j=0}^{[r/2]} (p_{2j}(t)\, y^{(j)})^{(j)} + i \sum_{j=0}^{[(r-1)/2]} ((p_{2j+1}(t)\, y^{(j)})^{(j+1)} + \\ + (p^*_{2j+1}(t)\, y^{(j+1)})^{(j)}) = \lambda w(t)\, y,\ t \in J = (a,\ b) \subseteq R^1, \tag{1}$$

где p_ν, $0 \leqslant w \in M_m(\mathbf{C})$, $\det \operatorname{Re} p_r \neq 0$, $p_{2j} = p^*_{2j}$.

Для удобства изложения считаем, что $0 \in \bar{J}$. Обозначаем $\tilde{z} = \operatorname{col}\{z^{[0]}, \ldots, z^{[r-1]}\}$ (r — четно), $\tilde{z} = \operatorname{col}\{z^{[0]}, \ldots, z^{[(r-3)/2]}, iz^{((r-1/2)}, z^{[(r+1)/2]}, \ldots, z^{[r-1]}\}$ (r — нечетно), где $z^{[j]}$ — квазипроизводные [3] (см. также [1]. В силу [3] система $l[y] - \lambda wy = wf$ **(2)** заменой $x = \tilde{y}$ сводится к системе $l^1[x] \equiv \frac{i}{2}((Q(t)\, x)' + Q(t)\, x') + B(t)\, x = \lambda W(t)\, x + W(t)\, F$ **(3)**, где $Q(t) = \| q_{jk} \|^r_{j,\, k=1}$, $q_{jk} = i \times \operatorname{sgn}(k-j)\, 1^*_m (j + k = r + 1,\ \ j \neq k)$, $q_{jj} = 2(-1)^{j-1} \operatorname{Re} p_r\, (2j = r + 1)$, остальные $m \times m$-блоки $q_{jk} = 0$, $B = B^*$, $W = \operatorname{diag}(w, 0, \ldots, 0)$, $F = \operatorname{col}\{f, \ldots\}$.

Аналогично [4] построим минимальное симметрическое отношение $\boldsymbol{L}_0$ ($\boldsymbol{L}^1_0$), порождаемое $l[y]$ ($l^1[x]$) в $H = L^2(J,\ wdt)$ ($H^1 = L^2(J,\ Wdt)$). Используя [5, с. 97] и эквивалентность (2), (3), легко показать, что каждая обобщенная резольвента R_λ отношения $\boldsymbol{L}_0$ порождает по формуле

$$R^1_\lambda F = R_\lambda \widetilde{f},\ F = \operatorname{col}\{f, \ldots\} \in H^1,\ f \in H \tag{4}$$

обобщенную резольвенту $\boldsymbol{L}^1_0$ и что (4) описывает все обобщенные резольвенты $\boldsymbol{L}^1_0$ (из функций, равных в H (в H^1) $R_\lambda f$ ($R^1_\lambda F$) в (4) берется функция, являющаяся решением (2)/(3)/).

Обозначим $\boldsymbol{N} = \{h \in E^n : h^* \Delta_{ab}(\lambda)\, h = 0\}$, где $n = mr$, $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda) = \int_\alpha^\beta Y^*_\lambda(t)\, w(t)\, Y_\lambda(t)\, dt$, $Y_\lambda(t)$-такое $m \times n$-матричное решение (1), что $\tilde{Y}_\lambda(0) = 1_n$. Ясно, что $\boldsymbol{N}$ от λ не зависит.

Лемма 1. $\exists \alpha,\ \beta : a < \alpha < \beta < b$, $\operatorname{Ker} \Delta_{\alpha\beta}(\lambda) = \boldsymbol{N}$.

Доказательство достаточно провести для системы

$$l^1[x] = \lambda W x, \tag{5}$$

ибо $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)$ и $\boldsymbol{N}$ у (1) и (5) совпадают. Но для (1) с $p_{2j+1} = p^*_{2j+1}$ (и, в частности, для (5)) в силу [4] $\exists\, \alpha,\ \beta$:

$$a < \alpha < \beta < b,\ \forall h \in \boldsymbol{N}^\perp \setminus \{0\} : h^* \Delta_{\alpha\beta}(\lambda)\, h > 0. \tag{6}$$

* 1_m — единичная $m \times m$-матрица.

Если $K = \operatorname{Ker} \Delta_{\alpha\beta}(\lambda) \ni h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in N \subseteq K$, $0 \neq h_2 \in N^\perp$, то $0 \neq h_2 \in K \cap N^\perp$, что противоречит (6). Значит, $K = N$ ■

Некоторые утверждения следующей теоремы известны в несколько иной форме, а другие — для частных случаев (см. [1,4]).

Теорема 1.1^0. *Для финитной* $f \in H$ *при* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$

$$R_\lambda f \overset{H}{=} \int Y_\lambda(t) \left\{ M(\lambda) - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t-s) G^{-1} \right\} Y_\lambda^*(s) \, w(s) f(s) \, ds^*, \quad (7)$$

где характеристическая $n \times n$*-матрица* $M(\lambda) = M^*(\overline{\lambda})$ *неванлиннова;* $PMP = M$; P *— ортопроектор на* $N^\perp$, $G = Q(0)$.

2°. По формуле обращения Стильтьеса найдем спектральную матрицу $\tau(\lambda)$, отвечающую $M(\lambda)$. $\forall f \in D(L_0)$ справедливы формулы обращения и равенство Парсеваля:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_\lambda(t) \, d\tau(\lambda) \, \varphi_\lambda, \quad \varphi_\lambda = \int Y_\lambda^*(t) \, w(t) f(t) \, dt, \quad (8)$$

$$\int f^* w f dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda^* \, d\tau \varphi_\lambda, \quad (9)$$

интегралы (8) сходятся в H и в $L^2(R^1, d\tau)$ соответственно.

