УДК 517.94 + 513.88

А. М. ХОЛЬКИН

ОПИСАНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ В АБСОЛЮТНО НЕОПРЕДЕЛЕННОМ СЛУЧАЕ

В работе [1] получено описание с помощью краевых условий на сингулярном и регулярном концах всех самосопряженных расширений симметрических дифференциальных операторов четного порядка с матричными коэффициентами на оси и полуоси в квазирегулярном случае, произведена параметризация характеристической функции и установлена явная формула для ее нахождения.

В настоящей статье аналогичные результаты установлены для дифференциальных операторов произвольного (как четного, так и нечетного) порядка с операторными коэффициентами. Для уравнений нечетного порядка эти результаты оказываются новыми и в скалярном случае*.

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, $\dim H \leqslant \infty$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $r \geqslant 1$ с операторными коэффициентами из $B(H)$:

$$l[y] = \sum_{\kappa=0}^{r} i^{\kappa}\, l_{\kappa}[y] = \lambda W(t) y,\ t \in (a,\ \infty),\ a \geqslant -\infty, \quad (1)$$

---

* Частично результаты настоящей статьи депонированы автором в ВИНИТИ 14.11.80, № 4801 — 80 ДЕП (РЖМат, 1981, 2Б774ДЕП).

где

$$l_{2j} = D^j p_j(t) D^j,\ p_j(t) = p_j^*(t),\ l_{2j-1} = \frac{1}{2} D^{j-1}\{D q_j(t) + q_j^*(t) D\} D^{j-1},\ D = \frac{d}{dt}.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(A) Операторные коэффициенты $p_j(t)$, $q_j(t)$ непрерывно в равномерном смысле зависят от t вместе со своими производными до порядка j включительно, коэффициент при старшей производной ($p_n(t)$ при $r = 2n$ и $\operatorname{Re} q_n(t)$ при $r = 2n - 1$) в уравнении (1) имеет ограниченный обратный во всем H при $t \in (a, \infty)$, вес $W(t) = W^*(t) \gg 0$.

(B) Коэффициенты уравнений таковы, что для каждого операторного решения $Y_i(t, \lambda)$ уравнения (1) с начальными данными $Y_i^{(\kappa - i)}(0, \lambda) = \delta_{ik} I$, $i, k = 1, 2, \ldots, r$ (I — единичный оператор в H) при некоторых $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \bar{\lambda}_0$ сходится интеграл

$$\int_a^\infty |W^{\frac{1}{2}}(t) \cdot Y_i(t, \lambda)|^2 \, dt < \infty. \tag{2}$$

(Для уравнения Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами это требование выполняется при условиях В. Б. Лидского (см. [2])). Тогда эти интегралы сходятся при любом λ, т. е. имеет место абсолютно неопределенный случай, в соответствии с принятым в [2] определением для уравнения второго порядка, и индексы дефекта минимального дифференциального оператора L, порожденного в гильбертовом пространстве $H(a, \infty) = L_2(H; (a, \infty); W(t)\,dt)$ дифференциальной операцией $l_W[y] = W^{-1}(t)\ l[y]$, равны $(r \cdot \dim H;\ r \times \dim H)$, $\dim H \leqslant \infty$.

(C) Для минимального дифференциального оператора L в $H(\alpha, \beta)$ существуют самосопряженные распадающиеся граничные условия на любом интервале $(\alpha; \beta) \subseteq (a, \infty)$. В этом случае (см. [3]) для дифференциальной операции нечетного порядка либо $\dim H = \infty$ и $r \geqslant 3$, либо

$$\dim H_t^+ = \dim H_t^-,\ t \in (a, \infty), \tag{3}$$

где H_t^+, H_t^- — приводящие подпространства оператора $\operatorname{Re} q_n(t)$, на первом из которых $\operatorname{Re} q_n(t)$, а на втором $-\operatorname{Re} q_n(t)$ являются положительно определенными. Положим $q_\pm(t) = +\frac{1}{2}(\operatorname{Re} q_n(t)) P_t^\pm$, где $P_t^\pm$ — ортопроекторы на $H_t^\pm$.