3°. Если (7) является резольвентой отношения $L = L^* \supseteq L_0$, то

$$\tau(\lambda + 0) - \tau(\lambda - 0) = P \sum \tilde{y}_j(0) (\tilde{y}_j(0))^* P, \quad (10)$$

где $\{y_j(t)\}$ — ортонормированный в H базис подпространства Ω таких решений y системы (1), что $\{y, \lambda y\} \in L$. (В Ω решения, равные в H, отождествляем; если при данном $\lambda \Omega = \{0\}$, то $\tau(\lambda + 0) - \tau(\lambda - 0) = 0$).

Доказательство. 1° достаточно, в силу (4), доказать при $p_{2j+1} = \overset{*}{p}_{2j+1}$, а для этого случая утверждение 1^0 известно (см. [4]**) с $M_0 = 0$).

2^0. Как известно [5], $R_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - \lambda} d\varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \Pi E_t$, $E_{t+0} = E_t$ — спектральное семейство самосопряженного отношения $\hat{L} \supseteq L_0$ в гильбертовом пространстве $\hat{H} \supseteq H$, Π — ортопроектор на H в $\hat{H}$ (вообще говоря, $\varepsilon_\infty \neq$ единичному оператору в H). Из (7) аналогично случаю $w(t) \equiv 1$ (А. В. Штраус, 1957 г.) получаем для финитной $f \in H$:

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta - 0} - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha - 0}) f \overset{H}{=} \int_\alpha^\beta Y_\lambda(t) \, d\tau(\lambda) \, \varphi_\lambda, \quad (11)$$

* В интегралах по J пределы интегрирования опускаем.

** Доказательство в [4] проведено при условии, что существуют непересекающиеся интервалы вида (α, β), удовлетворяющие (6). В рассматриваемом случае от этого ограничения можно отказаться.

откуда стандартно выводятся (8), (9) $\forall f \in D(\boldsymbol{L}_0)$, если учесть, что $f \in D(\boldsymbol{L}_0) \subseteq D(\hat{\boldsymbol{L}}) \Rightarrow \varepsilon_\infty f = \prod E_\infty f = \prod f = f$.

3°. В силу [5, с. 84] $\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-0}$ — ортопроектор на подпространство таких $y \in H$, что $\{y, \lambda y\} \in \boldsymbol{L}$. Учитывая это и (11) и обозначая R левую часть (10), имеем для финитной $f \in H$:

$$\sum y_j(t) \int y_j^*(s)\, w(s)\, f(s)\, ds = Y_\lambda(t) R \int Y_\lambda^*(s)\, w(s)\, f(s)\, ds + u(t), \quad (12)$$

где $u(t) \stackrel{H}{=} 0$. В силу (12) $u(t)$ — решение (1), $\tilde{u}(0) \in \boldsymbol{N}$. Поэтому из (12) с учетом того, что $PRP = R$, следует $\forall f \in H$:

$$P \sum \tilde{y}_j(0) \int y_j^*(s)\, w(s)\, f(s)\, ds = R \int Y_\lambda^*(s)\, w(s)\, f(s)\, ds, \quad (13)$$

откуда

$$P\tilde{y}_j(0) = R\Delta_J(\lambda)\, \tilde{y}_j(0).^* \quad (14)$$

Используя (13), (14) и лемму 1, получаем, что $RE^n =$ линейной оболочке L векторов $P\tilde{y}_j(0)$. Поэтому $Rv_k = 0$, где $\{v_k\}$ — базис в $L^\perp$. Учитывая это и (14), видим, что R и правая часть (10) совпадают на образующих базис в E^n векторах v_k, $U\Delta_J(\lambda)\, \tilde{y}_j(0)$, где U — ортопроектор на L ■

Используя лемму 1, показываем аналогично [1, с. 113, 118], что имеет место

Замечание 1. Если при каком-нибудь невещественном λ

$$\forall h \in \boldsymbol{N}^\perp \setminus \{0\} : Y_\lambda(t) h \bar{\in} H, \quad (15)$$

то R_λ единственна и (8), (9) справедливы $\forall f \in D(\boldsymbol{L}_0^*)$.

Вообще говоря, $\boldsymbol{L}_0$ не является графиком оператора, а $\overline{D(\boldsymbol{L}_0)} \neq H$**). Бывает даже, что $D(\boldsymbol{L}_0) = \{0\}$, как показывает

Теорема 2.1°. $PG^{-1}P = 0 \Rightarrow D(\boldsymbol{L}_0) = \{0\}$. 2°. *Если* $PG^{-1}P \neq 0$ *и существует два непересекающихся интервала вида* (α, β), *удовлетворяющих* (6), *то* $D(\boldsymbol{L}_0) \neq \{0\}$.

Доказательство 1°. $PG^{-1}P = 0 \Rightarrow \forall u \in D(\boldsymbol{L}_0)$,

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} Y_0(t)(1_n - P) G^{-1} \int_a^t Y_0^*(s)\, w(s)\, f_k(s)\, ds, \quad (16)$$

где $\lim$ берется в H, финитные $f_k \in H$, $\int Y_0^* w f_k ds = 0$. Аппроксимируя интеграл в (16) кусочно-постоянными функциями, видим, что стоящее под знаком $\lim$ выражение $\stackrel{H}{=} 0 \Rightarrow D(\boldsymbol{L}_0) = \{0\}$.

2°. Допустим, что все предположения выполнены, а $D(\boldsymbol{L}_0) = \{0\}$. Тогда легко видеть, что $R_\lambda = 0$ — обобщенная резольвен-

* $\Delta_E(\lambda)$ — это $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)$ при $E = (\alpha, \beta)$.

** Аналогичное явление имеет место при рассмотрении отношений, порождаемых парой дифференциальных выражений $My = \lambda Ly$ [6]. Однако работа [6] не охватывает уравнений с вырождающимся весом.

та L_0. Пусть $a<\alpha_1<\beta_1\leqslant\alpha_2<\beta_2<b$, $(\alpha_j,\ \beta_j)$ — интервалы из условия. Полагая

$$f(t)=\begin{cases} Y_{\bar\lambda}(t)\,\xi, & t\in(\alpha_1,\ \beta_1),\\ 0, & t\bar{\in}(\alpha_1,\ \beta_1),\end{cases} \tag{17}$$

где $\xi\in E^n$, получаем в силу (7), что $0\overset{H}{=}R_\lambda f\overset{H}{=}y(t)$, где $y(t)=$ $=Y_\lambda(t)(M-(i/2)G^{-1})\,\Delta_{\alpha_1\beta_1}(\bar\lambda)\,\xi$ при $t\in(\alpha_2,\ \beta_2)$, откуда $P(M-$ $-(i/2)G^{-1})P=0$. Заменяя в (17) $(\alpha_1,\ \beta_1)$ на $(\alpha_2,\ \beta_2)$, аналогично получаем $P(M+(i/2)G^{-1})P=0\Rightarrow PG^{-1}P=0$, что противоречит предположению ■

Одно условие $PG^{-1}P\neq 0$ не гарантирует, вообще говоря, что $D(L_0)\neq\{0\}$. Так, $P=1_2$, а $D(L_0)=\{0\}$ для системы

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y'=\lambda w(t)\,y\quad(0\in J), \tag{18}$$

где $w(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $(t<0)$, $w(t)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(t>0)$. (Значит, по теореме 2 *для (18) не существует двух непересекающихся интервалов* вида $(\alpha,\ \beta)$, удовлетворяющих (6)).

Можно показать, что $\dim D(L_0)=\infty$, если в (1) $r=1$, $\mathrm{Re}\,p_1$ дефинитна, $P\neq 0$ или если в (1) коэффициенты постоянны и $PG^{-1}P\neq 0$.

2. Свойства периодических систем с вырождающимся весом. Ниже в (1) $p_\nu(t)=p_\nu(t+1)$, $w(t)=w(t+1)$. Матрица $X_\lambda=$ $=\tilde Y_\lambda(1)$ называется матрицей монодромии системы (1), а ее собственные значения — мультипликаторами (м.) этой системы.

Теорема 3.

$$b-a\geqslant\varkappa\Rightarrow X_\lambda N=N,\ X_\lambda(GN)^\perp=(GN)^\perp, \tag{19}$$

где $\varkappa$ — степень минимального полинома X_0.

Доказательство. Покажем сначала, что $\beta-\alpha\geqslant\varkappa\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathrm{Ker}\,\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)=\mathrm{Ker}\,\Delta_{R^1}(0)$ **(20).**

Аналогично [1, с. 113, 114] имеем: $\beta-\alpha\geqslant\varkappa$, $h\in\mathrm{Ker}\,\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)\Rightarrow$ $\Rightarrow Y_\lambda(t)h=Y_0(t)g$, $t\in(\alpha,\ \beta)$, $g\in\mathrm{Ker}\,\Delta_{R^1}(0)$. Ясно, что $Y_0(t)g$ — решение (1) при $t\in R^1$, $\forall\lambda$. Отсюда $Y_\lambda(t)h=Y_0(t)g$, $t\in R^1\Rightarrow h=$ $=g$ и (20) доказано, ибо очевидно, что $\mathrm{Ker}\,\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)\supseteq\mathrm{Ker}\,\Delta_{R^1}(0)$.

В силу (20) $b-a\geqslant\varkappa\Rightarrow N=\mathrm{Ker}\,\Delta_{0\varkappa}(\lambda)=\mathrm{Ker}\Delta_E(\lambda)$, где $E=$ $=(\varkappa,\ 2\varkappa)$. Учитывая это и теорему Флоке, имеем: $h\in N\Rightarrow 0=$ $=\Delta_E h=X_\lambda^{\varkappa *}\Delta_{0\varkappa}(\lambda)X_\lambda^\varkappa h\Rightarrow X_\lambda^\varkappa h\in N\Rightarrow X_\lambda h\in N\Rightarrow$ первое равенство (19). Так как в силу известной формулы

$$(\tilde Y_\lambda(t))^*Q(t)\,\tilde Y_\lambda(t)-G=2\,\mathrm{Im}\,\lambda\Delta_{0t}(\lambda); \tag{21}$$

$$(\tilde Y_{\bar\lambda}(t))^*Q(t)\,\tilde Y_\lambda(t)=G, \tag{22}$$

то $N=X_{\bar\lambda}^{-1}N=G^{-1}X_\lambda^*GN\Rightarrow X_\lambda^*GN=GN\Rightarrow$второе равенство (19)

Обозначим $R^+(\lambda)$, $R^-(\lambda)$, $R_s(\lambda)$ — проекторы Рисса X_λ, отвечающие м., находящимся соответственно внутри, вне и на единичной окружности S.

Теорема 4.

$$Y_\lambda(t)h \in L^2(R^1_\pm, wdt) \Rightarrow h \in \{R^\pm(\lambda)E^n + \operatorname{Ker}\Delta_{R^1}(0)\}. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть для определенности $Y_\lambda(t)h \in L^2 \times (R^1_+, wdt)$. Если $R^-(\lambda)h \neq 0$, то

$$X^k_\lambda h = \sum_{\alpha=1}^{p} e^{\lambda_\alpha k} h_\alpha(k) + O(k^n), \ \boldsymbol{Z}_+ \ni k \to \infty,$$

где $e^{\lambda_1} < e^{\lambda_2} < \ldots < e^{\lambda_p}$ — модули м., находящихся вне S, $h_\alpha(k) \in$ инвариантному подпространству X_λ, отвечающему тем м., модули которых $= e^{\lambda_\alpha}$.