Система (1), как известно, эквивалентна системе первого порядка

$$\frac{i}{2}\left\{(Q(t)\tilde{y})' + Q(t)\tilde{y}'\right\} = \left\{\lambda A(t) + B(t)\right\}\tilde{y}, \tag{4}$$

где

$$B(t) = B^*(t),\ A(t) = \underbrace{W(t) \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0}_{r}, \tag{5}$$

и при $r=2n$ $\tilde{y}=y\oplus y'\oplus\ \ldots\ \oplus y^{(n-1)}\oplus y^{[2n-1]}\oplus\ \ldots\ \oplus y^{[n]}$,

$$Q(t)=\begin{pmatrix}0 & iI_n\\ -iI_n & 0\end{pmatrix}, \tag{6}$$

I_n — единичный оператор в H^n, а при $r=2n-1$

$$\tilde{y}=y\oplus y'\oplus\ \ldots\ \oplus y^{(n-2)}\oplus y^{[2n-2]}\oplus\ \ldots\ \oplus y^{[n]}\oplus(-iy^{(n-1)}),$$

$$Q(t)=\left(\begin{array}{cc|c}0 & iI_{n-1} & \\ -iI_{n-} & 0 & \\ \hline & & \mathrm{Re}\,q_n(t)\end{array}\right) \tag{7}$$

(все невыписанные операторы равны 0). Здесь $y^{[k]}$ — квазипроизводные, которые определяются в соответствии с [3].

Определение. *Оператор-функцию $Y(t,\lambda)\in B(H^r,H)$, удовлетворяющую уравнению (1), назовем фундаментальным решением уравнения (1), если: 1) система решений уравнения (1), определяемых оператором $Y(t,\lambda)$, является полной в том смысле, что любое векторное решение $y(t,\lambda)$ уравнения (1) представимо в виде $y(t,\lambda)=Y(t,\lambda)h$, $h\in H^r$; 2)при всех t, λ оператор*

$$M(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{r-1}Y^{(k)*}(t,\lambda)\cdot Y^{(k)}(t,\lambda)\gg 0,$$

т. е. имеет ограниченный обратный во всем H^r.

Пусть $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$ — произвольные операторные решения уравнения (1). Определим оператор $\tilde{Y}(t,\lambda)$ формулой $\tilde{Y}(t,\lambda)h=\tilde{Y}h(t,\lambda)$. Известно, что при всех t

$$\tilde{Y}^*(t,\bar{\lambda})\,Q(t)\,\tilde{Z}(t,\lambda)=\tilde{Y}^*(0,\lambda)\,Q(0)\,\tilde{Z}(0,\lambda). \tag{8}$$

Обозначим $Y_0(t):H^r\to H$ — фундаментальное решение уравнения (1) при $\lambda=0$, удовлетворяющее начальному условию $\tilde{Y}_0(0)=[Q^2(0)]^{-\frac{1}{4}}$. Тогда при всех t

$$\tilde{Y}_0^*(t)\,Q(t)\,\tilde{Y}_0(t)=\frac{J}{i}, \tag{9}$$

где

$$J=i\operatorname{sgn}Q(0)\overset{df}{=}iQ(0)\,[Q^2(0)]^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

Заметим, что $J^*=-J$, $J^2=-I_r$. Положим

$$(Sy)(t)=\tilde{Y}_0^{-1}(t)\,\tilde{y}(t), \tag{11}$$

$y(t)$ — вектор-функция со значениями в H. Линейная невырожденная замена

$$\tilde{y}(t,\lambda)=\tilde{Y}_0(t)\cdot(Sy)(t,\lambda) \tag{12}$$

переводит систему (4) в систему вида

$$J \cdot (Sy)' = \lambda \cdot H(t) \cdot (Sy), \tag{13}$$

где $H(t) = \tilde{Y}_0^*(t) \cdot A(t) \cdot \tilde{Y}_0(t)$. В силу (5) $H(t) = Y_0^*(t) \cdot W(t) \cdot Y_0(t)$ Поэтому с учетом условия (B) имеем

$$\int_a^\infty |H(t)|\,dt < \infty. \tag{14}$$

Лемма 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют (A), (B), (C). *Тогда 1) для любого* $y \in D(L^*)$ *существует сильный предел*

$$\lim_{t\to\infty} (Sy)(t) = (Sy)(\infty); \tag{15}$$

2) если $y(t, \lambda)$ *— решение уравнения (1), то при* $t \geqslant 0$

$$|(Sy)(t,\lambda)|\exp(-|\lambda|\sigma(t)) \leqslant |(Sy)(\infty,\lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant |(Sy)(t,\lambda)|\exp(|\lambda|\sigma(t)) \tag{16}$$

$$|(Sy)(t,\lambda) - (Sy)(\infty,\lambda)| \leqslant |(Sy)(0,\lambda)| \cdot |\lambda|\sigma(t)\exp(|\lambda|\sigma(0)), \tag{17}$$