Допустим, что $UR^-(\lambda)h \neq 0$, где U — ортопроектор на $\{\operatorname{Ker} \Delta_{R^1}(0)\}^\perp$. Тогда в силу (19), (20) $UX^k_\lambda R^-(\lambda)h \neq 0 \forall \ \forall k \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow \Rightarrow \exists \alpha_0 \forall k \in \boldsymbol{Z} : Uh_\alpha(k) = 0, \ \alpha > \alpha_0, \ Uh_{\alpha_0}(k) \neq 0$. Используя жорданов базис $\ln X_\lambda$, представим $h_{\alpha_0}(\varkappa k)$ в виде

$$h_{\alpha_0}(\varkappa k) = \sum_{\beta=0}^{q} k^\beta g_\beta(k), \quad g_\beta(k) = \sum_{j=1}^{s} e^{i\theta_j k} f_j$$

(числа $\theta_j \in R^1$, q, s и векторы f_j от k не зависят). Ясно, что $\exists \beta_0, k_0 : Ug_\beta(k) = 0 \ \forall k \in \boldsymbol{Z}, \ \beta > \beta_0, \ Ug_{\beta_0}(k_0) \neq 0$. Значит, существует последовательность $Z_+ \ni k_\nu \to \infty$ такая, что $|Ug_{\beta_0}(k_\nu)| > c > > 0$. Поэтому $\exists K, \ \ \forall k_\nu > k : |UX^{\varkappa k_\nu} h| > c/2$, что противоречит сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (UX^{\varkappa k}_\lambda h)^* \Delta_{0\varkappa}(\lambda) UX^{\varkappa k}_\lambda h = h^* \Delta_{R^1_+}(\lambda) h \quad (24)$$

(равенство (24) справедливо в силу (20) и теоремы Флоке). Значит, $UR^-(\lambda)h = 0$. Аналогично проверяется, что $UR_s(\lambda)h = 0$

Если $X_\lambda h = \rho h$, где $\lambda \overline{\in} R^1$, $\rho \in S$, $h \in E^n$, то $h \in \operatorname{Ker}\Delta_{R'}(0)$ в силу (21). Поэтому 1) $\forall \lambda \overline{\in} R^1 \sigma(X_\lambda) \cap S = \sigma(X_i) \cap S \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_S$; 2) $\forall \lambda \in \in R^1 : \sigma(X_\lambda) \cap S \supseteq \sigma_S$. Пусть $d(\lambda)$ — суммарная алгебраическая кратность σ_s. Так как ф-дефектное число (1) на полуоси постоянно при $\operatorname{Im}\lambda \gtrless 0$ [3], то в силу (23) и теоремы Флоке $d(\lambda) = d(i)$ $(\lambda \overline{\in} R^1)$. Ясно, что $d(\lambda) \geqslant d(i) (\lambda \in R^1)$ и что $T_s = \{\lambda : d(\lambda) > d(i)\}$ не имеет конечных предельных точек.

Анализ доказательств свойств функций (21) из [1, с. 115, 116], где $\sigma_s = \varnothing$, показывает, что они остаются в силе для тех ветвей $\rho_j(\lambda)$, определяемой уравнением $\det(X_\lambda - \rho 1_n) = 0$ многозначной функции $\rho(\lambda)$, для которых $\rho_j(\lambda_0) = \rho_0 \in S \setminus \sigma_s$.

Используя это и эквивалентность (1), (5), можно показать, что 1) не имеет конечных предельных точек множество T тех $\lambda \overline{\in} T_s$, при которых >1 порядки жордановых клеток, отвечающих м. $\in S\setminus\sigma_s$; 2) ни один из м. при $\lambda\in\Lambda = R^1\setminus(T\cup T_s)$ не сходит с S и не садится на S. М., которые $\in S\setminus\sigma_s$ при $\lambda\in(\alpha, \beta)\subseteq\Lambda$ аналитичны на (α, β) и при сдвиге λ с (α, β) в верхнюю полуплоскость часть из них (м. I рода) сдвигаются внутрь, а остальные (м. II рода) — во внешность S.

Для тех $\lambda\in\Lambda$, при которых нет совпавших м. разного рода, определим проекторы Рисса $P^+(\lambda)\,(P^-(\lambda))$, отвечающие м. I (II) рода. Используя [1, с. 115; 7, с. 274], можно показать, что $\lambda\in\Lambda$, при которых у (1) есть м. смешанного рода, являются устранимыми особыми точками $P^\pm(\lambda)$.

Обозначим $Q^\pm(\lambda) = R^\pm(\lambda) + P^\pm(\lambda)$.

Ниже $n = 2k$ и выполнено условие

$$\exists\Gamma\in M_n(C):\Gamma^*G\Gamma = i\begin{pmatrix}0 & 1_k\\ -1_k & 0\end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Для $B(\lambda)\in M_n(C)$ полагаем

$$\Gamma^{-1}B(\lambda)\,\Gamma = \begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix},\quad B_l\in M_k(C).$$

Лемма 2. *При* $\lambda\in R^1 R_1^{+*} = R_4^-$, $R_2^{+*} = -R_3^-$. *При* $\lambda\in\Lambda P_1^{\pm *} = P_4^{\mp}$, $P_\beta^{\pm *} = -P_\beta^{\mp}$ $(\beta = 2, 3)$.

Доказательство вытекает из того, что в силу (22) $GU(\lambda) = V^*(\lambda)\,G\,(\lambda\in R^1)$ для проекторов Рисса $U(\lambda)$, $V(\lambda)$, отвечающих любым двум частям $\sigma(X_\lambda)$, симметричным относительно S.

Лемма 3. *Пусть* $\det Q_\beta^+\neq 0$ *при* $\lambda = \lambda_0\in\Lambda$. *Тогда при* $\lambda = \lambda)$

$$P_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm^{-1}} P_\beta^\pm = P_\alpha^\pm = P_\alpha^\pm Q_\beta^{\mp *^{-1}} P_\beta^\pm, \qquad (26)^\pm$$

$$R_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm^{-1}} R_\beta^\pm = R_\alpha^\pm = R_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm *^{-1}} R_\beta^\pm, \qquad (27)^\pm$$

$$P_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm^{-1}} R_\beta^\pm = 0 = R_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm^{-1}} P_\beta^\pm, \qquad (28)^\pm$$

$$P_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm *^{-1}} R_\beta^\mp = 0 = R_\alpha^\pm Q_\beta^{\pm *^{-1}} P_\beta^\mp \qquad (29)^\pm$$

($\beta = 3$, *если* $\alpha = 1, 3$ *и* $\beta = 2$, *если* $\alpha = 2, 4$). _|

Доказательство. Если $\det Q_2^+\neq 0$, то $\Gamma^{-1}Q^\pm\Gamma E^n = \operatorname{col}\{Q_2^\pm,\ Q_4^\pm\}E^k = \operatorname{col}\{1_k,\ M^\pm\}E^k$, где $M^\pm = Q_4^\pm Q_2^{\pm^{-1}}$. Отсюда

$$P_{j+2}^\pm = M^\pm P_j^\pm,\quad R_{j+2}^\pm = M^\pm R_j^\pm\ \ (j = 1, 2) \qquad (30)$$

и $\Gamma^{-1}P^\pm\Gamma\operatorname{col}\{P_2^\pm,\ M^\mp P_2^\pm\} = 0$. Поэтому $\operatorname{col}\{P_2^\pm,\ P_4^\pm\} = \Gamma^{-1}P^\pm\Gamma\times$ $\times\operatorname{col}\{P_2^\pm, P_4^\pm\} = \Gamma^{-1}P^\pm\Gamma\operatorname{col}\{0,\ (M^\pm - M^\mp)P_2^\pm\} = \Gamma^{-1}P^\pm\Gamma\operatorname{col}\{0,$ $Q_2^{\pm^{-1}}P_2^\pm\} = \operatorname{col}\{P_2^\pm Q_2^{\pm^{-1}}P_2^\pm,\ P_4^\pm Q_2^{\pm^{-1}}P_2^\pm\}$ и первое равенство $(26)^\pm$ при $\beta = 2$ доказано. Аналогично проверяются первое равенство $(26)^\pm$ при $\beta = 3$, а также $(28)^\pm$ и первое равенство $(27)^\pm$. В силу леммы 2 и (30)

$$P_j^\pm = -P_{j+1}^\pm M^{\pm *},\ R_j^\pm = -R_{j+1}^\pm M^{\mp *}\ \ (j = 1, 3), \qquad (31)$$

если $\det Q_2^{\mp} \neq 0$. Отсюда в силу леммы 2 и первого равенства $(26)^{\pm}$

$$P_4^{\mp} Q_2^{\mp *^{-1}} P_2^{\pm} = -(P_2^{\pm} Q_2^{\pm^{-1}} P_2^{\pm} M^{\pm *})^* = -(P_2^{\pm} M^{\pm *})^* = P_4^{\pm}.$$

Аналогично $P_2^{\mp} Q_2^{\mp *^{-1}} P_2^{\pm} = -(P_2^{\pm} Q_2^{\pm^{-1}} P_2^{\pm})^* = -P_2^* = P_2$ и второе равенство $(26)^{\pm}$ при $\beta = 2$ доказано. Остальные равенства $(26)^{\pm}$—$(29)^{\pm}$ проверяются аналогично ■

3. Задача на оси. Здесь $J = R^1$. Так как (15) выполнено $\forall \lambda \in C$ в силу (23), то R_λ единственна и в силу [5] $L_0 = L_0^*$.

Лемма 4. $PR_s(\lambda) G^{-1} P = 0$ *при* $\lambda \overline{\in} R^1$. _|

Доказательство. Так как $R_\lambda f \in H$, где f определена (17) с $(\alpha_1, \beta_1) = (0, \varkappa)$, то в силу (7), (20), (23) $\forall h \in N^{\perp}$, $\lambda \overline{\in} R^1$ $(M \pm \pm (i/2) G^{-1}) h \in \{R^{\mp} E^n + N\} \Rightarrow G^{-1} h \in \{(R^+ + R^-) E^n + N\} \Rightarrow R_s G^{-1} h \in N$, ибо $R_s N \subseteq N$ в силу (19) ■

Лемма 5. *Характеристическая матрица равна*

$$M(\lambda) = P\left(R^+(\lambda) - \frac{1}{2} 1_n\right) (iG)^{-1} P \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \ \_| \tag{32}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{R}_\lambda$ оператор (7) с $M = \hat{M}$, где

$$\hat{M}(\lambda) = \left(R^+(\lambda) - \frac{1}{2} 1_n\right) (iG)^{-1} . (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{33}$$

В силу (22) теоремы Флоке и леммы 4 $\hat{R}_\lambda f \in H$, если финитная $f \in H$. Поэтому $(R_\lambda - \hat{R}_\lambda) f \overset{H}{=} Y_\lambda(t) (M - \hat{M}) \int Y_{\bar{\lambda}}^*(s) \, w(s) f(s) \, ds \overset{H'}{=} 0$ в силу (23). Взяв f (17) с $(\alpha_1, \beta_1) = (0, \varkappa)$, видим с учетом (20), что $P(M - \hat{M}) P = 0 \Rightarrow M = P\hat{M}P$ ■