где $\sigma(t) = \int_t^\infty |Y_0^*(\tau)W(\tau)Y_0(\tau)|\,d\tau$; 3) *для любого* $h \in H^r$ *существует и единственно решение* $y(t, \lambda)$ *уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию на сингулярном конце;*

$$\lim_{t\to\infty} (Sy)(t,\lambda) = h.$$

Доказательство. 1) Пусть $y \in D(L^*)$. Тогда $l_W[y] - \lambda y \overset{df}{=} f \in H(a, \infty)$. Рассмотрим уравнение $l[u] - \lambda Wu = Wf_1$ (18). Подобно тому, как однородное уравнение (1) эквивалентно системе (4), которая заменой (12) приводится к системе (13), неоднородное уравнение (18) сводится к системе $J \cdot (Su)' = \lambda H(t) \cdot (Su) + F$ (19) или

$$(Su)' = -\lambda JH(t) \cdot (Su) - JF \tag{20}$$

где $F(t) = Y_0^*(t)W(t)f(t)$. Решение этого уравнения записывается в виде

$$(Su)(t,\lambda) = U(t,0) \cdot (Su)(0,\lambda) - \int_0^t U(t,\tau) \cdot J \cdot F(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

где $U(t, \tau)$ — эволюционный оператор уравнения (20) (см. [4, с. 148]). В силу леммы 4 из [4, с. 162] при $0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$\exp\Big[-|\lambda|\int_\tau^t |H(t)\,dt\Big] \leqslant |U(t,\tau)| \leqslant \exp\Big[|\lambda|\int_\tau^t |H(t)|\,dt\Big], \tag{22}$$

в силу (14) $\exp[-|\lambda|\sigma(0)] \leqslant |U(t,\tau)| \leqslant \exp[|\lambda|\sigma(0)]$ (23). Так как $f \in H(0,\infty)$, а $|W^{\frac{1}{2}}(t)Y_0(t)| = |Y_0^*(t)W^{\frac{1}{2}}(t)|$, то используя условие (B), имеем

$$\int\limits_0^\infty |F(t)|\,dt = \int\limits_0^\infty |Y_0^*(t)W(t)f(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^\infty |Y_0^*(t)W^{\frac{1}{2}}(t)| \times$$

$$\times |W^{\frac{1}{2}}(t)f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_0^\infty |Y_0^*(t)W^{\frac{1}{2}}(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int\limits_0^\infty |W^{\frac{1}{2}}(t)f(t)|^2\,dt} < \infty.$$

Поэтому из (21) и (23) находим

$$|(Su)(t,\lambda)| \leqslant \exp[|\lambda|\sigma(0)] \cdot \left\{|(Su)(0,\lambda) + \int\limits_0^\infty |F(t)|\,dt\right\} \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} M < \infty$$

и, следовательно, каждое решение $(Su)(t,\lambda)$ уравнения (20) является ограниченным по $t \in (0,\infty)$. Из уравнения (20) $|(Su)'| \leqslant \leqslant |\lambda| \cdot |H(t)|M + |F(t)|$, а поэтому интеграл $\int\limits_0^\infty |(Su)'(t,\lambda)|\,dt$ сходится и существует сильный предел $\lim\limits_{t\to\infty}(Su)(t,\lambda) = (Su)(\infty,\lambda)$. Действительно, при $t \to \infty$

$$|(Su)(t,\lambda) - (Su)(\infty,\lambda)| = \left|\int\limits_t^\infty (Su)'(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_t^\infty |(Su)'|\,dt \to 0.\right.$$

Так как вектор-функция $(Sy)(t)$ является решением уравнения (20), то для $y \in D(L^*)$ существует сильный предел (15). 2), 3) следуют из (15), (21) и (23) (см. также [4, с. 166]).

Пусть при $r = 2n-1$ и условии (3) H^+ — произвольное гильбертово пространство, изоморфное $H_t^\pm$, $V^\pm(t)$ — изометрические операторы, отображающие $H_t^\pm$ на H_t^+, а при $\dim H_t^+ \neq \dim H_t^-$, $r = 2n-1 \geqslant 3$ и $\dim H = \infty$ H^+ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство, $V_t^\pm(t)$ — изометрические операторы, отображающие $H_t^\pm \oplus H$ на $H^+ \oplus H$.

Положим

$$\tilde{H} = \begin{cases} H^n & \text{при } r = 2n; \\ H^+ \oplus H^{n-1} & \text{при } r = 2n-1. \end{cases}$$

Теорема 1. *В абсолютно неопределенном случае: 1) для любых $y,\ z \in D(L^*)$ имеет место формула Грина:*

$$\langle L^*y, z\rangle - \langle y, L^*y\rangle = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\widetilde{H}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\widetilde{H}^2}, \tag{24}$$

где $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в $H(a,\infty)$ и $\widetilde{H}^2$ соответственно, и для задачи на полуоси

$$\begin{aligned} \Gamma_1 y &= -P_1\cdot(Sy)(0) \oplus P_1\cdot(Sy)(\infty), \\ \Gamma_2 y &= P_2\cdot(Sy)(0) \oplus P_2\cdot(Sy)(\infty), \end{aligned} \tag{25}$$

а для задачи на оси

$$\begin{aligned} \Gamma_1 y &= -P_1\cdot(Sy)(-\infty) \oplus P_1\cdot(Sy)(\infty), \\ \Gamma_2 y &= P_2\cdot(Sy)(-\infty) \oplus P_2\cdot(Sy)(\infty), \end{aligned} \tag{26}$$

$(Sy)(\pm\infty)$, $(Sy)(0)$ определяются по $y(t)\in D(L^*)$ формулой (12) и при $r = 2n$

$$P_1 = (I_n;\, 0_n),\ \ P_2 = (0_n,\, I_n) : H^r \to \widetilde{H},$$

а при $r = 2n-1$ и условии (3) $\dim H_t^+ = \dim H_t^-$

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \frac{i}{\sqrt{2}}\left[V^+(0)\cdot q_+^{\frac{1}{2}}(0) + V^-(0)\cdot q_-^{\frac{1}{2}}(0)\right]\cdot[q_+(0)+q_-(0)]^{-\frac{1}{2}} \\ \hline I_{n-1} & 0_{n-1} & \end{array}\right);$$

$$P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V^+(0)\cdot q_+^{\frac{1}{2}}(0) - V^-(0)\cdot q_-^{\frac{1}{2}}(0)\right]\cdot[q_+(0)+q_-(0)]^{-\frac{1}{2}} \\ \hline 0_{n-1} & I_{n-1} & \end{array}\right).$$

При $\dim H_t^+ \neq \dim H_t^-$, если $r = 2n-1$ и $\dim H = \infty$, то можно положить

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & P_{12}^{(1)} & & P_{14}^{(1)} & P_{15}^{(1)} \\ \hline I_{n-2} & & 0_{n-2} & & \end{array}\right);\ \ P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & P_{12}^{(2)} & & P_{14}^{(2)} & P_{15}^{(2)} \\ \hline 0_{n-2} & & I_{n-2} & & \end{array}\right);$$

$${}^{(1)}_{12} = P_{14}^{(2)} = -\frac{i}{2}\left[V_1^+(0)\begin{pmatrix}0_+\\ I_1\end{pmatrix} - V_1^-(0)\begin{pmatrix}0_-\\ I_1\end{pmatrix}\right];$$

$$P_{14}^{(1)} = -P_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[V_1^+(0)\begin{pmatrix}0_+\\ I_1\end{pmatrix} + V_1^-(0)\begin{pmatrix}0_-\\ I_1\end{pmatrix}\right];$$

$$P_{15}^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[V_1^+(0)\begin{pmatrix}q_+^{\frac{1}{2}}(0)\\ 0\end{pmatrix} + V_1^-(0)\begin{pmatrix}q_-^{\frac{1}{2}}(0)\\ 0\end{pmatrix}\right]\cdot[q_+(0)+q_-(0)]^{-\frac{1}{2}};$$

$$P_{15}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_1^+(0)\begin{pmatrix}q_+^{\frac{1}{2}}(0)\\ 0\end{pmatrix} - V_1^-(0)\begin{pmatrix}q_-^{\frac{1}{2}}(0)\\ 0\end{pmatrix}\right]\cdot[q_+(0)+q_-(0)]^{-\frac{1}{2}},$$

$0_\pm$ — нулевой оператор, действующий из H в $H_0^\pm$.

2) Для любых $h,\ g\in\widetilde{H}^2$ найдется такой $y\in D(L^*)$, что $\Gamma_1 y = h$, $\Gamma_2 y = g$.

Замечание 1. Теорема 1 устанавливает, что тройка $(\widetilde{H}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений минимального оператора L [5].