Теорема 5. *Спектральная матрица* $\tau(\lambda) \in AC_{loc}$,

$$\tau'(\lambda) = (1/2\pi) P (P^-(\lambda) - P^+(\lambda)) G^{-1} P. \ \_| \tag{34}$$

Доказательство вытекает из (10), (23), (32) и равенств

$$M^*(\lambda) = M(\bar{\lambda}) \ (\lambda \overline{\in} R^1), \ R^+(\lambda \pm i0) = P^{\pm}(\lambda) + R^+(\lambda) \ (\lambda \in \Lambda) \ ■$$

Для системы (1) первого порядка с дефинитной $\operatorname{Re} p_1$ (34) дает

$$\tau'(\lambda) = \pm P (4\pi \operatorname{Re} p_1(0))^{-1} P.$$

Замечание 2.1^0. $PG^{-1}P = 0 \leftrightarrow \tau'(\lambda) \equiv 0$. 2^0. Бывает, что $\tau'(\lambda) \neq \neq 0$ лишь на конечном интервале, т. е. «операторная часть» отношения* оказывается ограниченным оператором с непрерывным спектром.

Доказательство. 1^0. Так как в силу (19) $R^+ N \subseteq N$, то $PG^{-1}P = 0 \Rightarrow PR^+ G^{-1} P = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow \tau' \equiv 0$. Обратно, если $\tau' \equiv \equiv 0$, то $D(L_0) = \{0\}$ в силу (9), откуда $PG^{-1}P = 0$ в силу теоремы 2 и (20). 2^0. Если в (18) продолжить $w(t)$ с $(-1/2, 1/2)$ на

* В смысле формулы (9), п. 1 из работы [8] (см. также [5]).

ось периодически, то у получившейся при этом системы $\tau' \neq 0$ $(|\lambda| < 2)$, $\tau^1 = 0\,(|\lambda| > 2)$ ■

4. Задача на полуоси. Здесь $J = R^1_+$, $\sigma_s = \varnothing$, $n = 2k$ и выполнено (25). Пусть L k-мерное, G — нейтральное [7] подпространство такое, что $E^n = R^+(\lambda)\,E^n \dotplus L\,(\lambda \bar{\in} R^1)$. Это эквивалентно условию $R^+(0)\,E^n \cap L \cap \boldsymbol{N} = \{0\}$, ибо $\operatorname{Re}\int y^* l\,[y]\,dt = \lambda h^* \Delta_J(\lambda)\,h$, если $y = Y_\lambda(t)\,h$, $h \in R^+(\lambda)$ $E^n \cap L$.

Определим в H отношение $\boldsymbol{L} = \{\{u,\ v\} \in H^2 : u \overset{H}{=} y \in L^\infty(J),\ \tilde{y} \in \in AC_{\mathrm{loc}},\ l\,[y] \overset{\text{п. в.}}{=} wv,\ \tilde{y}\,(0) \in L\}$*).

Лемма 6. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^*$. *Характеристическая матрица резольвенты* $\boldsymbol{L}$ *равна*

$$M(\lambda) = P\left(\boldsymbol{R}^+(\lambda) - \frac{1}{2}\,1_n\right)(iG)^{-1}P \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0), \tag{35}$$

где $\boldsymbol{R}^+(\lambda)$ — *проектор на* $R^+(\lambda)\,E^n$ *вдоль* L. _|

Доказательство. Обозначим $\hat{R}_\lambda f$ интеграл (7) с $M = \hat{M}$, где

$$\hat{M} = \left(\boldsymbol{R}^+(\lambda) - \frac{1}{2}\,1_n\right)(iG)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0). \tag{36}$$

Тогда $\hat{R}_\lambda f = y_1(f) + y_2(f)$, $y_1(f) = Y_\lambda(t)\,\boldsymbol{R}^+ \int R^-(iG)^{-1} Y^*_{\bar{\lambda}}(s)\,w(s)\,\times$ $\times f(s)\,ds$, $y_2(f)$ = интегралу (7) с $M = \hat{M}$ (33). Отсюда, учитывая (22), эквивалентность (2), (3), теорему Флоке и [7, с. 241], выводим, что $\forall f \in H \hat{R}_\lambda f$ сходится при $\forall t \in [0,\ \infty)$, $|\widetilde{y_2(f)}|$ ограничена при $t \in J$. Используя лемму 5, можно показать, что $y_2(f) \in$ $\in H$. Значит, $\hat{R}_\lambda f \in H$, ибо $\widetilde{y_1(f)}$ экспоненциально убывает при $t \to$ $\to +\infty$ в силу теоремы Флоке. Прямая проверка завершает доказательство того, что $\hat{R}_\lambda f$ является при $\lambda \bar{\in} R^1$, $f \in H$ решением задачи:

$$l\,[y] - \lambda w y = wf,\ y\,(t) \in H \cap L^\infty(J),\ \tilde{y}\,(0) \in L. \tag{37}$$

Это решение единственно в силу теоремы Флоке и равенства $\{0\} =$ $= R^+(\lambda)\,E^n \cap L \quad (\lambda \bar{\in} R^1)$.

Поэтому, если $\{u,\ v\} \in \boldsymbol{L}$, то $u \overset{H}{=} y_1(v - \lambda u) + y_2(v - \lambda u)$. Учитывая отмеченные свойства y_1, y_2 и самосопряженность $\boldsymbol{L}_0$ при $J = R^1$, отсюда выводим симметричность $\boldsymbol{L}$. Но разрешимость (37) $\forall f \in H$ означает, что при $\lambda \bar{\in} R^1$ область значений $\boldsymbol{L} - \lambda$ равна H. Значит [5, с. 92], $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^*$.