Замечание 2. Непосредственно проверяется, что $P_1 \cdot (Sy)(0) = \hat{y}(0)$, $P_2 \cdot (Sy)(0) = \hat{y}'(0)$, где $\hat{y}(0)$, $\hat{y}'(0)$ определяется в соответствии с [3].

В дальнейших доказательствах будут использоваться различные соотношения между операторами P_1, P_2.

Лемма 2,

$$P_1 = P_2 \cdot J,\ P_2 = -P_1 \cdot J, \tag{27}$$

$$P_1^* P_1 + P_2^* P_2 = I_r,\ P_2^* P_1 - P_1^* P_2 = J, \tag{28}$$

$$P_2 \cdot J \cdot P_1^* = -P_1 \cdot J \cdot P_2^* = I_{\widetilde{H}}, \tag{29}$$

$$P_1 \cdot J \cdot P_1^* = P_2 \cdot J \cdot P_2^* = 0, \tag{30}$$

где J определено формулой (10), *а $I_{\widetilde{H}}$ — единичный оператор в $\widetilde{H}$.*

Утверждение леммы проверяются непосредственно.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим задачу на полуоси. Для любых y, $z \in D(L^*)$ имеет место формула Лангранжа

$$\langle L^* y, z\rangle - \langle y, L^* z\rangle = [(\hat{y}, \hat{z}')_{\widetilde{H}} - (\hat{y}'\ \hat{z})_{\widetilde{H}}]\,\Big|_0^\infty. \tag{31}$$

С другой стороны, в силу (25) и (28)

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\widetilde{H}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\widetilde{H}^2} = [(P_1 \cdot (Sy)(t), P_2 \cdot (Sz)(t))_{\widetilde{H}} -$$
$$-(P_2 \cdot (Sy)(t), P_1 \cdot (Sz)(t))_{\widetilde{H}}]\,\Big|_0^\infty = ((P_2^* P_1 - P_1^* P_2)(Sy)(t), (Sz)(t)_{H^r}\Big|_0^\infty =$$
$$= (J \cdot (Sy)(t), (Sz)(t))_{H^r}\Big|_0^\infty.$$

Отсюда с учетом (12) и (9)

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\widetilde{H}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\widetilde{H}^2} = (I\widetilde{Y}_0^{-1}\tilde{y}, \widetilde{Y}_0^{-1}\tilde{z})_{H^r}\Big|_0^\infty =$$
$$= (\widetilde{Y}_0^{-1*} J \widetilde{Y}_0^{-1}\tilde{y}, \tilde{z})_{H^r}\Big|_0^\infty = i(Q(t)\tilde{y}(t), \tilde{z}(t))_{H^r}\Big|_0^\infty.$$

Поскольку

$$W(y, z) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{y}, \hat{z}')_{\widetilde{H}} - (\hat{y}', \hat{z})_{\widetilde{H}} = i(Q(t)\tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \tag{32}$$

(это проверяется, подобно [3]), то

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\widetilde{H}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\widetilde{H}^2} = (\hat{y}, \hat{z}')_{\widetilde{H}} - (\hat{y}', \hat{z})_{\widetilde{H}}. \tag{33}$$

Сравнивая (31) и (33), имеем (24). Завершается доказательство теоремы аналогично [1].

В следующей теореме для оператора L устанавливается конкретный вид граничных условий.

Теорема 2. *Всякое самосопряженное расширение $\widetilde{L}$ минимального оператора L в абсолютно неопределенном случае при условиях* (*A*), (*B*), (*C*) *определяется краевым условием вида*

$$\cos\widetilde{A} \cdot \Gamma_1 y - \sin\widetilde{A}\,\Gamma_2 y = 0, \tag{34}$$

где $\tilde{A}$ — самосопряженный оператор в $\tilde{H}^2$. Обратно, каждое краевое условие вида (34) *порождает самосопряженное расширение оператора* L.

Доказательство. Так как по теореме 1 тройка $(\tilde{H}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений минимального оператора L, то, как известно [3, 5], каждое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L порождает некоторое эрмитово отношение θ в $\tilde{H}^2$: $(\Gamma_1 y)\,\theta\,(\Gamma_2 y) \leftrightarrow y \in D(\tilde{L})$.

Поэтому в силу теоремы об общем виде эрмитовых отношений [3] имеем (34), где $\Gamma_1 y$, $\Gamma_2 y$ определены теоремой 1.