Так как $\{f,\ \hat{R}_\lambda f\} \in (\boldsymbol{L} - \lambda)^{-1}$, а $(\boldsymbol{L} - \lambda)^{-1}$ — это график R_λ-резольвенты $\boldsymbol{L}$, то $\forall f \in H : R_\lambda f \overset{H}{=} \hat{R}_\lambda f$ и доказательство (35) завершается аналогично доказательству (32) ■

---

* Если не требовать, чтобы $y \in L^\infty(J)$, то $\boldsymbol{L}$ может оказаться несимметрическим (см. систему (6) из [2]). При $P = 1_n$ условие $y \in L^\infty(J)$ следует из остальных.

Обозначим $\Lambda_d = \{\lambda : R^+(\lambda) E^n \cap L \neq \{0\}\}$. Используя [1, с. 115; 7, с. 274], можно показать, что Λ_d не имеет конечных предельных точек. Учитывая, что [7] при $\lambda \in \Lambda$

$$P^{\pm *} G R^+ = R^{\pm *} G R^{\pm} = 0, \quad \mp h^* G P^{\pm} h > 0 \; (0 \neq h \in P^{\pm} E^n), \tag{38}$$

видим, что $E^n = P^{\pm} E^n \dotplus R^+ E^n \dotplus L$ при $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_d$. Обозначим $\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda)$ проектор на $P^{\pm}(\lambda) E^n$ вдоль $R^+(\lambda) E^n \dotplus L$ $(\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_d)$.

Теорема 6. *Отвечающая (35) спектральная матрица* $\tau(\lambda) = \tau_{a\,c.}(\lambda) + \tau_d(\lambda)$, *где* $\tau_{ac.}(\lambda) \in AC_{loc}$,

$$\tau'_{ac.}(\lambda) = P G^{-1} \boldsymbol{P}^{\pm *}(\lambda) G \boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) G^{-1} P, \tag{39}$$

$\tau_d(\lambda)$ — *функция скачков, множество точек роста которой* $= \Lambda_d$. *Скачки* $\tau(\lambda)$ *находятся по формуле* (10), *в которой* $\{y_j(t)\}$ — *ортонормированный в* H *базис подпространства решений* (1), *удовлетворяющих при данном* $\lambda \in \Lambda_d$ *начальному условию* $\tilde{y}(0) \in R^+(\lambda) E^n \cap L$. ◼

Доказательство. Так как $M^*(\lambda) = M(\bar{\lambda})$, то $\forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_d$, $h \in E^n$:

$$2(\operatorname{Im} M(\lambda + i0)) h = P(h^- + g'_1 - h^+ - g_1),$$

где

$$G^{-1} P h = h^+ + g_1 + g_2 = h^- + g'_1 + g'_2,$$

$$h^{\pm} = \boldsymbol{P}^{\pm} G^{-1} P h; \; g_1, \; g'_1 \in R^+ E^n, \; g_2, \; g'_2 \in L.$$

Отсюда, учитывая (38) и что $h^- + g'_1 - h^+ - g_1 \in L$, имеем: $2 \operatorname{Im} h^* M(\lambda + i0) h = \mp h^* \boldsymbol{P} G^{-1} \boldsymbol{P}^{\pm *}(\lambda) G \boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) G^{-1} P h$. Используя [1, с. 115; 7, с. 274], можно показать, что $\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) \in C^{\infty}_{loc}(\Lambda \setminus \Lambda_d)$. Значит, у абсолютно непрерывной компоненты $\tau(\lambda)$ производная $=$ (39), а сингулярной компоненты у $\tau(\lambda)$ нет. Остальные утверждения теоремы вытекают из n^0 3 теоремы 1 и теоремы Флоке ◼

Отметим, что $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_d$ являются устранимыми особыми точками $\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) G^{-1} P$. Действительно, используя [1, с. 115; 7, с. 274], можно показать, что в окрестности $\forall \lambda_0 \in \Lambda$

$$\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) G^{-1} P = \sum_{\nu = p(\lambda_0)}^{\infty} A^{\pm}_{\nu}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{\nu}, \quad \nu \in \boldsymbol{Z}.$$

Но в силу (38) $\exists c(\lambda_0) > 0 : |\tau'(\lambda)| \geqslant c(\lambda_0) |\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda_0) G^{-1} P|^2$ при λ, близких к λ_0. Поэтому $\boldsymbol{P}^{\pm}(\lambda) G^{-1} P \in L^1_{loc}$, откуда $p(\lambda_0) \geqslant 0$.

Отметим также, что $P G^{-1} P = 0 \Leftrightarrow \tau'(\lambda) \equiv 0$ в силу (20) и n^0 1 замечания 2.

В силу [8] $\exists A = A^* \in M_k(\boldsymbol{C}) : L = \Gamma_A E^k$, где $\Gamma_A = \Gamma(\cos A, \sin A)^*$. Найдем формулы разложения по $m \times k$-решениям $u_\lambda(t)$ уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию $\tilde{u}_\lambda(0) = \Gamma_A$. Ниже $P = 1_n$.

Лемма 7.

$$\tau'_{ac}(\lambda) = \pm \frac{(-1)^{j}i}{2\pi} \Gamma_A S_j^{\pm *^{-1}} P^{\pm}_{4-j} S_j^{\pm^{-1}} \Gamma_A^* \quad (\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_j^{\pm}), \tag{40$^{\pm}$}$$

где $j=1,\ 2,\ S_j^+=\sin AQ_j^+-\cos AQ_{j+2}^+,\ S_j^-=(-1)^{j+1}(Q_{6-2j}^-\times$ $\times\sin A+Q_{5-2j}^-\cos A)^*$, *множества* $\Lambda_j^\pm=\{\lambda\in\Lambda:\det S_j^\pm=0\}$ *не имеют конечных предельных точек.*

Доказательство. С учетом [8, с. 7], (38) легко видеть, что

$$\Lambda_j^\pm\subseteq\{\lambda\in\Lambda:\operatorname{rg}\operatorname{col}\{Q_j^\pm,\ Q_{j+2}^\pm\}<k\}\cup\{\Lambda\cap\Lambda_d\}. \tag{41}$$

В силу (20), (21) [7, с. 64] подпространства $R\pm E^n\mp G$ — положительны (отрицательны) при $\operatorname{Im}\lambda>0$ (<0). Поэтому $\det Q_p^\pm\neq 0$ при $\lambda\in R^1$, $l=\overline{1,4}$. Отсюда, используя [1, с. 115; 7, с. 274], выводим, что не имеют конечных предельных точек множества $\{\lambda\in\Lambda:\det Q_l^\pm=0\}$, а значит, в силу (41), и множества $\Lambda_j^\pm$.

Покажем теперь, что $(j=1,\ 2,\ \lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_j^\pm)$

$$P^\pm=\Gamma\operatorname{col}\{P_j^\pm,\ P_{j+2}^\pm\}S_j^{\pm^{-1}}(\sin A,\ -\cos A)\Gamma^{-1}. \tag{42$^\pm$}$$

Обозначим P правую часть $(42)^+$ при $j=2$. Ясно, что $P\Gamma_A=$ $=0$. В силу (31), $(26)^+$, $(27)^+$ $PR^+=P\Gamma\operatorname{col}\{R_2^+,\ R_4^+\}(-M^{-*},1_k)\times$ $\times\Gamma^{-1}=P\Gamma\operatorname{col}\{Q_2^+,\quad Q_4^+\}Q_2^{+^{-1}}R_2^+(-M^{-*},\ 1_k)\Gamma^{-1}=\Gamma\operatorname{col}\{P_2^+,\ P_4^+\}\times$ $\times Q_2^{+^{-1}}R_2^+(-M^{-*},\ 1_k)\Gamma^{-1}=0$. Проверив аналогично, что $PP^+=$ $=P^+$, получим $(42)^+$ при $j=2$. Подобно доказывается $(42)^+$ при $j=1$, а если учесть, что $S_j^-=\sin A(P_j^-+R_j^+)-\cos A(P_{j+2}^-+$ $+R_{j+2}^+)$ в силу леммы 2, то и $(42)^-$.

Подставляя $(42)^+$, $(j=2)$ в (39), получим $(40)^+$, $(j=2)$, если учесть (25) и что $P_4^{+^*}P_2^+-P_2^{+^*}P_4^+=P_2^+$ в силу леммы 2 и равенства $P^{+^2}=P^+$. Остальные формулы $(40)^\pm$ проверяются аналогично ■

Из теоремы 6 и леммы 6 вытекает

Теорема 7. $\forall f\in D(L)$ *справедливы* (8), (9) *с заменой* $Y_\lambda(t)$ *на* $u_\lambda(t)$ *и* $\tau(\lambda)$ *на* $\rho_{ac}(\lambda)+\rho_d(\lambda)$, *где* $\rho_{ac}(\lambda)\in AC_{loc}$,

$$\rho_{ac}'(\lambda)=\frac{(-1)^j i}{2\pi}S_j^{+^{*^{-1}}}P_{4-j}^+S_j^{+^{-1}}=\frac{(-1)^{j+1}i}{2\pi}S_j^{-^{*^{-1}}}P_{4-j}^-S_j^{-^{-1}}$$

ρ_{ac}' *не зависит от* $j=1,\ 2)$, $\rho_d(\lambda)$ — *функция скачков, множество точек роста которой* $=\Lambda_d$, $\rho_d(\lambda+0)-\rho_d(\lambda-0)=\Pi(\lambda)\times$ $\times R^{-1}(\lambda)$, *где* $\Pi(\lambda)$ — *ортопроектор в* E^k *на* $\operatorname{Ker}(R^+(\lambda)-1_n)\Gamma_A$, $R(\lambda)=\Pi(\lambda)\int u_\lambda^*(t)w(t)u_\lambda(t)dt\Pi(\lambda)+1_k-\Pi(\lambda)>0$. ⌋

Отметим, что при тех $\lambda\in\Lambda$, при которых все м. $\in S$, $\rho_{ac}'=$ $=i(2\pi P_3^+)^{-1}$, если $A=0$, и $\rho_{ac}'=(i2\pi P_2^+)^{-1}$, если $A=(\pi/2)1_k$.

Список литературы: 1. *Храбустовский В. И.* Спектральная матрица периодической симметрической системы с вырождающимся весом на оси. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 35, с. 111—119. 2. *Храбустовский В. И.* Разложения по собственным функциям периодических систем с весом.— ДАН УССР, 1984, сер. А, № 5, с. 26—29. 3. *Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С.* О квадратично-интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка. — Препринт ФТИНТ АН УССР, Х., 1973.—60 с. 4. *Брук В. М.* О симметрических отношениях, порожденных дифференциальными выражением и неотрицательной операторной функцией. — Функцион. анализ, 1980, вып. 15, с. 33—44. 5. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Sefadjoint extensions of symmetric subspaces. — Pasific Iourn. Math., 1974, vol. 54, № 1, p. 71—100. 6. *Dijksma A. and de Snoo H. S. V* Eigenfunction expansions associated with pairs of ordinary differential expressions. — Препринт Mathematish Instituut, Rijksuniversiteit Groningen, 1982.— 57 с. 7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.— 534 с. 8. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1969, вып. 8, с. 3—24.

Поступила в редколлегию 20.10.83.