Следствие. *Если*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A, B — самосопряженные операторы в $\tilde{H}$, то получаем распадающиеся краевые условия. Например, для задачи на полуоси

$$\cos A\hat{y}(0) + \sin A\hat{y}'(0) = 0, \tag{35}$$

$$\cos B \cdot P_1 \cdot (Sy)(\infty) - \sin B \cdot P_2 \cdot (Sy)(\infty) = 0. \tag{36}$$

2. Произведем параметризацию характеристической операторной функции $M(\lambda)$.

Пусть $\Phi(t, \lambda)$, $\Psi(t, \lambda) \in B(\tilde{H}, H)$ — операторные решения уравнения (1) при начальных данных:

$$\hat{\Phi}(0, \lambda) = \sin A, \quad \hat{\Phi}'(0, \lambda) = -\cos A,$$

$$\hat{\Psi}(0, \lambda) = \cos A, \quad \hat{\Psi}'(0, \lambda) = \sin A.$$

Теорема 3. *При условиях теоремы* 2 *краевое условие* (36) *на сингулярном конце при всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ эквивалентно условию вида*

$$\lim_{t\to\infty} [(\hat{\Psi}^*(t, \bar{\lambda}) + M^*(\bar{\lambda})\hat{\Phi}^*(t, \bar{\lambda}))\,\hat{y}'(t) - $$

$$- (\hat{\Psi}'^*(t, \bar{\lambda}) + M^*(\bar{\lambda})\hat{\Phi}'^*(t, \bar{\lambda}))\,\bar{y}(t)] = 0, \tag{37}$$

где характеристическая оператор-функция $M(\lambda)$ представима в виде

$$M(\lambda) = -[(S\Psi)^*(\infty, \bar{\lambda})P_2^* \sin B - (S\Psi)^*(\infty, \bar{\lambda})P_1^* \cos B] \times$$

$$\times [(S\Phi)^*(\infty, \bar{\lambda})P_2^* \sin B - (S\Phi)^*(\infty, \bar{\lambda})P_1^* \cos B]^{-},$$

аналитична при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \frac{M(\lambda) - M^*(\lambda)}{\lambda - \bar{\lambda}} \geqslant 0, \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0). \tag{38}$$

Если $\dim H < \infty$, то функция $M(\lambda)$ мероморфна с полюсами на вещественной оси.

Когда самосопряженный в H операторный параметр B принимает всевозможные значения в пределах $-\frac{\pi}{2}\cdot I_{\tilde{H}} < B \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot I_{\tilde{H}}$, $M(\lambda)$ пробегает все характеристические операторные функции, отвечающие ортогональным спектральным оператор-функциям с краевым условием в нуле (35), т. е. при каждом λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $M(\lambda)$ пробегает операторную окружность [2].

Доказательство. Рассмотрим фундаментальное операторное решение: $Y(t, \lambda) = \Phi(t, \lambda) P_1 + \Psi(t, \lambda) P_2 : H' \to H$ **(39)** уравнения (1). Определим оператор $\chi(t, \lambda) : \tilde{H} \to H$ формулой $\chi(t, \lambda)h = y_h(t, \lambda)$, где $y_h(t, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям на бесконечности: $P_1 \cdot (Sy_h)(\infty, \lambda) = \sin B \cdot h$, $P_2 \cdot (Sy_h)(\infty, \lambda) = \cos B \cdot h$. Операторное решение $\chi(t, \lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям на бесконечности: $P_1 \cdot (S\chi)(\infty, \lambda) = \sin B$, $P_2 \cdot (S\chi)(\infty, \lambda) = \cos B$ **(40)**. В силу фундаментальности операторного решения $Y(t, \lambda)$.

$$\chi(t, \lambda) = Y(t, \lambda) C(\lambda), \ \tilde{\chi}(t, \lambda) = \tilde{Y}(t, \lambda) C(\lambda), \ C(\lambda) : \tilde{H} \to H'.$$

Отсюда и из (9) находим

$$C(\lambda) = \tilde{Y}^{-1}(t, \lambda)\, \tilde{\chi}(t, \lambda) = -iJ\tilde{Y}^*(t, \bar{\lambda})\, Q(t)\, \tilde{\chi}(t, \lambda). \qquad \mathbf{(41)}$$

(В силу (8) правая часть (41) не зависит от t).

Полагая $C_k(\lambda) = P_k C(\lambda)$, $k = 1, 2$, имеем $\chi(t, \lambda) = \Phi(t, \lambda) \times C_1(\lambda) + \Psi(t, \lambda) \cdot C_2(\lambda)$ и вместе с этим

$$\tilde{\chi}(t, \lambda) = \tilde{\Phi}(t, \lambda) \cdot C_1(\lambda) + \tilde{\Psi}(t, \lambda) \cdot C_2(\lambda),$$

где

$$C_k(\lambda) = -iP_k J\tilde{Y}^*(t, \bar{\lambda})\, Q(t)\, \tilde{\chi}(t, \lambda). \qquad (42)$$

Поскольку, в силу (29), (30)

$$\hat{Y}(0, \lambda) JP_1^* = (\hat{\Phi}(0, \lambda) P_1 + \hat{\Psi}(0, \lambda) P_2)\, JP_1^* = \hat{\Psi}(0, \lambda),$$
$$\hat{Y}'(0, \lambda) JP_1^* = \hat{\Psi}'(0, \lambda),$$

то $Y(t, \lambda) JP_1^* = \Psi(t, \lambda)$ и аналогично $Y(t, \lambda) JP_2^* = -\Phi(t, \lambda)$. Поэтому из уравнения (42) получим

$$C_1(\lambda) = i(\tilde{\Psi})^*(t, \bar{\lambda})\, Q(t)\, \tilde{\chi}(t, \lambda);$$
$$C_2(\lambda) = -i(\tilde{\Phi})^*(t, \bar{\lambda})\, Q(t)\, \tilde{\chi}(t, \lambda). \qquad (43)$$

Подобно (32), для любых операторных решений $Y(t, \lambda)$, $Z(t, \lambda)$ уравнения (1) непосредственно проверяется равенство

$$W_{t, \lambda}(Y, Z) = i\tilde{Y}^*(t, \bar{\lambda})\, Q(t)\, \tilde{Z}(t, \lambda), \qquad (44)$$

где $W_{t, \lambda}(Y, Z)\ \hat{Y}'^*(t, \bar{\lambda})\, \check{Z}(t, \lambda) - \hat{Y}^*(t, \bar{\lambda})\, \hat{Z}'(t, \lambda)$. Отсюда, в частности, в силу (8) следует, что $W_{t, \lambda}(Y, Z)$ не зависит от t и в дальнейшем индекс t опускается.

Из (43) и (44) имеем $C_1(\lambda) = W_\lambda(\Psi, X)$, $C_2(\lambda) = -W_\lambda(\Phi, X)$. Положим $D_{t,\lambda}(\Psi, X) = (P_2 S\Psi)^*(t, \bar\lambda) \cdot (P_1 S X)(t, \lambda) - (P_1 S\Psi)^*(t, \bar\lambda) \times$ $\times (P_2 S X) \cdot (t, \lambda)$. Используя (28) и (11), получаем

$$D_{t,\lambda}(\Psi, X) = (S\Psi)^* P_2^* P_1 \cdot (SX) - (S\Psi)^* P_1^* P_2 \cdot (SX) =$$
$$= (S\Psi)^* J \cdot (SX) = (\tilde Y_0^{-1} \tilde\Psi)^* J \cdot (\tilde Y_0^{-1} \tilde X) =$$
$$= \tilde\Psi^* \tilde Y_0^{-1*} J \tilde Y_0^{-1} \tilde X = i \tilde\Psi^* Q \tilde X = W_\lambda(\Psi, X).$$

Таким образом, $C_1(\lambda) = W_\lambda(\Psi, X) = D_{\infty,\lambda}(\Psi, X) = (S\Psi)^*(\infty, \bar\lambda) \times$ $\times P_2^* \sin B - (S\Psi)^*(\infty, \bar\lambda) P_1^* \cos B$. В силу (17) $(S\Psi)(\infty, \lambda)$ является аналитической функцией по λ, а поэтому и $C_1(\lambda)$ аналитически зависит от λ. Аналогично доказывается аналитичность функции

$$C_2(\lambda) = -[(S\Phi)^*(\infty, \bar\lambda) P_2^* \sin B - (S\Phi)^*(\infty, \bar\lambda) P_1^* \cos B],$$

а вместе с ней $X(t, \lambda)$.

В силу следующей ниже леммы 3 оператор-функция

$$M(\lambda) = C_1(\lambda) \cdot C_2^{-1}(\lambda) = -[(S\Psi)^*(\infty, \bar\lambda) P_2^* \sin B - (S\Psi)^* \times$$
$$\times (\infty, \lambda) P_1^* \cos B] [(S\Phi)^*(\infty, \bar\lambda) P_2^* \sin B - (S\Phi)^*(\infty, \bar\lambda) P_1^* \cos B]^{-1}$$

определена и аналитична при всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, а при $\dim H < \infty$ является мероморфной с простыми полюсами на вещественной оси. Кроме того, при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$

$$\frac{M(\lambda) - M^*(\lambda)}{\lambda - \bar\lambda} = \frac{C_2^{-1*}(\lambda)\,[C_2^*(\lambda)\, C_1(\lambda) - C_1^*(\lambda)\, C_2(\lambda)]\, C_2^{-1}(\lambda)}{\lambda - \bar\lambda}. \quad (45)$$

Исходя из того что $C_1(\lambda) = W_{0,\lambda}(\Psi, X)$, $C_2(\lambda) = -W_{0,\lambda}(\Phi, X)$, после элементарных преобразований имеем

$$C_2^*(\lambda)\, C_1(\lambda) - C_1^*(\lambda)\, C_2(\lambda) = \hat X'^*(0, \lambda)\, \hat X(0, \lambda) - \hat X^*(0, \lambda)\, \hat X'(0, \lambda), \quad (46)$$

а в силу формул (31), (33) и (25) и начальных условий (40) получаем

$$(\lambda - \bar\lambda) \int_0^\infty \hat X^*(t, \lambda) A(t) \hat X(t, \lambda)\, dt = \hat X'^*(0, \lambda) \hat X(0, \lambda) -$$
$$- \hat X^*(0, \lambda) \hat X'(0, \lambda). \quad (47)$$

Из (45), (46), (47) вытекает (38).

Пусть операторная функция $F(t): \tilde H \to H$ и такая, что при любом $h \in \tilde H$ $F(t) h \in D(L^*)$. Тогда при всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ существует

$$\lim_{t\to\infty} W_{t,\lambda}(\Psi + \Phi M(\lambda), F) = C_2^{-1*} \lim_{t\to\infty} W_{t,\lambda}(X, F) =$$
$$= C_2^{-1*} \lim_{t\to\infty} D_{t,\lambda}(\chi, F) = C_2^{-1*} \lim_{t\to\infty} [(P_2 S X)^* \cdot (P_1 S F) -$$

$$-(P_1 S \chi)^* \cdot (P_2 SF)] = C_2^{-1*} [\cos B \cdot P_1 \cdot (SF)(\infty) - \\ - \sin B \cdot P_2 \cdot (SF)(\infty)].$$

Если при некотором $h \in \tilde{H}$ $y(t) = F(t) h \in D(\tilde{L})$, где $\tilde{L}$ — самосопряженное расширение, определенное граничными условиями (35), (36), то получим (37). Теорема доказана.

Обозначим L_0 минимальный относительно точки 0 оператор в $H(0, \infty)$, порожденный выражением $l_W[y]$ и условием (36); $\sigma_e(L_0)$ — его предельный спектр.

Лемма 3. *Пусть* L — *самосопряженное расширение оператора* L_0, *порожденное граничным условием* (35), а $\chi(t, \lambda) \in B(\tilde{H}, H)$ — *операторное решение задачи* (1), (40). *Тогда для того, чтобы оператор*

$$\cos A \cdot \hat{\chi}(0, \lambda) + \sin A \cdot \hat{\chi}'(0, \lambda) = W_{0, \lambda}(\Phi, \chi) = -C_2(\lambda)$$

не имел ограниченного обрат ого во всем $\tilde{H}$, *необходимо, чтобы* $\lambda \in \sigma(\tilde{L})$, *и достаточно, чтобы* $\lambda \in \sigma(\tilde{L}) \setminus \sigma_e(L_0)$.

Для задачи второго порядка на конечном интервале этот результат известен (см. [2, 6]).

Список литературы: 1. *Холькин А. М.* Самосопряженные краевые условия на бесконечности для квазирегулярной системы дифференциальных уравнений четного порядка.— В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. К., 1981, с. 174—183. 2. *Горбачук М. Л.* О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами.— Укр. матем. журн., 1966, **18**, № 2, с. 3—21. 3. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1969, вып. 8, с. 3—24. 4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 534 с. 5. *Кочубей А. Н.* О расширении симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Матем. заметки, 1975, № 1, **17**, с. 41—48. 6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Матем. сб., 1960, **51**, № 3, с. 293—342.

Поступила в редколлегию 18.01.84.